

Session 2007

MAT-07-PG6

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

Jeudi 03 mai 2007 - de 7h 00 à 10h 00
Deuxième épreuve d'admissibilité

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures
Coefficient : 3
Note éliminatoire : 5/20

Rappel de la notation :

Il est tenu compte, à hauteur de **trois points** maximum, de la qualité orthographique de la production des candidats.

Ce sujet contient 9 pages, numérotées de 1/9 à 9/9. Assurez-vous que cet exemplaire est complet. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, ne comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

EXERCICE 1 (3 points)

1) La lettre x désigne un nombre.

Dire, en justifiant, si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

- énoncé 1 : « Si $2x$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »
- énoncé 2 : « Si $\frac{x}{2}$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »
- énoncé 3 : « Si $x+1$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

2) Etant donnés trois nombres, en les additionnant deux à deux, on obtient trois sommes.
Si les sommes obtenues sont 78, 59 et 43, retrouver les trois nombres choisis.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans cet exercice, tous les aquariums considérés sont des parallélépipèdes rectangles et sont remplis à ras bord.

Pour trouver le volume d'eau dans un aquarium, il faut tenir compte du volume occupé par les poissons et les accessoires : on retranche ainsi 20% au volume total de l'aquarium pour obtenir le volume d'eau.

Partie A

Le propriétaire d'un aquarium constate que les poissons sont malades. Renseignements pris, il achète un médicament pour un traitement de trois jours. Sur la boîte, il peut consulter le tableau suivant :

	dose pour 20 litres
1 ^{er} jour	10 gouttes
2 ^{ème} jour	5 gouttes
3 ^{ème} jour	5 gouttes

Dimensions de l'aquarium :

- longueur : 1 mètre ;
- largeur : 0,30 mètre ;
- hauteur : 0,45 mètre.

- 1) Montrer, par calcul, que le volume d'eau contenu dans l'aquarium est de 108 litres.
- 2) a) Quel nombre de gouttes faut-il verser le premier jour ?
b) Quel nombre de gouttes aura-t-on versé en tout à la fin du traitement ?

Partie B

Dans cette partie, la hauteur de l'aquarium reste fixée à 0,45 mètre.

- 1) Prouver que le nombre N de gouttes versées le premier jour est donné par la formule suivante $N = L \times l \times 1,8$ (L et l représentent respectivement la longueur et la largeur de l'aquarium exprimées en décimètres).

- 2) Pour aider ses clients, un commerçant a commencé à remplir un tableau indiquant le nombre de gouttes à verser le premier jour dans divers aquariums (selon la longueur et la largeur, la hauteur restant fixée à 0,45 mètre).

Reproduire ce tableau sur la copie et le compléter, sans oublier les opérateurs manquants. En cas de besoin, les résultats seront arrondis au nombre de gouttes le plus proche.

longueur	50 cm	75 cm	100 cm	150 cm
largeur			54 gouttes	
30 cm				
40 cm				

The diagram includes several circles with arrows pointing to them from the table cells:

- A circle containing $x \dots$ has arrows pointing to the top-right corner of the table and the cell containing "54 gouttes".
- A circle containing $: \dots$ has arrows pointing to the top-right corner of the table and the cell containing "54 gouttes".
- A circle containing $x \dots$ has arrows pointing to the cells containing "30 cm" and "40 cm".
- A circle containing $: 2$ has arrows pointing to the bottom-right corner of the table and the cell containing "54 gouttes".

Partie C

Dans cette partie, la hauteur de l'aquarium est encore fixée à 0,45 mètre.

- 1) Construire les représentations graphiques qui permettent de lire le nombre de gouttes à verser le premier jour en fonction de la longueur, pour des aquariums de largeur 30 cm ou 40 cm. Les deux représentations sont à faire sur un même graphique (sur l'axe des abscisses, 1 centimètre représentera une longueur de 10 centimètres et sur l'axe des ordonnées, 1 centimètre représentera 10 gouttes).
- 2)
 - a) Donner, par lecture sur le graphique, le nombre de gouttes à verser le premier jour dans un aquarium de longueur 120 cm et de largeur 40 cm.
 - b) Donner, par lecture sur le graphique, le nombre de gouttes à verser le premier jour dans un aquarium de longueur 90 cm et de largeur 30 cm.

Question complémentaire (4 points)

Les deux énoncés de problèmes suivants ont été donnés lors de l'évaluation à l'entrée en 6°, dans deux séquences différentes, en 2005.

Énoncé 1 : « 6 objets identiques coûtent 150 € Combien coûtent 9 de ces objets ? »

Énoncé 2 : « 10 objets identiques coûtent 22 € Combien coûtent 15 de ces objets ? »

On trouvera, dans l'annexe 1, des productions d'élèves.

- 1) Quelle est la notion mathématique sous-jacente dans ces deux énoncés ?
- 2) Pourquoi a-t-on proposé ces deux énoncés dans une même évaluation ?
- 3) Analyser les productions d'élèves de l'annexe 1 en prenant soin de décrire la procédure utilisée et en repérant les erreurs et leur(s) origine(s) éventuelle(s).

EXERCICE 3 (4 points)

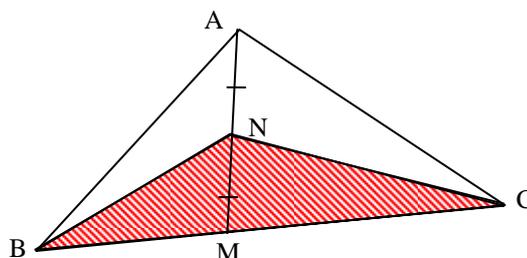
Partie A

1) Démontrer qu'une médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire.

2) On considère le triangle ABC ci-contre.

Le point M est un point du segment [BC] et le point N est le milieu du segment [AM].

Comparer l'aire de la surface hachurée et l'aire de la surface blanche. Justifier.

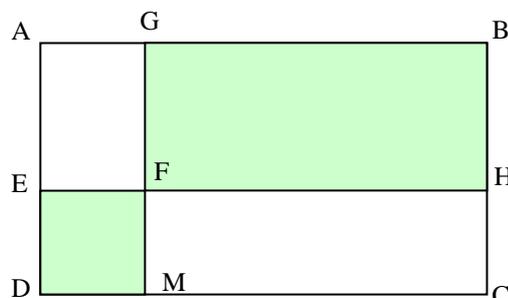


Partie B

On considère un rectangle ABCD (représenté ci-contre sans respect des dimensions) tel que : $AB = 20$ cm et $AD = 8$ cm.

Les points E, F, G, H et M sont tels que :

- E appartient à [AD],
- M appartient à [DC],
- le quadrilatère EDMF est un carré,
- G appartient à [AB],
- le quadrilatère GFHB est un rectangle.



On admettra que G, F et M sont alignés et que E, F et H le sont également.

On note : $DE = x$, avec $0 \leq x \leq 8$, l'unité choisie étant le centimètre.

- 1) Démontrer que l'aire de la partie grisée est égale à : $2x^2 - 28x + 160$.
- 2) Établir l'égalité : $2x^2 - 28x + 160 = 2(x - 7)^2 + 62$.
- 3) Pour quelle valeur de x l'aire de la partie grisée est-elle minimale ?
- 4) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de la partie grisée est-elle égale à 112 cm² ?

Question complémentaire (4 points)

Compte rendu de séance :

(inspiré d'une séance décrite dans les ressources pédagogiques de l'IUFM de Bretagne)

Le professeur distribue un puzzle (partie supérieure de l'annexe 2) à chaque élève qui découpe les 7 pièces.

A l'issue du découpage, le professeur propose d'observer les pièces et note au tableau les différentes remarques des élèves.

Le professeur dit ensuite : « Nous allons choisir la pièce U comme unité d'aire et déterminer l'aire de chacune des autres pièces ».

Il distribue la fiche de travail (Annexe 3) aux élèves et leur propose de travailler par deux.

Une mise en commun autour des travaux de chaque groupe et une validation clôtureront la séance.

- 1) Citer trois compétences mises en jeu dans cette activité. On pourra se référer à l'annexe 4 comportant un extrait de la liste des compétences devant être acquises en fin de cycle 3.
- 2) La séance se compose de quatre phases principales. Caractériser chacune d'elles et en dégager l'intérêt pédagogique.
- 3) A partir de la pièce U, quelles manipulations permettent aux élèves de déterminer l'aire de :
 - la pièce A ?
 - la pièce B ?
 - la pièce D ?
- 4) Que peut faire constater l'enseignant à ses élèves au sujet des pièces B et E ?
- 5) Proposer une manipulation qui permettrait de faire constater aux élèves que les pièces B et E n'ont pas le même périmètre.

ANNEXE 1

Production d'Alice :

<p>Enoncé 1 :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px;"> $6 \div 2 = 3$ $150 \div 2 = 75$ $3 \times 3 = 9 \quad 75 \times 3 = 225 \text{€}$ </div> <p>Réponse : 225...</p>	<p>Enoncé 2 :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px;"> $10 \div 2 = 5$ $22 \text{€} \div 2 = 11$ $5 \times 3 = 15 \quad 11 \times 3 = 33 \text{€}$ </div> <p>Réponse : 33€...</p>
---	--

Production de Bruno :

<p>Enoncé 1 :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px;"> <p style="text-align: center; font-size: small;">Utilise ce cadre pour faire tes recherches</p> $\begin{array}{r} 150 \text{€} \\ \times 9 \\ \hline 1350 \text{€} \end{array}$ </div> <p>Réponse :</p>	<p>Enoncé 2 :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px;"> <p style="text-align: center; font-size: small;">Utilise ce cadre pour faire tes recherches</p> $\begin{array}{r} 22 \\ \times 15 \\ \hline 110 \\ + 220 \\ \hline 330 \end{array}$ </div> <p>Réponse :</p>
---	---

Production de Charles :

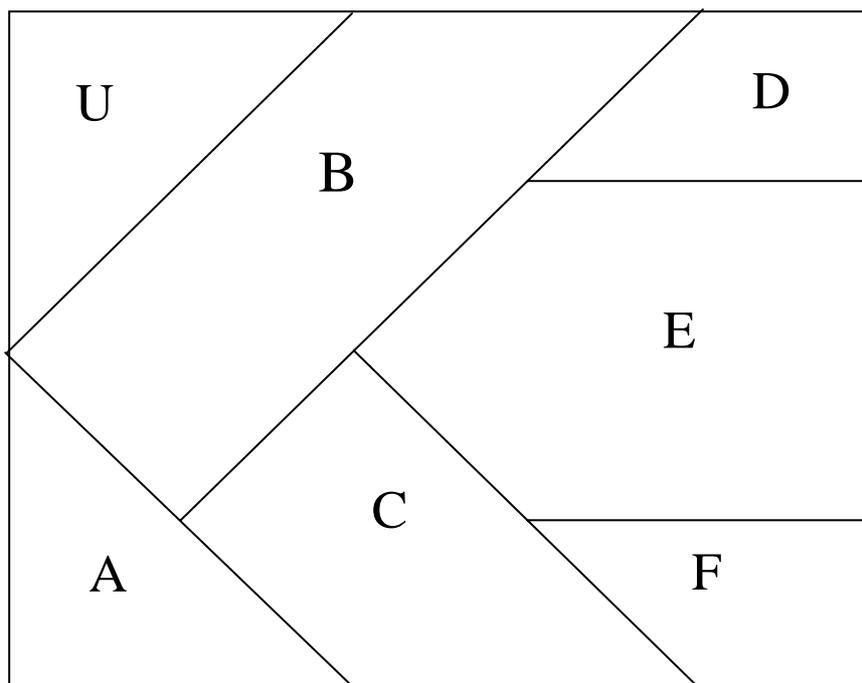
<p>Enoncé 1 :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px;"> $\begin{array}{r} 150 \text{€} \\ - 12 \text{€} \\ \hline 30 \\ - 30 \\ \hline 00 \end{array}$ <p style="margin-left: 20px;">un objet coûte 25€</p> $\begin{array}{r} + 25 \\ 225 \end{array}$ </div> <p>Réponse : 225€</p>	<p>Enoncé 2 :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px;"> <p>10 objets coûtent 22€ 15 objets coûtent 33€</p> $\begin{array}{r} 22 \text{€} \\ \times 10 \\ \hline 220 \end{array}$ $\begin{array}{r} 33 \text{€} \\ \times 5 \\ \hline 165 \\ + 220 \\ \hline 385 \end{array}$ </div> <p>Réponse : 33€...</p>
--	--

Production de Dalila :

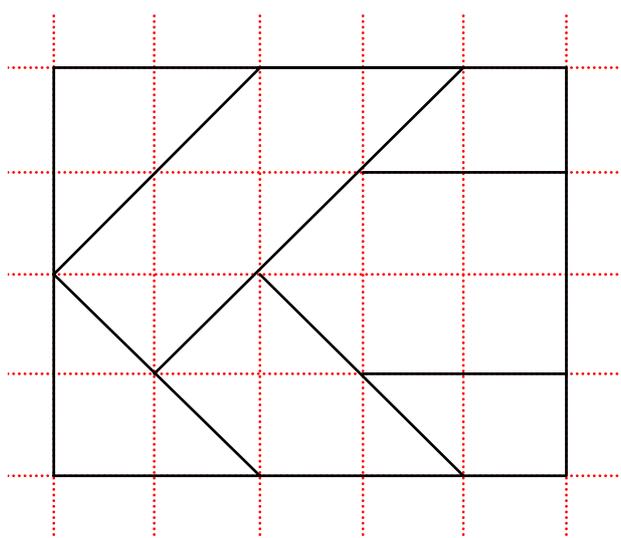
<p>Enoncé 1 :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px;"> <p style="text-align: center; font-size: small;">Utilise ce cadre pour faire tes recherches</p> $150 + 50 + 95 = 295$ </div> <p>Réponse : 295€</p>	<p>Enoncé 2 :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px;"> $\begin{array}{r} 29 \\ - 20 \\ \hline 090 \\ \div 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 29 \\ \times 9 \\ \hline 261 \\ + 261 \\ \hline 2610 \end{array}$ </div> <p>Réponse : 49...</p>
--	--

ANNEXE 2

Puzzle distribué aux élèves :



Plan de construction du puzzle (sur un quadrillage à mailles carrées) destiné uniquement au professeur.



ANNEXE 3

Fiche de travail

Noms du groupe :

1- En prenant la pièce U comme unité d'aire, déterminer l'aire de chacune des autres pièces.

2- Ranger les pièces de la plus petite à la plus grande.

3- En prenant la pièce U comme unité d'aire, déterminer l'aire totale du puzzle.

ANNEXE 4

Extrait de la liste des compétences devant être acquises en fin de cycle 3 (programme 2002)

3 - CONNAISSANCE DES FRACTIONS SIMPLES ET DES NOMBRES DECIMAUX

3.1 Fractions

- utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures de longueurs ou d'aires, une unité étant choisie, ou pour construire un segment (ou une surface) de longueur (ou d'aire) donnée;
- nommer les fractions en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième...;
- encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs;
- écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

3.2 Désignations orales et écrites des nombres décimaux

- déterminer la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position;
- passer, pour un nombre décimal, d'une écriture fractionnaire (fractions décimales) à une écriture à virgule (et réciproquement);
- utiliser les nombres décimaux pour exprimer la mesure de la longueur d'un segment, celle de l'aire d'une surface (une unité étant donnée), ou pour repérer un point sur une droite graduée régulièrement de 1 en 1;
- écrire et interpréter sous forme décimale une mesure donnée avec plusieurs unités (et réciproquement);
- produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10; 100; 1000... et 0,1; 0,01; 0,001...;
- produire des suites écrites ou orales de 0,1 en 0,1, de 0,01 en 0,01...;
- associer les désignations orales et l'écriture chiffrée d'un nombre décimal.

3.3 Ordre sur les nombres décimaux

- comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule;
- encadrer un nombre décimal par deux entiers consécutifs ou par deux nombres décimaux;
- intercaler des nombres décimaux entre deux nombres entiers consécutifs ou entre deux nombres décimaux;
- utiliser les signes <math>< ></math> pour exprimer le résultat de la comparaison de deux nombres ou d'un encadrement;
- donner une valeur approchée d'un nombre décimal à l'unité près, au dixième ou au centième près;
- situer exactement ou approximativement des nombres décimaux sur une droite graduée de 1 en 1, de 0,1 en 0,1.

3.4 Relations entre certains nombres décimaux

- connaître et utiliser des écritures fractionnaires et décimales de certains nombres : 0,1 et $\frac{1}{10}$; 0,01 et $\frac{1}{100}$; 0,5 et $\frac{1}{2}$; 0,25 et $\frac{1}{4}$, 0,75 et $\frac{3}{4}$,
- connaître et utiliser les relations entre $\frac{1}{4}$ (ou 0,25) et $\frac{1}{2}$ (ou 0,5), entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10}$; entre $\frac{1}{1000}$ et $\frac{1}{100}$.

6 - GRANDEURS ET MESURE

6.1 Longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées

- utiliser des instruments pour mesurer des objets physiques ou géométriques;
- exprimer le résultat d'un mesurage par un nombre ou un encadrement, l'unité (ou les unités) étant imposée(s) ou choisie(s) de façon appropriée;
- lire l'heure sur une montre à aiguilles ou une horloge;
- connaître les unités de mesure des durées (année, mois, semaine, jour, heure, minute, seconde) et leurs relations;
- estimer une mesure (ordre de grandeur);
- construire ou réaliser un objet dont des mesures sont données;
- connaître les unités légales du système métrique pour les longueurs (mètre, ses multiples et ses sous-multiples usités), les masses (gramme, ses multiples et ses sous-multiples usités) et les contenances (litre, ses multiples et ses sous-multiples usités),
- utiliser les équivalences entre les unités usuelles de longueur, de masse, de contenance, et effectuer des calculs simples sur les mesures, en tenant compte des relations entre les diverses unités correspondant à une même grandeur;
- utiliser le calcul pour obtenir la mesure d'une grandeur, en particulier : calculer le périmètre d'un polygone, calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final.

6.2 Aires

- classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire (par superposition, découpage et recollement ou pavage par une surface de référence);
 - construire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable);
 - différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire;
 - mesurer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (dont l'aire est prise pour unité) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement);
 - calculer l'aire d'un rectangle dont les côtés au moins sont de dimensions entières;
 - connaître et utiliser les unités usuelles (cm^2 , dm^2 , m^2 et km^2) ainsi que quelques équivalences ($1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$, $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$, $1 \text{ km}^2 = 1000000 \text{ m}^2$).
- (...)