ministère éducation nationale
ÉduSCOL [dgesco]
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Formation continue
Publications

Actes du séminaire national

Utilisation des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques

Paris, le 5 et 6 février 2007

Janvier 2008

Sommaire

Série B : le rôle de l'institution

Série C : Ressources et usages

Annexes

Ouverture des travaux

Virginie Gohin,
chef de bureau de la formation continue des enseignants, représentant Roland Debbasch, directeur général de l'Enseignement scolaire

Jacques Moisan,
doyen de l'inspection générale, groupe « mathématiques »

Virginie Gohin

J'ai l'honneur de vous remercier au nom de Roland Debbasch, directeur général de l'Enseignement scolaire, d'avoir bien voulu répondre à l'impératif aujourd'hui d'engager une réflexion officielle sur les directives à donner en matière de formation sur le rôle, les enjeux et l'utilisation des outils logiciels en mathématiques.

Cette réflexion nous a largement devancés sur le terrain. Aussi convenait-il d'inscrire au programme national de pilotage un séminaire national susceptible de faire le point sur les pratiques actuelles dans le domaine des TICE, particulièrement en mathématiques, et d'être à même par la suite d'en guider les impulsions.

Quelques éléments de contexte.

La loi du 23 avril 2005 dans son article 9 indique que : *« la scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société »*.

La maîtrise des techniques usuelles de l'information et la communication constitue l'un des piliers du socle commun de connaissances et de compétences et il s'agit aujourd'hui de faire le point sur l'utilisation des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques, tant sur le plan des contenus que des pratiques, ce que nous fera l'honneur de développer Madame le Professeur Michèle Artigue dans quelques instants.

Le décret du socle mentionne en outre un ensemble de connaissances, de capacités et d'aptitudes nécessaires à une familiarisation des élèves avec les technologies courantes, le traitement numérique de l'information et des processus automatisés, à la base du fonctionnement de la vie de tous les jours, de leur vie de tous les jours.

La circulaire de rentrée 2007 donne également une place notoire à la maîtrise des technologies de l'information et de la communication, en rappelant que le Brevet Informatique et Internet généralisé aux collèges s'étend aux lycées, mais également aux élèves et apprentis des centres de formation d'apprentis (CFA). On pourra se reporter à ce sujet à l'arrêté du 14 juin 2006 qui définit les connaissances et capacités exigibles pour le Brevet Informatique et Internet, rend obligatoire depuis la rentrée 2006 la mise en place du B2i de niveau collège et du B2i de niveau lycée. Le B2i de niveau école est déjà inscrit dans le programme de 2002 modifié par l'arrêté du 14 juin 2006.

La circulaire du 7 novembre 2006 définit les modalités de mise en œuvre de l'arrêté. Les résultats des élèves font l'objet de deux indicateurs de performance. Le premier indicateur porte sur l'acquisition du niveau 1 du B2i en fin d'école, le second sur l'acquisition du niveau 2 du B2i en fin de collège.

Le B2i de niveau collège sert de référence pour le socle commun et sera pris en compte dès 2008 dans le diplôme national du brevet. Dans cette perspective, les proviseurs de collège, ainsi que les proviseurs de lycée professionnel, doivent veiller à ce que la totalité des élèves de troisième aient été évalués en vue de l'obtention du B2i.

On ne peut donc aujourd'hui que faire le constat de la place donnée aux technologies et à leurs usages dans l'éducation par l'ensemble du système éducatif. L'inspection générale de l'éducation nationale (IGEN) et l'inspection générale de l'administration de l'éducation nationale et de la recherche (IGAENR) veillent aux enjeux de la diffusion de ces technologies et de leurs usages et accordent une attention particulière aux axes de leur pilotage.

Toutefois, le récent rapport conjoint de l'inspection générale de l'administration de l'éducation nationale et de la recherche et de l'inspection générale de l'éducation nationale du 10 mai 2006 évoque les risques de ce qu'ils appellent *« l'illusion technologique »*. Je cite cette phrase qui nous indique et nous mène sur le chemin de la vigilance : *« Le contenu fait place à la forme, la raison fait place à la communication, le savoir au pouvoir »*.

Du côté de la direction générale de l'Enseignement scolaire et du bureau de la formation continue des enseignants, que je représente aujourd'hui, une réflexion a déjà été engagée en 2005-2006 sur la question de l'influence des technologies de l'information et de la communication et sur l'évolution des disciplines, bien sûr à l'occasion de la loi sur l'école, du schéma stratégique des services d'information et de communication et du B2i.

Pour ce qui est enfin du séminaire qui nous rassemble aujourd'hui, dans le cadre bien sûr du programme national de pilotage, ce séminaire national de deux jours consacré à l'utilisation des outils logiciels dans les mathématiques s'inscrit donc – on vient de le dire – dans un contexte actif et innovant, tant au plan national qu'académique, puisque – je l'ai dit – ces dernières ont souvent devancé certaines questions qui seront soulevées aujourd'hui.

Ce séminaire se situe donc au point de convergence de deux grands axes de réflexion. Si l'on préfère, on se donne pour objectifs d'examiner, d'illustrer, de problématiser et de définir, tout d'abord, la façon dont l'institution doit replacer les usages des techniques de l'information et de la communication dans le champ des priorités nationales et spécifiquement des campagnes thématiques ; parallèlement, de réfléchir sur les concepts, les méthodes et les modèles d'organisation de notre système.

Il s'agit en effet de mettre en place l'organisation la plus harmonisée possible de l'accès aux ressources. En effet, depuis une dizaine d'années, les outils logiciels ont investi les programmes d'enseignement, et donc les pratiques dans les établissements scolaires, mais le bilan en est contrasté. L'utilisation des technologies de l'information et de la communication implique en effet une multitude d'acteurs, des équipes éducatives aux partenaires locaux et aux collectivités territoriales, et il s'agit aujourd'hui de faire le point sur le sujet, tant pour le premier degré que pour le second degré.

Il faut en outre prendre en compte la différence de rythmes d'apprentissage des élèves. On le sait, les technologies de l'information et de la communication dépassent largement les frontières de l'école. Elles font l'objet d'un apprentissage empirique par les élèves en dehors de l’école et il s’agit de faire acquérir à chaque élève les compétences qui lui permettront de les utiliser de façon réfléchie et, peut-être, plus efficace. Notre question est donc aujourd’hui : quelle formation proposer aux enseignants pour remplir cet objectif ?

Enfin, pour ce qui est des aspects pédagogiques de l’utilisation des technologies de l’information et de la communication, une série de questions se pose à nous ; vous y répondrez sûrement aujourd’hui à travers les ateliers et les tables rondes. Quelles pratiques ? Quel équilibre entre compétences opératoires et utilisation disciplinaire ? Quelle efficacité ? Quelle évaluation dans les perspectives expérimentales en acte aujourd’hui pour le lycée par exemple ? Et enfin, quelles questions problématiques centrales pour ces deux journées ? Quelle influence sur l’enseignement de la discipline mathématique voire, en guise de perspective, dans d’autres cadres disciplinaires ?

Jacques Moisan

Depuis une quinzaine d’années, l’utilisation d’outils logiciels implantés sur des ordinateurs personnels ou sur des calculatrices évoluées est recommandée dans l’enseignement des mathématiques. Tous les programmes de collège et de lycée préconisent l’utilisation de logiciels de géométrie dynamique dans le plan et dans l’espace. L’utilisation du tableur en mathématiques est inscrite dans les programmes du collège dès la classe de cinquième, ainsi que dans tous les programmes de lycée qui ont été rénovés. Les calculatrices graphiques, ou le grapheur, sont indispensables dans les classes de lycée.

Les inspecteurs ici présents savent bien que la situation dans les classes et dans les établissements est contrastée. Quelques professeurs, heureusement peu nombreux, freinent des quatre fers et refusent d’abdiquer. Ils interdisent l’usage des calculatrices et négligent les ordinateurs. D’autres, en plus grand nombre, n’assurent qu’un service minimum, invoquant un manque d’équipement, les difficultés techniques ou la lourdeur des programmes. Certains, enfin, qui sont bien représentés ici, sont dans leurs établissements, voire au-delà, les moteurs d’une utilisation raisonnée des outils logiciels.

Nous ne cacherons pas les difficultés : le manque d’équipements de quelques lycées et de nombreux collèges ou écoles, la formation des enseignants insuffisante ou, plus souvent, ancienne et inadaptée, l’absence presque totale de prise en compte dans les examens des compétences acquises par les élèves. Dans le même temps, des efforts importants ont été faits dans la mise de ressources à disposition des enseignants : actions des collectivités territoriales (souvent spécifiques pour les mathématiques), sites académiques, groupes de recherche-action des instituts de recherche sur l’enseignement des mathématiques (IREM), développement de logiciels libres.

Comme le disent les programmes, et comme nous le répétons, faire des mathématiques, c’est résoudre des problèmes. Nous voyons quelles perspectives nouvelles, passionnantes, ouvre l’utilisation de logiciels en mathématiques, dans les domaines pour nous fondamentaux : le raisonnement, la prise d’initiative, le regard critique sur l’information, l’interprétation des résultats. Nous pensons que – quand je dis *« nous »*, il s’agit du groupe mathématiques de l’inspection générale, ce n’est pas un « nous » de majesté – le moment est venu de relancer la dynamique.

La mise en place du socle commun des connaissances et des compétences, l’expérimentation d’une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat S constituent pour nous des points d’appui importants. Nous pensons que l’utilisation des outils logiciels facilite l’apprentissage des mathématiques. Nous pensons aussi qu’enseigner les mathématiques, c’est préparer les jeunes à l’utilisation des mathématiques dans la vie courante ou dans leur profession, où elle passe toujours maintenant, à quelque niveau que ce soit, par l'utilisation de logiciels. Nous pensons enfin que les mathématiques sont une des disciplines majeures pour l'appropriation par les jeunes des techniques d'information et de communication, notamment dans le cadre du Brevet Informatique et Internet (B2i).

Le but de ce séminaire est d'essayer de dégager de bons outils, de bonnes pratiques et de montrer effectivement comment l'utilisation d'ordinateurs ou de calculatrices évoluées permet de rendre plus efficace l'enseignement des mathématiques. Il est aussi de permettre une avancée de la réflexion sur la mutualisation des ressources et la formation des enseignants. Et nous devrons aussi nous interroger sur une question importante – et je crois que l'interrogation viendra vite : au-delà des changements didactiques, en quoi l'utilisation de ces outils change-t-elle le contenu même des mathématiques enseignées ?

Conférences
et tables rondes

L’influence des logiciels sur l’enseignement des mathématiques : contenus et pratiques

Michèle Artigue,
professeure des Universités, Université Paris 7 (Denis Diderot)

Les organisateurs de ce séminaire m’ont demandé d’axer ma conférence d’ouverture sur l’influence des logiciels sur les contenus de l’enseignement des mathématiques. En préparant cette conférence, il m’a semblé nécessaire de coupler cette réflexion sur les contenus avec une réflexion sur les pratiques. Je m’expliquerai sur ce point dans un instant mais ceci explique le titre, élargi, de cet exposé. Je l’ai pensé comme un exposé de cadrage se situant à un niveau assez général, sachant qu’il serait suivi tout au long du séminaire d’ateliers qui contribueraient à lui donner chair. Donc, même si j’évoque au fil de mon discours divers exemples, je privilégierai la vision d’ensemble à une analyse détaillée mais nécessairement plus locale.

J’ai organisé cet exposé en trois parties. Dans la première, j’essaierai rapidement de clarifier la question : de quelles influences s’agit-il exactement ? Comment les évaluer ? Dans la seconde, j’essaierai de dresser un panorama des influences en faisant un rapide historique de l’évolution des perspectives dans ce domaine, et en montrant comment ont joué et jouent encore aujourd’hui dans cette évolution d’une part l’évolution technologique, d’autre part l’évolution des perspectives sur l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques. Enfin dans la dernière partie, je m’interrogerai sur les rapports entre influences potentielles et influences effectives, et notamment entre les potentialités mises en évidence par l’analyse *a priori* des outils considérés ou les travaux expérimentaux les concernant et la réalité du terrain.

Précisons que, même si le titre mentionne uniquement les logiciels, c’est aux diverses technologies informatiques utilisées dans l’enseignement des mathématiques que nous nous intéressons, qu’il s’agisse de produits conçus pour l’enseignement des mathématiques comme le sont par exemple les calculatrices et les logiciels de géométrie dynamique ou de produits conçus pour un usage professionnel et convertis en outils scolaires, comme les tableurs et les logiciels de calcul symbolique. Et quand nous parlerons de techniques instrumentées c’est de techniques instrumentées par ces outils qu’il s’agira, pour les distinguer des techniques papier-crayon, ce qui ne veut pas dire bien sûr que ces dernières ne soient pas instrumentées. Elles le sont par différents artefacts, papier et crayon bien sûr, mais aussi instruments géométriques, bouliers, abaques et matériels didactiques divers.

De quelles influences est-il question et comment les évaluer ?

Il est banal d’assurer que les logiciels et plus généralement les artefacts numériques influencent l’enseignement des mathématiques. En préparant cet exposé, je me suis rapportée à la première étude sur ce thème lancée par la Commission internationale pour l’enseignement des mathématiques (ICMI). La conférence associée avait eu lieu en 1985 à Strasbourg et l’ouvrage qui en était issu a fait l’objet d’une réédition, sous l’égide de l’UNESCO en 1992, sous le titre justement : L’influence des ordinateurs et de l’informatique sur les mathématiques et leur enseignement (Cornu & Ralston, 1992). L’ouvrage approchait cette question d’influence selon trois dimensions : l’influence sur les pratiques mathématiques (sans qu’il soit ici question directement d’enseignement), l’influence sur les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, l'influence sur les curricula et la formation des maîtres. Il était souligné que l'influence sur les mathématiques et les pratiques mathématiques n'était plus à prouver mais que la situation était bien moins claire en ce qui concerne l'enseignement. L'ouvrage, annonçait la préface, présentait de nombreuses propositions d'évolutions curriculaires visant à exploiter ces nouvelles manières de faire des mathématiques, donnait de nombreux exemples d'expérimentations réussies mais, selon les auteurs, il fallait reconnaître que « toutes ces suggestions restaient fondamentalement spéculatives en ce qui concerne leur mise en place à grande échelle, c'est-à-dire dans leur conversion en un curriculum bien développé et testé, et conçu pour des enseignants ordinaires et des élèves ordinaires[1] » (p.3). Les auteurs ajoutaient que, pour dépasser ce stade, on avait besoin de développer la recherche et les expérimentations, notamment dans des contextes réalistes.

Il me semble toujours d'actualité de distinguer entre des influences potentielles telles que l'on peut les inférer d'analyses *a priori* d'outils ou de pratiques professionnelles de mathématiciens, le mot étant ici à entendre au sens large, d'influences observées dans l'enseignement, en distinguant là encore des influences observées dans des environnements écologiquement protégés comme le sont les environnements expérimentaux et des influences observées à grande échelle et notamment au niveau curriculaire d'une région ou d'un pays. Et s'agissant du niveau curriculaire, il y a là encore à distinguer entre ce que l'on appelle le curriculum visé : celui des programmes, documents d'accompagnement et instructions officielles et le curriculum réel, celui qui vit dans les classes. Le décalage entre ces deux entités est, on le sait bien, souvent important.

En décembre dernier, à Hanoi, s'est tenue la conférence associée à la seconde étude ICMI consacrée à ce thème et chargée de revisiter la première étude[2]. En 25 ans, nos connaissances ont certainement beaucoup progressé mais pour ce qui est de la réussite de projets à très large échelle, il faut avouer que la situation n'a pas considérablement évolué. On observe certes des influences indéniables un peu partout dans le monde et, par exemple, l'une des tables rondes de la conférence d'Hanoi, le « Diversity Panel» a bien montré que cette influence ne se limitait pas aux pays dits développés. On voit aussi que se posent de plus en plus des questions qui étaient absentes de la première étude, par exemple celle du contrôle que peuvent avoir les institutions sur ces influences et celle du caractère bénéfique des influences observées. A travers la façon dont sont formulées ces interrogations, se profile la question fondamentale : Qu'attend-t-on aujourd'hui de l'enseignement des mathématiques ? Jusqu'à quel point ces attentes sont-elles modifiées par les technologies existantes ? Que considère-t-on comme un progrès ? Que considère-t-on comme une régression ? Un échec ?

Je n'ai pas la prétention de répondre à ces questions dans cet exposé mais j'aimerais que nous n'oubliions pas que nos positions explicites et implicites dans ce domaine conditionnent notre perception des influences et notre évaluation de leurs effets. J'ajouterai enfin que trop souvent la vision dominante a été dans le passé que les logiciels et les calculatrices étaient de simples outils pédagogiques à mettre au service de mathématiques aux valeurs par essence universelles donc indépendantes d'eux, et que leur influence a été évaluée à la mesure de la capacité démontrée par l'institution de les mettre au service de ces valeurs. Il s'agit là, à mes yeux, d'un véritable obstacle culturel et, pour arriver à le surmonter, il me semble que, même si l'on s'intéresse plus particulièrement à l'influence de ces outils sur les contenus d'enseignement, analyser cette influence ne doit pas se faire indépendamment de celle sur les pratiques. Car notre rapport aux objets mathématiques, comme le souligne particulièrement bien Chevallard (Chevallard, 1992, 1999), et donc notre système de valeurs mathématiques, émergent de pratiques, et comprendre l'influence possible ou effective des logiciels sur

---

[1] Traduction de l'auteur.
[2] Le texte de discussion associé à cette étude est accessible sur le site de l'ICMI : www.mathunion.org/ICMI/

l’enseignement des mathématiques ne peut se faire en séparant les contenus des pratiques dans lesquelles ces contenus sont engagés. J’ai fait référence à l’approche anthropologique de Chevallard mais j’aurais pu aussi évoquer, et je le ferai dans la suite, l’approche instrumentale au développement de laquelle nous sommes plusieurs participants à ce séminaire à avoir contribué ces dix dernières années (cf. (Artigue, 2002), (Guin & Trouche, 2002) pour des visions synthétiques) en conjuguant une approche didactique et les travaux d’ergonomie cognitive de Rabardel et Vérillon (Rabardel, 1996). Un point essentiel dans cette approche est que ce que nous apprenons et non simplement la façon dont nous l’apprenons est étroitement dépendant des artefacts utilisés pour cet apprentissage (ici calculatrices et logiciels notamment). Contenus et pratiques sont donc deux entités en un sens indissociables.

Ces précisions étant apportées, je vais essayer, comme annoncé, de montrer comment les perspectives ont évolué dans ce domaine, influencées à la fois par l’évolution technologique et l’évolution des perspectives didactiques.

Des influences multiformes portées par les évolutions technologiques et didactiques

L’influence algorithmique

La première dimension qu’il me semble devoir évoquer est la dimension algorithmique. Elle est présente très tôt car ses besoins technologiques sont faibles : un langage de programmation suffit. Les calculatrices scientifiques des années 80 en sont dotées et, si l’on considère les programmes des lycées, l’influence est évidente dans la réforme de 1982. La volonté qui y est clairement affichée par exemple de rééquilibrer le quantitatif et le qualitatif dans l’enseignement de l’analyse suppose, pour sa viabilité, que l’on dispose de moyens de calcul approché, que l’on puisse programmer le calcul des valeurs successives d’une suite, la résolution approchée d’une équation ou le calcul approché d’une intégrale. L’importance qui est alors donnée à l’inégalité des accroissements finis et à son exploitation pour contrôler les résolutions approchées d’équations, attestée par les sujets de baccalauréat, participe du même mouvement.

Cette influence peut être considérée comme une influence noble et, de ce point de vue, ne pose pas de problèmes en termes de valeurs. On la retrouve préconisée vingt ans plus tard dans le rapport de la CREM[3] sur mathématiques et informatique, liée à l’ambition de dépasser la seule perspective d’une technologie outil. Après avoir clairement marqué la distinction :

« Il nous paraît important à ce stade de distinguer clairement l’utilisation des ordinateurs et calculatrices et des logiciels qui y sont implantés, d’une part et l’apprentissage des concepts de base de l’algorithmique et de la programmation, d’autre part » (Kahane, 2002) (p.31), les auteurs du rapport plaident pour l’introduction des notions de base d’algorithmique et de programmation qui vont permettre en particulier de revisiter des notions fondamentales comme celles de nombre et d’opération, d’approcher les algorithmes fondamentaux du calcul numérique, d’introduire de façon motivée de nouvelles structures telles que listes, arbres, graphes, et de les exploiter pour la compréhension de certains mécanismes, tout en développant chez l’élève et l’enseignant « une attitude active et imaginative », leur évitant « de s’en remettre pieds et poings liés au fabricant de la machine ou à l’éditeur de logiciel » (*ibidem*, p.33).

Au-delà des cautions mathématique et informatique, sur le plan des apprentissages, cette influence est soutenue par les théories dites de la réification dérivées de l’épistémologie piagétienne (Tall, 1991). Selon ces théories, la conceptualisation mathématique obéit à des

[3] CREM : Commission de réflexion sur l’enseignement des mathématiques créée en 1999 et présidée successivement par Jean-Pierre Kahane et Jean-Christophe Yoccoz.

cycles ou plutôt des spirales organisées autour de la triade « action – processus – objet ». Un des exemples les plus connus est l'APOS théorie initiée par le mathématicien Dubinsky (Dubinsky, 1991), (Dubinsky & Mac Donald, 2001). La programmation dans un langage adapté y est vue comme le moyen de soutenir la transition d'actions opérées sur des objets vers des processus. Elle soutient ensuite l'encapsulation de processus en objets qui sont réinvestissables dans de nouveaux processus comme, par exemple, lorsque des programmes associés à des fonctions particulières sont utilisés dans des programmes plus généraux qui en testent certaines propriétés. Dubinsky a développé un langage (ISETL) spécifiquement adapté au langage mathématique pour soutenir ces abstractions successives. C'est un langage qui permet de manipuler des ensembles, d'effectuer des quantifications sur des ensembles finis avec une syntaxe proche de la syntaxe mathématique. Dans les diverses expérimentations menées, il a été utilisé notamment pour l'apprentissage des fonctions et des structures algébriques.

Mais il faut aussi avouer que cette influence est restée au cours des deux dernières décennies relativement marginale dans l'enseignement secondaire, comme souligné dans le rapport de la CREM déjà cité, et que l'évolution technologique elle-même a tendu à la limiter en donnant progressivement accès directement à des résultats qui n'étaient au départ accessibles que via la programmation, en particulier en analyse. Toutes les calculatrices scientifiques disposent ainsi aujourd'hui de commandes permettant la résolution approchée d'équations ou le calcul approché d'intégrales, pour ne citer que ces deux exemples déjà mentionnés.

Si les logiciels ont influencé les contenus et pratiques de l'enseignement des mathématiques, c'est en fait davantage jusqu'ici en tant qu'outils de visualisation, de réification et manipulation directe d'objets mathématiques, de calcul au sens large et de simulation. Ce sont donc ces influences que nous allons considérer maintenant.

Visualisation, diversité sémiotique, manipulation directe et simulation

Un premier exemple : visualisation et enseignement des équations différentielles

Très vite pour moi, en tant qu'enseignante dans le supérieur, c'est à travers les possibilités de visualisation qu'offraient les interfaces graphiques qui se généralisaient, que les logiciels ont influé sur les contenus de mon enseignement. Ils m'ont permis en particulier avec des étudiants de première année de rompre avec un enseignement des équations différentielles qui ne prenait en compte que la résolution algébrique pour introduire une initiation à l'approche qualitative, de leur faire sentir comment la donnée d'un champ de tangentes conditionnait physiquement le tracé et de leur faire sentir aussi en quoi la méthode d'Euler se différenciait des méthodes d'approximations de courbes par des lignes brisées qui leur étaient jusqu'alors familières (Artigue, 1989). A l'époque, nous avions dû développer des logiciels ad hoc pour visualiser les champs de tangentes, et obtenir le tracé de solutions approchées, des conditions initiales étant données. Aujourd'hui ces visualisations sont accessibles sur toutes les calculatrices symboliques (cf. figure 1). Dans ce domaine, comme pour tout ce qui concerne plus généralement les systèmes dynamiques, la technologie a rendu viable un enseignement qui soit plus conforme à l'épistémologie actuelle du domaine.

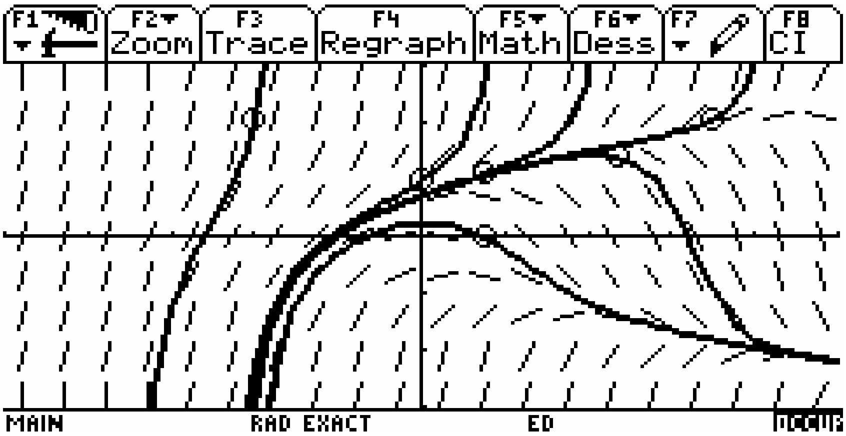


Figure 1 : Champ de tangentes et solutions de $y'=y^2-x$ sur une calculatrice TI92

Jusqu'à quel point cela a-t-il influencé les programmes et les pratiques d'enseignement effectives ? Nos premières expériences étaient très locales et elles n'ont pas essaimé facilement. Dans beaucoup d'universités encore aujourd'hui, l'enseignement des équations différentielles en première année, même s'il a évolué, reste essentiellement algébrique. Nous avions analysé à l'époque ce qui rendait difficile l'évolution (Artigue, 1992). Un élément important était le statut nouveau qu'il fallait donner, si l'on voulait s'adresser à des étudiants débutants, au registre graphique comme support de raisonnement et de preuve au-delà de son statut usuel de représentation, et les conflits que cette évolution générait. En fait, la suite l'a prouvé en France mais peut-être plus encore à l'étranger, c'est dans les enseignements où la pression mathématique était la moins forte que ces approches pouvaient le plus facilement vivre, en particulier dans des enseignements de mathématiques pour des non spécialistes.

C'est aussi le cas dans le secondaire mais les équations différentielles n'y constituent qu'une petite part de l'enseignement, même en terminale S, et c'est plutôt au niveau de l'enseignement des fonctions plus généralement que l'on peut donc mesurer l'impact de la visualisation en analyse. Il se traduit pas une attention accrue portée dans les contenus et les pratiques aux interactions entre cadres et entre registres de représentation (Douady, 1986), (Duval, 1995), et c'est cette influence que nous allons discuter, à partir d'un exemple, dans le paragraphe suivant.

Interactions entre cadres et registres de représentation sémiotique : le cas des fonctions

Comme dans d'autres domaines mathématiques, dans l'enseignement des fonctions, calculatrices et logiciels ont été mis au service de démarches expérimentales dans lesquelles l'interaction entre les différents cadres : numérique, algébrique, géométrique, entre les différents registres de représentation : registre graphique, registre des tables de valeurs et registre symbolique, jouent un rôle essentiel. Ceci ne s'est pas nécessairement traduit par l'introduction de nouveaux contenus même s'il en existe (citons par exemple la méthode d'Euler introduite en première, pour faire un lien avec ce qui précède) mais, même sur des contenus classiques comme la notion de dérivée, les influences sont évidentes. Je voudrais ici prendre un exemple issu de la thèse de Maschietto (Maschietto, 2002) qui s'était elle-même inspirée des travaux que nous avions menés en première S avec des calculatrices symboliques (Artigue & al, 1998).

Les possibilités de zooms offertes par les calculatrices et logiciels rendent très facilement visible le fait que, pour beaucoup de représentations graphiques de fonctions, si l'on centre progressivement le regard au voisinage d'un point, on finit par voir un segment de droite. Le processus qui conduit à la tangente à la courbe au point considéré est mathématiquement un processus infini, engageant un passage à la limite, mais les caractéristiques graphiques des écrans rendent le phénomène de linéarisation locale visible, « à distance finie ». C'est cette caractéristique de l'implémentation informatique qui a été, dès le début, exploitée par D. Tall et l'a conduit à la notion de tangente pratique (Tall, 1991). Ce sont les visualisations associées que l'on retrouve dans de nombreux ouvrages concernant l'utilisation de calculatrices graphiques dans l'enseignement de l'analyse et, maintenant, dans de nombreux manuels de lycée. Elles nous sont devenues familières.

Ce qui est moins souligné, ce sont les limites de cette visualisation. Très souvent, dans les exemples choisis, la tangente au point considéré a une équation simple avec des coefficients, en particulier le coefficient directeur, entiers, et les approximations numériques de la calculatrice ou du logiciel conduisent, pour un agrandissement suffisant ou un pas assez petit, à l'affichage d'une équation, pour la droite tracée, qui est celle de la tangente. Ceci permet de laisser planer l'ambiguïté sur la nature réelle de l'objet qui apparaît à l'écran et de le confondre avec la tangente. C'est sans doute une solution confortable pour l'enseignant et qui ne gêne en rien les élèves, d'autant plus que généralement, cette visualisation fonctionne juste comme une entrée en matière et que l'on s'engage très vite dans un travail plus classique sur les dérivées. Mais, dans une culture où l'image est aussi omniprésente et aussi valorisée, une telle attitude nous semble tout à fait dommageable. Il importe en effet d'apprendre à distinguer ce que l'on voudrait que les images nous montrent de ce qu'elles nous montrent réellement, et les mathématiques, dans ce domaine comme dans bien d'autres, ont un rôle important à jouer. Dans le cas qui nous intéresse ici, la visualisation nous montre la proximité locale avec une fonction affine, elle ne nous montre pas ce qui particularise la tangente, à savoir d'être la seule droite à offrir une proximité d'ordre 1.

La recherche de Maschietto s'attache justement à cette question en étudiant les possibilités offertes par le mouvement de zoom pour faire vivre, dès le début de l'enseignement de l'analyse, le jeu local-global au cœur de ce domaine. Le scénario didactique qui en résulte consiste à proposer dans un premier temps aux élèves d'explorer, par des zooms successifs, un certain nombre de fonctions, au voisinage de différents points et de représenter ce qu'ils obtiennent en précisant les fenêtres correspondantes (dans la fenêtre standard, après un zoom, puis quand ils décident d'arrêter le processus). Les fonctions choisies privilégient les fonctions partout dérivables mais font rencontrer aussi points anguleux et situations plus complexes. L'expérimentation, répétée dans plusieurs classes, montre que le phénomène de linéarité locale est rapidement découvert par les élèves et alors anticipé lorsqu'ils explorent une nouvelle fonction. Pour les cas qui y échappent, ils reprennent les zooms, convaincus au départ de s'être sans doute trompés. On voit aussi, à travers le langage qu'ils utilisent et les gestes qui l'accompagnent, que, même si au bout de quelques zooms seulement le tracé devient droit, les élèves cherchent à maintenir la distance entre les deux types d'objets : l'objet courbe et l'objet droit qui, pour eux, ne relèvent pas des mêmes catégories. Dans le scénario, une fonction et un point particuliers sont ensuite choisis pour mathématiser l'invariant observé. Il s'agit de déterminer la droite vers laquelle tend la courbe. Il est demandé à chaque élève de proposer une équation pour cette dernière. Comme les fenêtres sur lesquelles s'arrêtent les élèves n'ont pas de raison d'être identiques, comme les points choisis avec l'option trace pour déterminer l'équation de la droite n'ont pas de raison d'être identiques, les équations n'ont pas de raison de l'être non plus, surtout que les élèves n'hésitent pas à recopier les décimales des coefficients obtenus avec l'aide de la calculatrice (cf. figure 2). Et c'est à travers la confrontation de ces équations, en cherchant ce qui les rapproche et en unifiant, via la symbolisation algébrique, les calculs sous-jacents que, dans une phase de discussion collective orchestrée par l'enseignant, s'organise le questionnement de la perception et qu'est mené le travail de mathématisation. Cette recherche, comme celle que nous avions menée, confirme bien l'accessibilité du point de vue local et du travail de mathématisation associé à des élèves débutant en analyse dans l'environnement technologique choisi.

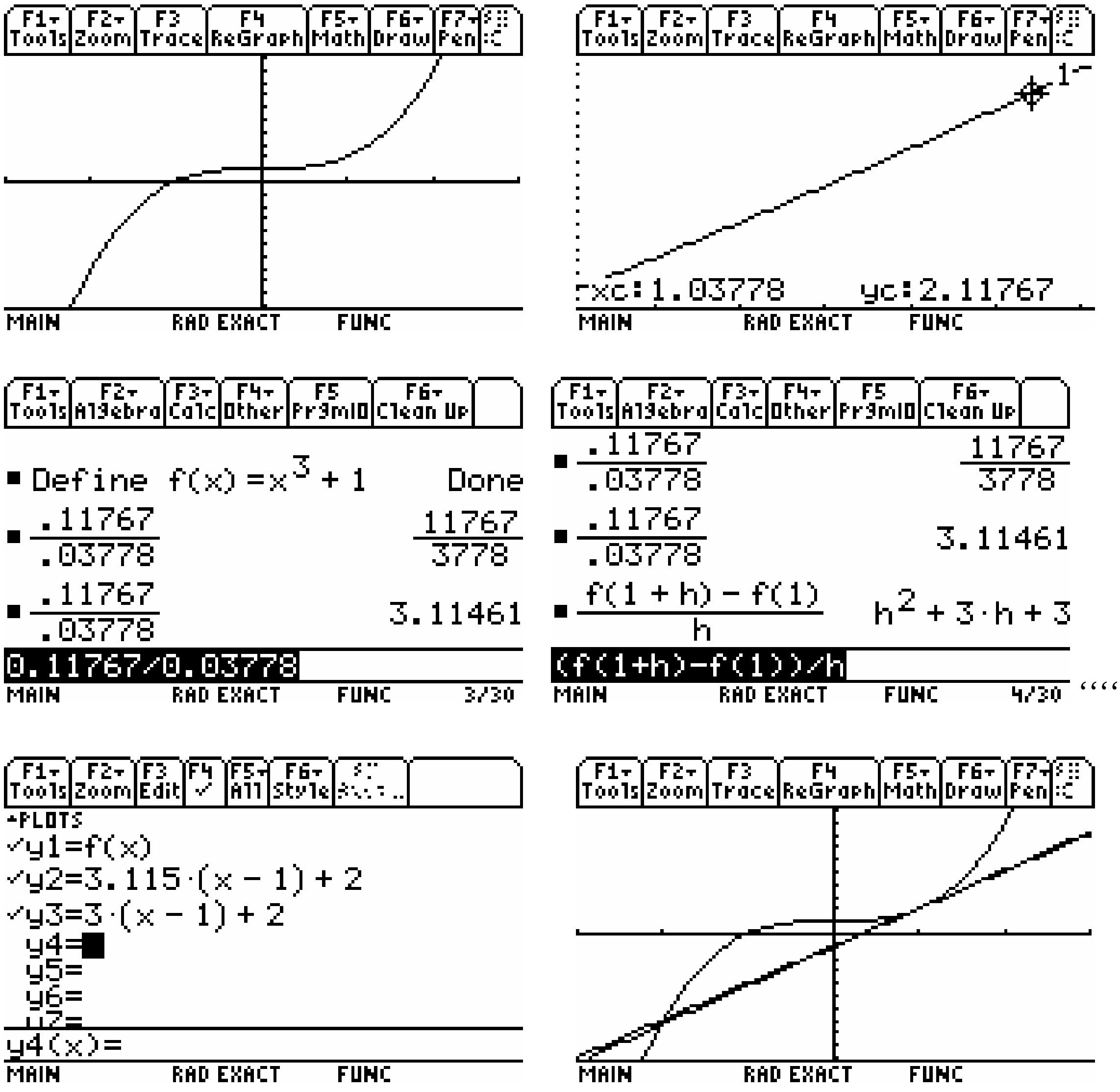


Figure 2 : Exploration et mathématisation du phénomène de linéarité locale

Encore une fois, ces influences ont une légitimation cognitive bien mise en évidence par les recherches qui se sont développées au cours de la dernière décennie sur les registres de représentation et plus généralement les systèmes sémiotiques (en incluant dans ces derniers le langage oral et les gestes) et leur rôle dans les processus de conceptualisation en mathématiques (cf. par exemple (Sáenz-Ludlow & Presmeg, 2006) pour une synthèse des travaux du groupe international PME[4] dans ce domaine). Les travaux de Duval dans ce domaine ont joué en France un rôle pionnier. Comme l'exprime le titre même de l'ouvrage déjà cité qu'il a publié en 1995, il n'y a pas de *noesis* donc de conceptualisation sans *semiosis*, c'est à dire sans élaboration de systèmes de représentation ; la représentation n'est pas l'aboutissement, le résultat de l'apprentissage, elle en est partie intégrante, et l'objet mathématique n'existe pas tant qu'il est attaché à un seul registre de représentation.

L'influence sur les contenus et les pratiques s'opère également via la possibilité qu'offre la technologie de réifier les objets mathématiques, certaines de leurs propriétés et des relations qui les lient et d'opérer sur ces réifications. C'est la philosophie des micromondes que nous allons envisager dans le paragraphe suivant.

[4] PME : Psychology of Mathematics Education.

Les micromondes : de Logo aux logiciels de géométrie dynamique

Le premier exemple en a été Logo. Bien qu'il ait été largement diffusé en France dans le cadre du plan « Informatique pour tous » de 1985, il n'y a cependant eu qu'une influence limitée sur l'enseignement des mathématiques et la France ne fait pas exception dans ce domaine. L'analyse qui en est souvent faite aujourd'hui au niveau international est que Logo était porteur d'une philosophie radicalement nouvelle de l'apprentissage : le constructionnisme (Papert, 1980, 1991) mais que cette philosophie n'était pas soutenue par un ensemble de textes et de ressources pour les enseignants susceptibles de lui donner corps. En dépit de recherches et de développements très intéressants qui d'ailleurs se poursuivent toujours à l'étranger (Noss & Hoyles, 1996), (Di Sessa, 2000), les usages effectifs dans le cadre du plan Informatique pour tous se sont assez souvent réduits à des activités plutôt ludiques ne s'inscrivant pas dans un projet clair d'apprentissage et ils se sont assez rapidement effondrés.

Dans le cas de Logo, la manipulation passe par un langage de programmation alors que les logiciels de géométrie dynamique qui constituent aujourd'hui les micromondes qui ont le plus pénétré le monde de l'enseignement mathématique internationalement sont de plus en plus basés sur la manipulation directe. Il n'est pas évident que les logiciels de géométrie dynamique aient profondément changé les programmes de géométrie dans quelque pays que ce soit. En revanche, il est clair qu'ils ont changé profondément les pratiques géométriques de ceux qui les utilisent régulièrement.

Dans l'enseignement, on a mis souvent en avant le rôle de l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique pour disqualifier des constructions faites sur la base de la seule perception et permettre la transition d'une appréhension perceptive des figures vers une appréhension géométrique. Je voudrais insister ici sur le fait qu'il s'agit là d'une vision très limitée de l'influence que peut avoir un logiciel de géométrie dynamique sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. En témoignent les distinctions qui ont été récemment introduites par les chercheurs (cf. par exemple (Hölzl, 1996), (Healy, 2000)) pour rendre compte des différents usages de la commande de déplacement des objets ou encore de la notion de *construction molle* : une construction qui est partiellement géométrique mais s'autorise des ajustements pour satisfaire simultanément plusieurs contraintes.

Par exemple, (Arzarello & al., 2002) décrit le cas d'élèves de début du collège cherchant à déterminer dans l'environnement Cabri-géomètre tous les triangles ABC pour lesquels il existe un point P du segment [BC] tel que les deux triangles APB et APC soient isocèles. Il existe plusieurs façons de réaliser cette condition mais les élèves commencent souvent par choisir P au milieu de [BC] et ensuite cherchent à avoir BP=AP=PC. Ils font afficher les mesures des segments et déplacent le sommet A du triangle dont ils sont partis jusqu'à réaliser l'égalité. Une fois cette égalité réalisée une ou plusieurs fois par tâtonnement, on les voit essayer de systématiser la recherche, par exemple en déplaçant le point A au voisinage d'une position gagnante de manière à conserver la propriété et, soit marquer des points, soit utiliser la commande trace pour visualiser la trajectoire qui semble se dessiner pour le point A (figure 3). Cette trajectoire hésitante car, pratiquement, la tâche n'a rien d'évident peut les conduire à conjecturer que la propriété restera satisfaite si A reste sur un cercle ou un arc de cercle et à essayer de déterminer ce dernier.

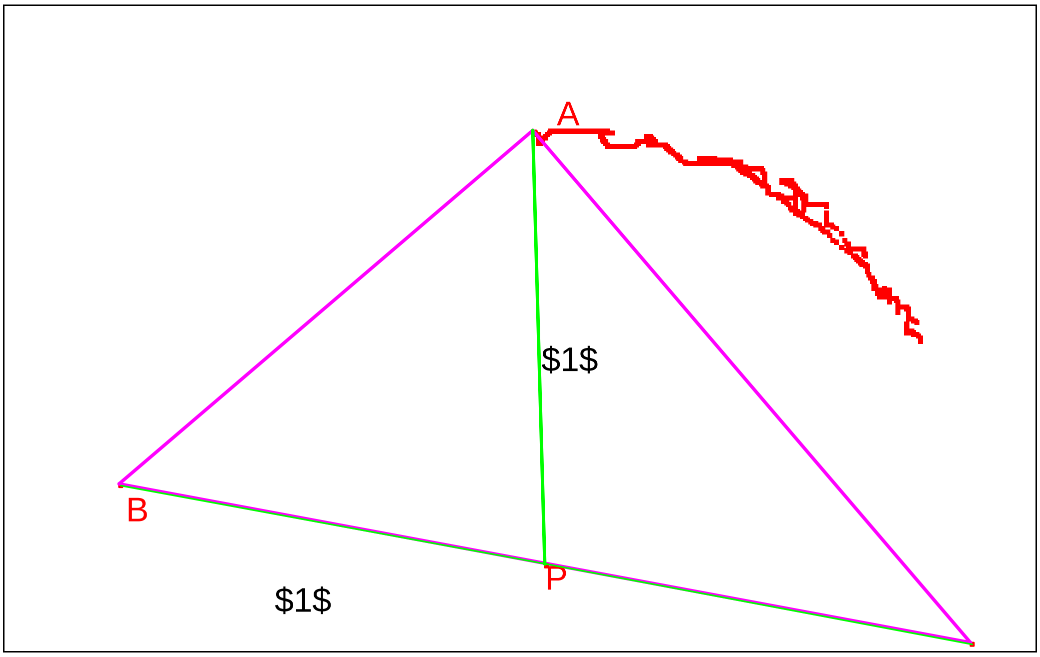


Figure 3 : Utilisation de la commande Trace pour visualiser des positions possibles de A

Une fois le cercle tracé, certains assujettissent A à se déplacer dessus pour tester la conjecture faite. D'autres ont repéré que dans les points A satisfaisant la condition et trouvés au hasard, l'angle de sommet A du triangle semblait un angle droit et c'est cette condition qu'ils cherchent à préserver dans le déplacement après avoir fait afficher la valeur de l'angle pour tester la conjecture associée. Dans cette exploration du problème, les constructions ont mêlé tracés géométriques et ajustements, les déplacements ont pris des formes et des fonctions diverses, de l'exploration tâtonnante à l'élaboration de conjectures puis à leur contrôle. L'auteur insiste par ailleurs sur la continuité que l'on observe dans les comportements des élèves entre exploration et preuve dans la résolution d'un tel problème, contrairement à l'affirmation fréquente selon laquelle l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique ferait obstacle à la démonstration. Cette continuité se traduit par des mouvements ascendants et descendants, des processus de déduction et des processus d'abduction, et son existence n'est pas indépendante des caractéristiques de la tâche proposée. Il insiste aussi sur l'importance du rôle de l'enseignant pour développer une culture de géométrie dynamique qui rende une situation comme celle-ci cognitivement productive et pour la gérer de façon efficace, en laissant se développer la richesse des explorations et en soutenant la continuité entre exploration et preuve.

Avant de passer aux points suivants, je voudrais souligner que réification et manipulation directe ne sont pas l'apanage de la géométrie. Depuis plus de quinze ans maintenant, des travaux de recherche sont développés pour donner accès via des commandes sensori-motrices aux notions de vitesse et d'accélération à de jeunes élèves qui ne peuvent accéder à ces notions à travers les outils usuels de l'algèbre et de l'analyse (Nemirovski & Borba, 2004). Des adaptations de ces dispositifs sont aujourd'hui implémentées dans les calculatrices via des systèmes de capteurs et elles commencent à influencer l'enseignement de ces notions en France, en particulier en lycée professionnel.

Simulation

L'influence technologique sur l'enseignement des mathématiques comme sur les mathématiques elles-mêmes passe de plus en plus par la simulation, une simulation qui permet d'explorer, de se familiariser avec des situations qui ne sont pas directement accessibles à une résolution exacte ou approchée, au moins au niveau d'enseignement considéré, de mettre en évidence des régularités et aujourd'hui, à travers des systèmes multi-agents, de montrer comment des structures collectives peuvent émerger de règles de comportement locales (Wilenski, 2003).

En France, c'est à travers les statistiques que la simulation a réellement fait son entrée dans l'enseignement secondaire, et là d'emblée à grande échelle, avec les nouveaux programmes du lycée en seconde. Les calculatrices et les tableurs ont été les deux technologies principalement utilisées pour cela et les documents d'accompagnement des nouveaux programmes ont essayé d'outiller les enseignants face à ce renouvellement profond de l'enseignement des statistiques. Nous en aurons des exemples au cours de ce séminaire dans les ateliers. Mais je voudrais souligner deux choses :

1) que l'influence technologique sur l'enseignement des statistiques d'une part dépasse la seule simulation. L'accès à des bases de données substantielles, intégré ou non à des logiciels éducatifs, fait peu à peu sortir l'enseignement des statistiques de la seule considération de populations de taille ridicule, attachées à un enseignement des statistiques sans technologie informatique ou avec un technologie limitée ;
2) que les statistiques sont peut-être le domaine où, internationalement, l'influence de la technologie sur l'enseignement des mathématiques a été la plus forte. C'est une des ambitions de l'étude ICMI en cours sur l'enseignement des statistiques d'étudier où l'on en est exactement dans ce domaine[5].

L'influence sur le calcul : logiciels de calcul symbolique et tableurs

J'ai gardé le calcul pour la fin de ce panorama, non que je considère le calcul comme moins important que ce qui précède mais parce que se concentrer sur lui d'emblée aurait pu faire disparaître toutes les autres dimensions. Il ne fait pas de doute que si les technologies informatiques ont influencé l'enseignement des mathématiques, c'est d'abord à travers le calcul, et l'actualité récente nous a bien montré comment, encore aujourd'hui, cette influence est mal acceptée, combien il est difficile de s'interroger sans émoi sur ce que notre société attend des élèves en matière de calcul. Il n'est pas dans mon intention de rentrer dans ce type de débat aujourd'hui. Mais je voudrais utiliser ce thème pour soulever un certain nombre de questions qui assureront également la transition avec la dernière partie de mon exposé. J'ai associé ici logiciels de calcul symbolique ou CAS et tableurs. Ceci peut paraître *a priori* étrange, car ces deux technologies sont très différentes. Ce qui les rapproche, c'est qu'il s'agit dans les deux cas, contrairement à toutes les technologies évoquées jusqu'ici, de technologies professionnelles, non conçues pour l'enseignement primaire ou secondaire mais importées par cet enseignement. Ce n'est pas un hasard si c'est de recherches sur l'intégration des CAS qu'est née une sensibilité aux questions d'instrumentation qui traverse aujourd'hui l'ensemble des recherches dédiées à la technologie en didactique des mathématiques, comme l'a bien montré la conférence ICMI d'Hanoi déjà citée. C'est aussi que toutes les deux instrumentent, bien que de façon différente, directement le calcul et que la comparaison de la façon dont elles instrumentent respectivement ce calcul est tout à fait éclairante.

Ces deux technologies sont différemment intégrées institutionnellement. Le tableur fait officiellement partie des programmes dès le collège. Il intervient non seulement en mathématiques mais aussi dans d'autres disciplines et notamment en technologie. Il occupe une place particulièrement importante dans le programme de la série L mais est cité dans les programmes de toutes les séries. Les logiciels de calcul symbolique sont mentionnés dans les programmes mais de façon beaucoup plus discrète. Leur usage n'est en rien obligatoire et il est recommandé plus tard dans la scolarité. Leur influence est de ce fait nécessairement plus limitée même si leur usage au baccalauréat est autorisé. Mais ce sur quoi je voudrais insister ici, c'est que ces deux technologies nourrissent des rapports très différents au calcul, ce qui

[5] Le document de discussion associé à cette étude est lui aussi accessible sur le site d'ICMI.

nous renvoie à la question des valeurs que j'évoquais au début de cet exposé. Je prendrai pour cela l'exemple de l'algèbre.

Comme l'ont bien montré les travaux de recherche, en France comme à l'étranger, le tableur nous propose un monde intermédiaire entre arithmétique et algèbre (cf. (Kieran & Yerushalmy, 2004) pour une vision synthétique). Il est algébrique par son langage, il est arithmétique dans sa manière d'organiser le travail mathématique, en allant du connu vers l'inconnu, en permettant le recours à la démarche analytique. Ce n'est pas un hasard si l'on utilise dans divers pays le tableur pour réconcilier avec l'algèbre des élèves qui semblent définitivement fâchés avec ce domaine, et si c'est en série L que le tableur a été si lourdement introduit. On peut voir dans le tableur un outil permettant de limiter les besoins algébriques dans la résolution de problèmes qui traditionnellement relèvent de l'algèbre.

Les logiciels de calcul formel n'ont rien à voir avec ce monde. Le monde algébrique qu'ils nous proposent est un monde puissant mais aussi exigeant. Comprendre suffisamment comment sont représentés les nombres et expressions pour pouvoir piloter les calculs qui les engagent nécessite des apprentissages spécifiques, et la diversité des formes automatiquement produites par le logiciel fait facilement sortir de l'espace des formes conventionnellement rencontrées au niveau du lycée (Guin & Trouche, 2002). Une genèse instrumentale s'impose, différente de celle nécessitée par le tableur, et mathématiquement plus exigeante. Décider d'intégrer les CAS à large échelle, au-delà des environnements expérimentaux où l'on a montré que ceci était possible et réellement profitable aux apprentissages, suppose que cette genèse instrumentale soit institutionnellement prise en charge et que les enseignants, après y avoir été sensibilisés, disposent de ressources adéquates pour la piloter. Il ne semble pas que nous en soyons là actuellement.

Ceci m'amène à la dernière partie de mon exposé où je souhaiterais aborder la question du passage d'influences potentielles au sens large à des influences effectives dans le quotidien des classes.

Des influences potentielles aux influences effectives

Entre influences potentielles, identifiées par des analyses *a priori* ou à travers expérimentations et innovations, et influences effectives le décalage est on le sait important, dans ce domaine comme dans bien d'autres. L'inscription dans les programmes de l'obligation d'utiliser telle ou telle technologie, dans tel et tel contexte notamment et avec telle et telle ambition, ne suffit pas à produire des influences effectives et à les contrôler et il faut souligner que l'incitation, l'obligation, ne donnent pas en elles-mêmes les moyens d'usages pertinents. Elles ne résolvent pas des conflits de valeurs qui souvent restent non explicités. Et les ressources qui sont fournies aux enseignants, pour riches et intéressantes qu'elles soient, sont souvent des ressources ponctuelles, isolées, qui ne suffisent pas à organiser dans la durée l'articulation cohérente d'une progression mathématique et instrumentale. Haspekian, qui a analysé dans sa thèse (Haspekian, 2005) les ressources tableur du site Educnet pour la scolarité obligatoire, l'a bien mis en évidence pour cette technologie. De façon comparable, dans une thèse soutenue très récemment, Tapan (Tapan, 2006) a montré que la façon dont les textes officiels présentaient l'intégration de logiciels de géométrie dynamique au collège s'en tenait à un discours très général. La compréhension de ce que met en jeu le déplacement des objets présentant un ou deux degrés de liberté, fondamentale dans l'utilisation de ces logiciels, y semble aller de soi. Or, divers travaux de recherche nous montrent aujourd'hui que ce n'est nullement le cas pour des élèves de début de collège (Soury-Lavergne, 2006). Comprendre ce que le déplacement permet de contrôler est déjà une conquête géométrique et instrumentale.

De nombreux travaux, en France comme à l'étranger, montrent par ailleurs que les usages qui semblent les premiers accessibles aux enseignants ne sont pas ceux qui tirent le mieux parti des potentialités pour l'apprentissage des technologies considérées (Laborde, 2001), (Monaghan, 2004). Proposant, d'une part, à des enseignants débutants, d'autre part, à des formateurs des situations utilisant le tableur volontairement contrastées quant à leur intérêt pour l'apprentissage, Haspekian, dans sa thèse déjà citée, a, par exemple, montré que systématiquement les choix des premiers, tout en étant argumentés, étaient opposés aux choix des seconds qui, eux, correspondaient à ceux que sa recherche conduisait elle-même à effectuer. L'influence sur les contenus et les pratiques, même quand elle est réelle, est donc loin d'être systématiquement celle attendue et souhaitée. La tendance observée et bien compréhensible consiste à utiliser les outils technologiques juste pour leur valeur pragmatique : produire rapidement et facilement des résultats dans des tâches qui se différencient peu de celles traditionnellement pensées pour l'environnement papier/crayon, au détriment de leur valeur épistémique : aider à comprendre les objets mathématiques mis en jeu (Artigue, 2002). Comme les recherches concourent à le montrer, une telle attitude ne permet pas de tirer le meilleur parti de la technologie pour l'apprentissage des mathématiques ; elle ne permet pas que s'exprime dans l'enseignement des mathématiques la puissance épistémique des techniques instrumentées car celle-ci passe souvent par la construction de tâches qui n'ont pas d'analogue direct dans l'environnement papier/crayon et, pour les tâches qui sont *a priori* envisageables dans cet environnement, par une véritable reconstruction des scénarios didactiques associés. La pente naturelle des usages nous semble, de ce fait, contribuer fortement aux décalages observés entre attentes et réalisations effectives.

Arriver à surmonter ces obstacles demande de penser les usages de la technologie dans la durée, la progression dans le temps des connaissances instrumentales et mathématiques ainsi que les institutionnalisations associées, les rapports à construire et à faire évoluer entre techniques papier-crayon et techniques instrumentées. Il impose de mettre en place une formation des enseignants qui prenne en charge ces difficultés et propose des dynamiques d'évolution raisonnables. Il impose de développer des ressources moins ponctuelles que celles qui dominent aujourd'hui et suffisamment explicites. Ceci, tout en sachant qu'il nous faudra rouvrir régulièrement la réflexion sur ce que nous attendons exactement de l'enseignement des mathématiques et que les réponses que nous pouvons apporter aujourd'hui ne peuvent avoir qu'une durée de vie limitée. Nous mesurons mieux aujourd'hui la tâche à accomplir et nous sommes certainement bien mieux armés pour y faire face que nous ne l'étions il y a dix ans. Mais, le travail à accomplir pour parvenir à une intégration des technologies informatiques qui serve efficacement la cause de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques reste énorme.

Références :

Artigue M. (1989). Une recherche d'ingénierie sur l'enseignement des équations différentielles en DEUG première année. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. IMAG, Grenoble.

Artigue M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices. In, E. Dubinski & G. Harel (eds), *The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy*, p. 109-132. MAA Notes n°25. Mathematical Association of America.

Artigue M., Defouad B., Dupérier M., Juge G., Lagrange J.B. (1998), L'intégration de calculatrices complexes à l'enseignement des mathématiques au lycée, *Cahier DIDIREM spécial n° 5,* Edition IREM Paris 7.

Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, n°7, 245-274.

Arzarello F. Olivera F., Paola D., Robutti O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34/3, 66-71.*

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 77-111.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19/2, 221-265.

Cornu B, & Ralston A. (eds) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Science and Technology Education. Document Series 44. Paris : UNESCO.

diSessa A.A. (2000). *Changing Minds: Computers, Learning and Literacy*. Cambridge MA: MIT Press.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-32.

Dubinsky E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky E., Mc Donald M. (2001). APOS : a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Duval R. (1995). *Semiosis et Pensée Humaine*. Paris : Peter Lang.

Guin D. & Trouche L. (eds). (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Haspekian, M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs.* Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris 7.

Healy L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationships : Interaction with robust and soft Cabri construction. Proceedings of PME 24, vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima, Japan.

Hölzl R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 1, 169-187.

Kahane J.P. (ed.) (2002). *Les Sciences Mathématiques.* Paris : Odile Jacob.

Kieran C. & Yerushalmy M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In, K. Stacey, H. Chick and M. Kendal (eds), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*, pp. 95-152. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Laborde C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6/3, 283-317.

Maschietto M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : une introduction au jeu local-global dans l'environnement de calculatrices.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Monaghan J. (2004). Teachers' Activities in Technology-based Mathematics Lessons. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9/3, 327-357.

Nemirovsky R. & Borba M. (eds) (2004). Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning. PME Special Issue. *Educational Studies in Mathematics*, 57/3.

Noss R. & Hoyles C. (1996). Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Papert S. (1980). *Mindstorms: Chidren, Computers and Powerful Ideas.* New York: Basic Books.

Papert S. (1991). Situating constructionism. In, I. Harel & S. Papert (eds), *Constructionism*, pp. 1-12. Norwood, NJ : Ablex Publishing Corp.

Rabardel P. (1996). *L'homme et les outils contemporains.* Paris : A. Colin.

Saenz-Ludlow A. & Presmeg N. (eds) (2006). Semiotic Perspectives in Mathematics Education. A PME Special Issue. *Educational Studies in Mathematics*, 61/1-2.

Soury-Lavergne (2006). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-Géomètre. Actes du Colloque EMF 2006, Sherbrooke, mai 2006 (à paraître).

Tall D. (ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Tapan M.S. (2006). *Différents types de savoirs mis en oeuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Wilensky U. (eds). (2003). Special Issue on Agent-Based Modeling. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8/1.

Apprentissage des mathématiques avec les TICE. Enjeux didactiques et évolutions

table ronde animée par
Bernard Parzysz, professeur émérite des Universités, IUFM d'Orléans-Tours

Participants :
Anne-Marie Bardi, inspectrice générale, groupe mathématiques
Georges-Louis Baron, professeur des Universités (Paris V)
Jean-Louis Durpaire, inspecteur général, groupe enseignement primaire

Au cours de cette table ronde plusieurs thèmes ont été successivement passés en revue. Tout d'abord un rappel historique a été fait sur l'intégration des technologies dans l'enseignement primaire et secondaire et un état des lieux, puis la question de l'articulation des technologies avec la discipline, ainsi que celle de l'évaluation des compétences acquises par les élèves, ont été abordées, et enfin, un regard prospectif sur l'évolution prévisible des rapports entre les mathématiques et les technologies utilisées dans leur enseignement a été esquissé par les intervenants.

Bernard Parzysz. *Pouvez-vous, pour commencer, chacun pour ce qui vous concerne, faire un point rapide sur l'évolution historique de l'intégration des TICE dans l'enseignement secondaire des mathématiques ? En particulier, quelles ont été – et quelles sont – les incitations institutionnelles (rôle des programmes, des corps d'inspection), les obstacles (réels ou invoqués), les modes d'accompagnement ?*

Anne-Marie Bardi. Pour ce qui concerne l'enseignement secondaire, on pourrait aussi dire : de « l'informatique scolaire » aux « TICE ». Je propose un retour sur les trente dernières années, sous forme de rapides « flash-back », tant il est vrai que c'est dans un temps long que ces phénomènes sont à considérer.

1977 : 58 lycées, des mini-ordinateurs avec écran en noir et blanc, non graphique.

Un objectif : développer chez les élèves une démarche de pensée « algorithmique et modélisante ». Pour cela un langage de programmation français, créé pour l'éducation et que les élèves utilisent assez simplement. Des usages pédagogiques déjà larges : des exerciseurs avec ou sans analyse de réponse (résolution d'équation du second degré, dérivation) ; des tables traçantes pour observer des familles de courbes (c'était la grande époque des paramètres) ; des jeux mathématiques (la « course à 20 » par exemple). Mais aussi Logo (qui a surtout conquis le premier degré) ; apparaissaient également des calculatrices de type « moulin à café » au collège.

1987 : des PC dans les lycées, des TO7 et MO5, des nanoréseaux, de la couleur et des graphiques. L'ordinateur entre dans la salle de classe et pénètre dans les collèges. C'est la grande époque du centre de recherche et d'expérimentation sur l'enseignement des mathématiques (CREEM, équipe de recherche appuyée sur le CNAM) et des « imagiciels » pour le collège, avec plusieurs moniteurs de télévision dans les classes ; ainsi, on apporte en direct des exemples ou contre-exemples pour confirmer ou infirmer des propriétés énoncées par les élèves. La gestion de classe via le nano-réseau permet de distribuer sur tous les écrans le travail d'un même groupe ou d'arrêter tout le monde et de conserver toutes les traces des productions des élèves.

1997 : des PC dans les lycées et collèges, des réseaux dans les lycées, le tableur dans les programmes du collège, des calculatrices graphiques et programmables, une évolution nécessaire de l'enseignement de l'analyse et des sujets de baccalauréat se produit, le dossier de l'ingénierie éducative (DIE) de mars 95 (*Des outils pour le calcul et le traçage de courbes*) fait état des polémiques fortes qui agitent à ce sujet la communauté mathématique. Le début d'Internet et des sites académiques permet de nouvelles formes de mutualisation ; la création des interlocuteurs académiques pour les nouvelles technologies pour l'éducation (IANTE) renforce les actions académiques.

2007 : les TICE sont mentionnées dans tous les programmes comme outils nécessaires à l'enseignement des mathématiques. Les ressources en ligne sont devenues abondantes ; les usages en classe commencent à se prolonger après la classe. Ils sont largement décrits dans le DIE d'avril 2006 (*Des outils pour les mathématiques*).

Georges-Louis Baron. Je suis frappé par trois points :
1- Tout d'abord, le terme d'intégration est trompeur. Il ne s'agit pas d'intégration, ni même peut-être d'intégration « par parties »… Il s'agit, en fait, de processus de *scolarisation* de nouveaux savoirs, de nouveaux instruments, pour lesquels la marque du succès et, souvent, de la fin de l'innovation est l'inscription dans les programmes scolaires. Cette inscription est progressive (ainsi, les premières mentions des TIC ont souvent un caractère non contraignant et relèvent du registre du souhaitable, du « là où c'est pertinent »…). Il s'agit de processus qui prennent beaucoup de temps, des multiples de dix ans dans les disciplines générales, parfois un peu moins dans les disciplines techniques dont les « temps caractéristiques » sont plus courts.

2- Ensuite, on ne peut pas considérer les TICE comme un ensemble connexe. On y distingue plusieurs composantes qui ont donné lieu à des processus différents de prise en compte. Prenons, par exemple, les approches algorithmiques : elles ont été expérimentées très tôt, dès les années soixante-dix, ont donné lieu à de nombreux travaux et ont finalement fait l'objet d'inscription dans les programmes.

Une deuxième approche est celle de la technologie éducative au sens d'ensemble d'outils pour le maître, dont une forme extrémale est l'enseignement assisté par ordinateur, dont nous parlerons sans doute ensuite, pour laquelle l'intégration se produit difficilement car on est dans le domaine des méthodes pédagogiques. Ces produits dépendent d'ailleurs de théories qui évoluent elles-mêmes lentement et de contraintes d'implémentation (ainsi, on ne sait pas traiter automatiquement de manière fiable des réponses ouvertes). Même si leurs interfaces ont évolué de manière spectaculaire, les produits actuellement commercialisés ne sont souvent que peu différents, en termes de fonctionnalités, des premiers prototypes des années soixante-dix.

Ce qui concerne les instruments logiciels, tels que les systèmes de calcul formel ou de géométrie dynamique, constitue un cas particulier. On constate l'existence de processus d'intégration très progressifs, avec inscription dans les programmes ; ces instruments sont susceptibles de contribuer au changement du rapport aux savoirs mathématiques, comme en témoignent les ateliers organisés au sein de cette rencontre.

3- Finalement, le rôle joué par l'institution dans les processus de scolarisation est fondamental d'un bout à l'autre des cycles de scolarisation. Elle suscite et soutient des cycles en trois temps (recherche - innovation - banalisation). La phase critique de dissémination de l'innovation dépend en particulier de manière centrale d'actions de prescription et, surtout, d'accompagnement de la prescription mené pendant une durée suffisante. Un enjeu fort me semble être le soutien apporté, de manière directe ou indirecte, aux actions d'innovation menées dans des cadres associatifs ou locaux.

Jean-Louis Durpaire. Ce séminaire réunissant des inspecteurs et des formateurs exerçant majoritairement dans l'enseignement secondaire, il est prudent de souligner en préalable que le contexte de l'enseignement primaire est sensiblement différent de celui des collèges et des lycées. Je m'en tiendrai à trois grandes différences qu'il est utile d'avoir présentes à l'esprit lorsque l'on aborde le sujet de l'utilisation des TICE. D'abord, l'enseignant de l'école primaire est polyvalent : il ne cherche pas forcément à utiliser les TIC dans l'ensemble des disciplines. Par ailleurs, les élèves disposent d'une salle de classe où ils vivent et travaillent pendant la plus grande partie de la journée : les TICE sont le plus souvent intégrées à la classe et donc à toute proximité. Enfin, les écoles étant généralement des structures plus petites que les collèges et les lycées, les questions d'équipement sont traitées d'une manière différente : la relation avec les collectivités est souvent plus proche à l'école que pour l'enseignement secondaire, l'enseignant peut aussi chercher à équiper sa classe plutôt que l'école. Ces éléments étant posés, on peut examiner d'éventuels points de convergence, à la fois dans l'historique, dans les pratiques actuelles et de manière prospective.

L'introduction des TIC à l'école est dominée historiquement par l'approche algorithmique et technologique. On peut considérer que l'introduction des TICE dans l'enseignement primaire a commencé avec l'« informatique à l'école ». D'autres technologies avaient bien sûr précédé, notamment la radio, la télévision, l'audiovisuel en général. Mais, les technologies numériques sous le nom d'« informatique » se sont introduites à l'école au tout début des années 80, soit dix ans après les premières expériences dans le secondaire. Le ministère, avec ce qui s'appelait à l'époque la Direction des écoles, s'est appuyé sur un réseau constitué de professeurs d'école normale - beaucoup étaient des professeurs de mathématiques - et des inspecteurs départementaux de l'éducation nationale. La Direction des écoles invitait les inspecteurs d'académie à engager des expériences locales dans le cadre de co-financements. Les objectifs pour les écoles sont précisés dans une note du 24 mars 1983 : il s'agit d'un « *éveil informatique* », dans une triple perspective : *« éveil humain et social, éveil technologique, éveil logistique »*. Le texte précisait que l'éveil logistique consistait à *« découvrir la démarche algorithmique et à exercer leur capacité à organiser des projets sur des thèmes divers »*. Avec le recul, on ne peut que s'étonner de la vitesse avec laquelle on est passé des balbutiements à la généralisation totale : en 1985, le plan Informatique pour tous dotait toutes les écoles élémentaires, y compris les plus petites (à classe unique) d'au moins un « *ordinateur familial* ». Parallèlement, tous les maîtres qui le désiraient pouvaient bénéficier d'une formation en suivant un stage rémunéré pendant les congés scolaires.

Cette première phase est marquée par l'algorithmique et appuyée sur un langage de programmation : Logo. De nombreux maîtres, encore en exercice aujourd'hui, ont découvert l'informatique avec ce langage. Le lien entre Logo et les mathématiques était assez évident. Logo permettait de développer le raisonnement logique, il favorisait simultanément une certaine vision de l'espace, il engageait une démarche de travail active avec une géométrie que l'on pouvait déjà qualifier de dynamique. Dès la maternelle, les élèves disposaient d'outils programmables : tortues de sol et jouets « Big trak » répondant à des instructions simples organisées en petits programmes constituaient une sensibilisation à l'informatique. Au cours moyen, Logo permettait de faire fonctionner des objets, des systèmes : écluses, feux tricolores, etc. Pour la géométrie, les élèves construisaient des figures plus ou moins complexes et travaillaient sur diverses notions, dont les angles. Mais l'essentiel, tout au moins dans l'esprit des concepteurs de ce langage et des formateurs, était de stimuler la créativité de l'élève, de favoriser l'émergence de la pensée inductive en référence au « *jaillissement de l'esprit* » prôné par Seymour Papert. Avec la généralisation de l'informatique, l'esprit initial s'est trouvé assez rapidement détourné et on a vu éclore dans les classes des « cours de Logo » oubliant le côté réflexif des situations proposées.

De la télématique à Internet : des outils nouveaux pour une pédagogie valorisant l'expression des élèves. Dès 1985, deux autres usages de l'informatique étaient envisagés ; d'une part, l'usage de petits logiciels – calcul, lecture - avec une visée d'entraînement des élèves ; d'autre part, la communication télématique (minitel, Exelvision). Cette dimension a séduit nombre de maîtres pratiquant la correspondance scolaire et les échanges inter-classes. Elle s'inscrivait dans le cadre d'une pédagogie dans laquelle les écrits fonctionnels étaient valorisés. Elle stimulait aussi les échanges qui s'effectuaient de manière plus rapide, voire même en temps réel. À partir de 1995, la communication prend une autre dimension avec l'arrivée d'Internet : de nouvelles activités sont permises, les classes pouvant donner à voir sur le web ce qu'elles font. Dès le départ (vers 1995-1997), des sites d'école apparaissent et mettent en évidence des initiatives et des productions qui restaient autrefois cachées ou à diffusion limitée. La mise en ligne de journaux scolaires montre les travaux des élèves au plus grand nombre. Après des débuts assez rapides – toujours les pionniers ! –, la généralisation s'est révélée assez lente dans l'enseignement primaire. Les programmes gouvernementaux successifs énonceront des objectifs qui ne se seront pas tenus en totalité : le programme d'action gouvernemental pour la société de l'information (1998-2002) prévoyait le raccordement de toutes les écoles, RE/SO 2007 (Pour une République numérique dans la Société de l'information) la généralisation des environnements numériques de travail (ENT). Il existe encore en 2007 des écoles non raccordées et celles qui le sont ne bénéficient pas toutes d'accès à haut débit.

B.P. *Y a-t-il réellement eu une prise en compte des TICE en mathématiques dans l'enseignement primaire ? Quelles sont les préconisations officielles dans ce domaine ? Quels outils ? Quel accompagnement ? Quel est leur impact réel dans les classes ? Sous quelles formes sont-elles mises en œuvre ? Y a-t-il des domaines où cette intégration s'opère mieux que dans d'autres ?*

J.L.D. En 2007, la dominante dans les usages à l'école primaire est le « back office ». Les maîtres communiquent entre eux, préparent des séances de cours, recueillent des préparations de cours. Bien souvent, ce sont des sites personnels qui sont cités avant les sites institutionnels.

Les programmes de l'école primaire (2002) introduisent le B2i ; ils imposent donc l'acquisition de compétences spécifiques : « Avec l'aide de l'enseignant, les élèves apprennent à utiliser les TIC de façon raisonnée. Les compétences, connaissances et savoir-faire cités dans le Brevet informatique et internet (B2i) font partie du programme du cycle 2. Elles doivent être acquises à la fin du cycle 3, mais, en ce qui concerne le niveau 1, certaines compétences peuvent être validées dès le cycle des apprentissages fondamentaux (voir le programme du cycle 3). »

En outre, dans tous les domaines du programme, on trouve des lignes relatives aux TICE. Ainsi pour les mathématiques, on lit au cycle 3 : « *L'enseignement des mathématiques doit intégrer et exploiter les possibilités apportées par les technologies de l'information et de la communication : calculatrices, logiciels de géométrie dynamique, logiciels d'entraînement, toile (pour la documentation ou les échanges entre classes), rétroprojecteur (pour les moments de travail collectif).* »

La récente étude[6] de l'inspection générale de l'éducation nationale a mis en évidence que l'usage des TIC en mathématiques (observation centrée sur le cycle 3) est statistiquement très faible. *« Aucune séance n'a été observée dans un contexte où chaque élève serait devant un poste informatique. Les ordinateurs de fond de classe souvent présents sont vraiment peu*

[6] Rapport de l'inspection générale de l'éducation nationale, L'enseignement des mathématiques au cycle 3, IGEN, juin 2006. http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf.

utilisés pendant les temps dédiés aux mathématiques ». Les calculatrices sont également peu utilisées, alors que leur usage est demandé par les programmes.

Certes, il existe dans chaque département des maîtres motivés qui sont des utilisateurs réguliers. Le site PrimTICE[7] présente des scénarios pédagogiques qui donnent une bonne idée des usages avancés. PrimTICE croît régulièrement[8] : sur 679 scénarios[9], 105 concernent les mathématiques, 76 le cycle 3, 31 le cycle 2 et 13 le cycle 1. Cinquante sont relatives aux usages du TBI en mathématiques. Aucune ne concerne une « *classe mobile* »[10] qui semble pourtant une solution très intéressante pour les élèves car elle évite des déplacements vers une salle informatique et permet de mettre un ordinateur à disposition de chaque élève : les exemples d'usage portent sur des activités de création artistique ou de production d'écrit. Il n'y a rien en mathématiques.

Si l'on considère les divers domaines du programme, la répartition des séquences est la suivante : exploitation de données numériques : 4 ; connaissance des nombres entiers : 3 ; fractions / décimaux : 9 ; calcul : 9 ; espace /géométrie : 64 ; grandeurs / mesure : 62. Le calcul et les nombres sont donc peu pris en compte par les maîtres dans leur exploitation des outils numériques ; les deux domaines « géométrie » et « mesures » dominent très fortement.

Des visites de classe effectuées par l'inspection générale auprès de maîtres contribuant à l'alimentation de la base PrimTICE mettent en évidence leur forte mobilisation pour l'usage des TICE par goût personnel. Ils se disent très satisfaits de bénéficier d'outils performants et les utilisent régulièrement. L'observation de leurs élèves montre chez ceux-ci des compétences fortes, notamment dans l'utilisation d'outils qui pourraient *a priori* sembler complexes. Ainsi, dans une classe[11], des élèves sont-ils conduits à résoudre un « problème » de géométrie : plusieurs polygones sont tracés sur le tableau blanc interactif ; il s'agit de trouver celui qui répond à plusieurs critères. Les élèves peuvent déplacer les figures ; ils ont à leur disposition un réseau de lignes parallèles et pratiquent déjà la géométrie dynamique (GéoNext). Un groupe de quatre élèves discute au tableau des démarches à adopter, des critères…

Par ce type de séances, les maîtres visent à la fois des compétences mathématiques et des compétences relevant du B2i. Les scénarios de PrimTICE en mathématiques montrent qu'un des cinq domaines du B2i[12] est nettement plus cité que les autres : s'approprier un environnement informatique de travail (72 %), les autres étant dans l'ordre et assez loin : créer, produire, traiter, exploiter des données (34 %) ; s'informer, se documenter (26 %) ; adopter une attitude responsable (20 %) et communiquer, échanger (13 %).

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. À l'école primaire, les problèmes sont tirés de situations de la vie courante où ils présentent une forme de réalité directement accessible, concrète. Les maîtres sont d'ailleurs très clairs lorsqu'on les interroge sur le sens de la formation mathématique. Ils expriment très largement l'idée fort juste qu'il s'agit de partir du concret et de conduire les élèves à un premier niveau d'abstraction. Les nombres sont une abstraction. Les figures, même simples, représentent des abstractions. Les programmes visent le « développement des capacités à chercher, à abstraire, raisonner, prouver ». Les outils nouveaux ne sont pas magiques ; ils offrent simplement et seulement des moyens pour entrer dans le monde des mathématiques d'une manière renouvelée. Plusieurs

---

[7] http://primtice.education.fr/.
[8] Une interrogation effectuée le 4 mars 2006 sur les critères « cycle 3 » et « mathématiques » avait conduit à 3 fiches. La même requête en fournit 76, onze mois plus tard.
[9] Au 1er février 2007.
[10] Un ensemble de micro-ordinateurs portables (un par élève) raccordés à internet par un réseau wifi.
[11] http://www.ec-pontdebois-st-cheron.ac-versailles.fr:80/article.php3?id_article=437 .
[12] Arrêté du 14 juin 2006 publié au B.O. n° 29 du 20 juillet 2006 .

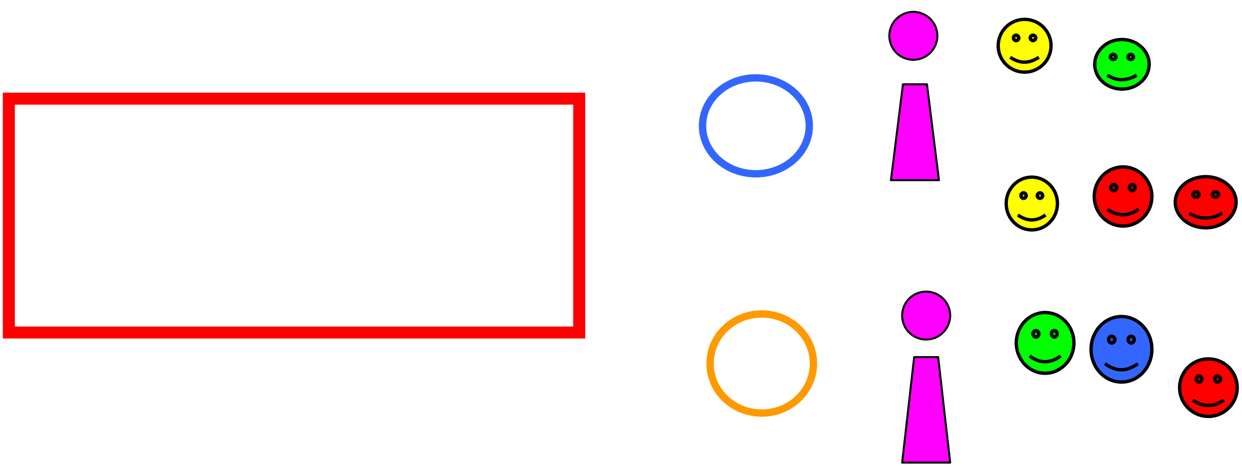
mots-clés indiqués par Michèle Artigue dans son intervention d'ouverture trouvent un écho à l'école primaire : visualisation, représentation, manipulation et, bien sûr, calcul.

En ce qui concerne les outils eux-mêmes, des « exerciseurs » existent depuis longtemps, mais ils sont désormais beaucoup plus performants : ils peuvent encourager certains élèves par leur caractère ludique. Ils permettent aussi de proposer des activités de remédiation ou de soutien aux élèves qui en ont besoin. L'efficacité de l'aide reste fournie par le maître et non par la machine. Et il faut se garder de penser que la lecture et l'analyse des séries de performance enregistrées suffiraient à comprendre les difficultés de l'élève. L'essentiel de l'aide n'est jamais fournie par la machine. C'est l'attention personnelle du maître aux difficultés de l'élève qui conditionne le succès de l'élève. C'est le regard du maître, ses encouragements qui stimulent et invitent à recommencer plutôt que les bravos ou les applaudissements de la machine. C'est le maître à l'écoute qui comprend l'erreur commise et qui fait surmonter l'obstacle.

B.P. *Pouvez-vous donner un ou deux exemples précis de mise en oeuvre des technologies à l'école ?*

J.L.D. Oui, bien sûr. J'ai en particulier remarqué que des outils qui n'ont absolument pas été créés pour les usages en mathématiques peuvent se révéler très intéressants. L'inventivité des maîtres permet de pratiquer le « détournement pédagogique » pour le plus grand profit des élèves. C'est le cas, par exemple, de l'appareil photo numérique qui s'est développé rapidement. Ainsi, dans une classe maternelle, un maître a conçu et mis en œuvre des situations qui permettent de passer d'un objet à sa représentation et inversement. L'objet construit par un petit groupe d'élèves avec diverses pièces est photographié ; la photographie immédiatement disponible sur un écran d'ordinateur est présentée à un autre groupe qui doit reconstituer l'objet. Là aussi, l'intérêt de la situation n'est pas réductible à l'usage des TIC ; c'est le dialogue entre élèves et avec le maître qui est formateur.

Un autre cas de « détournement » est fourni avec un usage de Word pour mettre en œuvre la partie consacrée aux mathématiques en maternelle : « apprendre à se situer dans l'espace », travailler à « la représentation spatiale ». Un enseignant de grande section a inventé un jeu avec ses élèves: « la balle attaque ». Après avoir vécu le jeu, les élèves travaillent à sa représentation à partir de divers objets ou d'une représentation informatisée.



Le rectangle représente l'aire de jeu, les cercles les zones où se trouve une quille à faire tomber et où les élèves (petits disques de diverses couleurs) ne doivent pas pénétrer. Il y a des attaquants, des défenseurs. Les élèves font preuve d'une bonne habilité à glisser-poser les divers types d'objets malgré certains obstacles techniques. Ils transposent la situation vécue, avec le soutien du maître qui aide à la compréhension de l'activité.

En se référant à PrimTICE et à quelques observations de classe, j'ai indiqué précédemment que le calcul n'était pas un axe privilégié pour les usages des outils numériques, ce qui d'ailleurs pourrait être jugé paradoxal si l'on n'avait rappelé l'histoire de l'informatique à l'école avec sa dominante géométrique de Logo.

Et pourtant, nombre de maîtres proposent des situations-problèmes qui mettent en jeu des recherches sur des nombres et appellent la création de tableaux. Le rapport de l'IGEN déjà cité[13] a relevé par exemple la situation suivante : « Combien de pièces de 2 euros et de billets de 5 euros pour 97 euros sachant que j'ai 32 pièces et billets ? » Il note que : « Pour aboutir dans un temps aussi court et bien sûr sans recourir explicitement à l'algèbre, ils ont en fait posé l'écriture suivante 5 x + 2 y = 97 et ont procédé par essais. Les autres ont eu pour le plus grand nombre recours à des additions réitérées, avec dans quelques cas dessin des objets en question. »

On pourrait imaginer, à l'aide d'un tableur, une systématisation avec présentation de tableaux de nombres :

Nombre (*n*) de pièces de 2 €	Dépense en pièces	Nombre (32-*n*) de billets de 5 €	Dépense en billets	Dépense totale
1	2	31	155	157
…	..	…	…	…
17	34	15	75	109
18	36	14	70	106
19	38	13	65	103
20	40	12	60	100
21	42	11	55	97
22	44	10	50	94
23	46	9	45	91
24	48	8	40	88

[13] http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf. Page 53.

Mais l'utilisation du tableur à l'école élémentaire est encore très rare, ce qui ne saurait étonner puisque cet outil n'est pas mentionné dans les programmes. Toutefois, le domaine « *exploitation de données numériques* » demande un travail sur « *l'utilisation de données organisées en listes, en tableaux, …* » Il faut aussi noter que tout nouvel enseignant doit connaître un tableur puisque cet outil figure explicitement dans le programme de mathématiques du concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE). L'intérêt du tableur est de ménager une transition entre des processus de raisonnement arithmétique et l'algèbre.

B.P. *L'intégration des outils logiciels a-t-elle fait évoluer les contenus mathématiques ? Si oui, lesquels et comment ? Et, au-delà des contenus, les outils logiciels induisent également de nouveaux rapports aux savoirs disciplinaires chez les élèves, notamment en mettant en avant des démarches de type expérimental. A-t-on une idée de la nature et de l'ampleur de cette évolution ? D'autre part, depuis une dizaine d'années la série S voit ses effectifs diminuer, alors que les besoins en bacheliers scientifiques ne cessent de croître. Et, dans une enquête récemment publiée*[14]*, on a demandé à des lycéens de la série S de classer les matières enseignées par ordre de préférence : les mathématiques viennent en dernière position. Cette étude relève également le désir des lycéens d'une ouverture de l'enseignement sur le monde. Peut-on considérer qu'une prise en compte accrue des outils logiciels peut – ou pourrait – constituer un élément de réponse à cet état de fait et contribuer à rendre la discipline plus attractive ? À quelles conditions et sous quelles formes ? Et que répondre à ceux qui craignent que la « rigueur » des mathématiques n'en pâtisse ?*

G.L.B. Il y a ici beaucoup de questions. On peut d'abord remarquer qu'il y a eu une évolution incontestable de la discipline, corrélative du développement de l'informatique. Ensuite, s'agissant d'enseignement, les contenus enseignés ont indéniablement changé depuis une trentaine d'années (je pense en particulier à la géométrie dans l'espace, à la géométrie descriptive, à la statistique). Il est banal de remarquer qu'il y a eu une réaction incontestable à la suite de la période dite « des mathématiques modernes ». L'approche pédagogique a été modifiée. Il est probable aussi qu'il y a eu une évolution dans les finalités assignées à la discipline.

Par ailleurs, de nouveaux instruments logiciels sont apparus, offrant de nouvelles possibilités d'activité. On note des évolutions de programmes, mais dans l'ensemble elles sont encore discrètes, ce qui est parfaitement normal. On pourrait aller dans l'avenir vers des approches davantage « expérimentales », visant à tester des conjectures. Ceci étant, les mathématiques ne sont pas un ensemble homogène en termes d'intervention possible d'outils logiciels, ni d'ailleurs en termes de représentations et de rapport au savoir des élèves. Il y aura à suivre attentivement les évolutions dans ce domaine.

S'agissant de l'attractivité de la discipline, je pense que si la prise en compte des outils logiciels dans l'enseignement de lycée peut certainement apporter des éléments de réponse, ils ne peuvent suffire à changer le système. Peut-être sont-ils surtout intéressants par leur capacité à explorer des possibilités, à susciter de nouvelles questions, à montrer qu'il est possible de problématiser différemment des situations canoniques.

Reste la question de la rigueur : en l'abordant, on arrive rapidement à des débats de nature philosophique sur la nature des mathématiques, qui sont intéressants mais complexes. Pour faire référence à un ensemble de réflexions de René Thom (pour qui « *est rigoureuse toute*

---

[14] *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée*, coordonné par R. Establet. Ed. ESF 2005.

démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion »)[15], il n'existe pas de définition rigoureuse de la rigueur.

Je pense quant à moi que l'expérimentation n'est pas incompatible avec la rigueur. Un des paris de la période actuelle est que le savoir des élèves peut se construire à partir de problèmes, à condition que leur graduation soit bien pensée et que leur résolution soit accompagnée de manière didactique.

A.M.B. Tous les programmes du secondaire mentionnent désormais la nécessité d'utiliser les TICE : les documents distribués dans les pochettes d'accueil du séminaire en témoignent, et on pourrait citer des extraits des programmes de STG, de L (algorithmique), de CAP mais aussi de BEP et de baccalauréats professionnels à venir : « *Le travail expérimental (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l'aide ou non d'instruments de dessin et de logiciels) permet d'émettre des conjectures. La résolution de problèmes vise à donner du sens aux connaissances travaillées, puis à en élargir les domaines d'utilisation. L'utilisation de l'outil informatique est indispensable aux élèves pour apprendre les mathématiques et résoudre les problèmes* ».

Risque-t-on d'y perdre la rigueur ? Si l'on n'y prend garde, oui, comme dans tous ces pseudo-cours sur le théorème de Pythagore où, après avoir mesuré et constaté l'égalité (ou presque) sur deux ou trois triangles, on énonce le théorème, passant ainsi sans ambages d'un constat à une vérité révélée. Peut-être élèves et maîtres pourront-ils être tentés de penser que, si on a considéré beaucoup plus de triangles et si les mesures sont plus précises, alors il est encore moins besoin d'institutionnaliser le théorème… Mais la communauté mathématique veille ! Dans les énoncés de l'épreuve pratique au baccalauréat, une distinction est faite systématiquement entre le constat, la conjecture et la démonstration (faite ou qui reste à faire). Inversement, on se reportera à l'article d' Y. Chevallard dans les DIE d'avril 2006 ; il montre *a contrario* un excès de rigueur fautif chez certains enseignants qui préviennent : « si la calculatrice donne des résultats décimaux égaux, même avec 10 chiffres après la virgule, on ne peut conclure à l'égalité des expressions », alors qu'une majoration de la différence montre que celle-ci ne pourrait excéder, par exemple, le centième !

En fait, l'essentiel du débat est ailleurs. Tous les programmes de mathématiques et leurs commentaires précisent l'importance de faire résoudre des problèmes aux élèves. Il faut s'entendre sur cette notion, et considérer que sont visés des problèmes (au moins un peu) ouverts et non des problèmes extrêmement guidés par une suite de micro-questions (1-a), b), c) puis 2-a)…). La résolution de tels problèmes plus ouverts nécessite le plus souvent des expérimentations, des observations, des conjectures… avant la mise en forme des démonstrations. Cette phase est la plus riche : elle nécessite de mobiliser des outils qui ne sont pas donnés par le titre du chapitre, voire de changer de cadre, de « faire » des mathématiques. C'est alors que l'outil TICE (tableur, logiciel de géométrie) s'utilise comme « *un outil pour penser avec* » (en citant Seymour Papert au sujet de Logo).

Le goût des mathématiques est-il meilleur ? Ferons-nous mieux goûter les mathématiques aux élèves ? En tout cas, on leur propose ainsi des mathématiques qui ont de la saveur, des mathématiques qui ont du goût et pas un « Canada Dry » qui y ressemblerait, fait de formules, de calculs numériques ou algébriques, de résolutions d'équations ou de calculs de dérivées, de réponses à des questions parcellaires enchaînées sans signification, sans intérêt, sans but.

---

[15] THOM, René (1971). Les mathématiques modernes, une erreur pédagogique et philosophique ? *L'âge de la science*, III, 225-242.

La réflexion qui accompagne la définition du socle commun, les enseignements de PISA, nous incitent à approfondir cette idée de privilégier, au moins dans l'enseignement obligatoire, et déjà depuis longtemps dans l'enseignement professionnel, des mathématiques que l'on fait, que l'on mobilise dans des problèmes concrets, des mathématiques utiles. L'important est alors de développer une stratégie et de recourir aux bons outils. Et s'il s'agit d'une calculatrice graphique ou d'un tableur ou d'un logiciel de calcul formel, pourquoi pas ?

Dans le même esprit, au baccalauréat, on propose désormais des questions à choix multiples (QCM), pour lesquels l'important est de donner la bonne réponse, sans avoir besoin de la justifier. De nombreuses compétences sont développées par l'enseignement des mathématiques et chacune a son importance, la rigueur d'une rédaction de démonstration comme la compréhension plus intuitive d'un phénomène ou la capacité à conduire des investigations.

B.P. *Les technologies n'interviennent pas seulement dans la classe (ou en salle informatique), mais aussi hors de la classe. Du côté de l'enseignant, on peut* a priori *distinguer trois grands « cadres d'usage » professionnels :*

- *les non directement liées à la classe (communication entre collègues, recherche de ressources numériques…) ;*
- *le travail en différé (conception de séquences, production de documents variés…) ;*
- *le travail avec les élèves.*

Mais qu'en est-il, cette fois du côté « élèves », pour le travail scolaire hors de la classe (suivi de la scolarité, accompagnement et aides diverses) ?

A.M.B. Quelques pistes, encore pionnières, s'offrent à nous :

- la possibilité de travailler à son rythme, de poursuivre un travail commencé en classe sur le réseau de l'établissement, au CDI, en salle multimédia (exerciseurs) ;
- la possibilité de donner à faire des devoirs à la maison nécessitant les TICE ;
- la possibilité de retrouver, de chez soi, des ressources utilisées en classe ;
- la mise à disposition des élèves, pour leur travail personnel, d'aides issues de l'éducation nationale, pas nécessairement liées à la classe : cf. « SOS maths » de Poitiers, Euler de Versailles ;
- **la mise à disposition des élèves d'aides payées par les collectivités.**

G.L.B. Il convient ici de distinguer entre l'accompagnement scolaire et les activités des élèves pour accomplir le travail qui leur est demandé ou qu'ils se fixent. Les recherches convergent relativement bien sur l'idée, encore récemment illustrée par Michèle Artigue et son équipe[16], qu'il y a des limites à l'apprentissage sans programmation didactique, sans fixation d'une série cohérente de tâches. En fait, en pareil cas, ce sont surtout les « moyens-faibles » qui semblent profiter de l'accompagnement par environnement multimédia : après une période initiale d'intérêt, les autres se désintéressent, soit parce qu'ils trouvent les

---

[16] ARTIGUE, Michèle et al (2004). - Suivi et évaluation du projet d'expérimentation de ressources en ligne en mathématiques en classe de seconde mené a l'initiative de la région Île de France. http://pcbdirem.math.jussieu.fr/SITEscore/rapportsommaire.php.

exercices trop faciles, soit parce qu'ils ne comprennent pas bien les questions et les explications[17]. Le rôle de l'enseignant pour guider et recadrer est essentiel.

Dans un autre registre, on sait que les élèves utilisent les technologies à leur disposition chez eux pour s'aider dans leur travail scolaire et qu'ils le font de manière généralement assez efficace, voire stratégique, même si ce n'est pas toujours en fonction des buts assignés par les enseignants. Un point très intéressant à étudier est celui de l'utilisation de forums (cf. par exemple les travaux récents d'A. Erdogan et A. Mercier[18]).

B.P. *La scolarisation des outils logiciels en mathématiques a été prise en compte par la recherche en éducation. Quelles sont les recherches passées, en cours, ou à mettre sur pied dans un avenir proche ? Quels sont les résultats déjà obtenus, notamment sur l'approche instrumentale, l'évolution du rapport au savoir, etc. ?*

G.L.B. La recherche peut avoir différents objectifs : valider des hypothèses issues d'une théorie, expliciter / élucider des situations, préparer des pistes de développement en problématisant différemment des situations. Régulièrement, elle montre des potentialités mais aussi une complexification initiale de la situation didactique. Elle met aussi l'accent sur des changements d'activités qui, s'ils semblent intéressants, ne sont pas toujours en phase avec le système éducatif tel qu'il est. En particulier, les nouvelles activités instrumentées se prêtent parfois mal aux modalités traditionnelles d'évaluation, ce qui signifie que leurs potentialités ne se réaliseront pas facilement.

Actuellement, il me semble que l'une des pistes prometteuses est celle des ressources en ligne dans l'apprentissage, du double point de vue de leur conception et de leurs usages par les élèves, tant en classe que dans un cadre privé. Pour l'avenir, je n'ai pas de préconisation particulière à faire, mais je souhaite souligner l'intérêt de l'investissement en recherche et, au delà, celui en « après recherche », pour soutenir la diffusion des résultats et leur réinterprétation par la profession.

Question de la salle. *Il n'y a pas que l'aspect ludique dans l'enseignement, il y a aussi des moments où l'élève doit faire des choses moins amusantes. Qu'en pensez-vous ?*

A.M.B. Bien entendu, il faut « faire des gammes », maîtriser des techniques, s'entraîner. Mais il ne faut pas que les gammes et le solfège durent de longues années avant de commencer à jouer de la musique ; de même en mathématiques, il faut aborder de vrais problèmes assez tôt, et justifier ainsi le besoin de technicité. Tout est question d'ordre et de dosage.

B.P. *Diverses certifications, comme le B2i que nous avons déjà évoqué, sont en train d'être mises en place à différents niveaux du cursus. Est-il possible d'évaluer les compétences acquises par les élèves dans ce domaine ? Comment les professeurs de mathématiques peuvent-ils contribuer ? Et qu'en est-il pour l'enseignement professionnel, qui par nature est directement confronté à la nécessité de préparer ses élèves au monde de l'entreprise de plus en plus informatisé ?*

A.M.B. Les relations avec le B2i sont désormais mentionnées dans les programmes de mathématiques de collège. Le problème n'est pas théorique mais purement pratique : dédoublements ou salles appropriées à prévoir ; organisation de la certification pas toujours mise en place au collège.

---

[17] LAURENT, Julien (2002). - Une étude de cas sur l'utilisation de logiciels éducatifs au sein d'un centre de soutien scolaire pour collégiens. http://www.mutatice.net/data/documents/travaux/pV/dea2002_Laurent.pdf.

[18] ERDOGAN, Abdulkadir, MERCIER, Alain (2007). - Un regard sur le travail des élèves. *Annales de didactique et de sciences cognitives* ; vol 12. – parution en juillet 2007, IREM de Strasbourg.

Le B2i est un bon exemple d'évaluation des compétences acquises par les élèves, en continu, en positif, et lorsque l'élève s'y sent prêt. Bientôt, peut-être, des livrets de compétences numériques avec un suivi plus précis de ce qui est acquis et de ce qui demeure à acquérir poursuivront cette forme d'évaluation qui nous fera sortir de la note (réductrice) et de la moyenne (illusoire).

G.L.B. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler encore et encore combien l'évaluation joue un rôle capital en éducation, combien elle rétroagit rapidement sur l'action éducative et combien elle est un reflet de l'ambition éducative.

Le B2i est une innovation institutionnelle intéressante. C'est une certification sans curriculum associé, se centrant uniquement sur des compétences. Mais la notion de compétence est assez floue, et il n'y a pas uniquement des compétences en jeu mais aussi des conceptualisations, ce qui est pour moi le plus intéressant. Il me semble que les professeurs de mathématiques peuvent s'appuyer sur le B2i pour valider, de manière contextualisée une partie du référentiel et qu'ils peuvent s'appuyer sur l'appropriation d'instruments comme le tableur par les élèves dans d'autres disciplines, à la fois pour réaliser des activités intéressantes du point de vue mathématique et pour contribuer à leur formation en informatique.

Quant à l'enseignement professionnel, il a réagi très tôt à l'évolution de la technologie et continue à le faire. Les instruments logiciels y sont pris en compte de manière diversifiée, en particulier en bureautique. Il y a sans doute là une base d'appropriation pour les activités mathématiques.

B.P. *L'Inspection générale de mathématiques a expérimenté tout récemment, en terminale S, une « épreuve pratique » dont l'objectif est* « d'évaluer les compétences des élèves dans l'utilisation des calculatrices et de certains logiciels spécifiques en mathématiques ; il s'agit d'évaluer (…) la capacité à mobiliser les TICE pour résoudre un problème mathématique ». *Quelles ont été les modalités de cette épreuve, et a-t-on déjà une idée de ses résultats ?*

A.M.B. L'objectif de cette épreuve est d'évaluer la capacité des élèves à mobiliser les TICE pour résoudre un problème de mathématiques. L'expérimentation s'est déroulée entre le 8 et le 20 janvier 2007. Elle a concerné 9 académies, 20 lycées, 2200 élèves de terminale S.

À partir d'une banque de 54 sujets (exercices où l'utilisation des TICE intervient de manière significative dans la résolution) l'IGEN en a retenu 28 ; les lycées ont choisi parmi ces 28 sujets ceux qui seraient proposés aux élèves. Les épreuves se sont déroulées en salle informatique, en présence des professeurs du lycée qui étaient à la fois des aides en cas de nécessité et des évaluateurs.

Premiers résultats : l'épreuve a inquiété certains enseignants, a nécessité de la concertation et de l'organisation ; il a fallu prévoir des entraînements en amont pour une meilleure familiarisation avec les logiciels. Les notes obtenues sont plutôt bonnes.

Premières leçons : les élèves n'ont pas de mal à conjecturer et apprécient cette évaluation. D'autre part, il faut des exercices qui ne commencent pas par une question théorique sans TICE et des sujets indépendants du logiciel (de géométrie en particulier) disponible. Enfin, il faut apprendre à évaluer autrement. Cela s'apparente à une évaluation de l'oral.

B.P. *De nouveaux outils, comme le tableau blanc interactif, sont en train de faire leur apparition dans les classes. Comment sont-ils pris en charge par les enseignants et par l'institution ? Leur impact (en positif et en négatif) peut-il d'ores et déjà être évalué ?*

G.L.B. On est, avec le tableau blanc interactif (TBI), dans le domaine de la technologie éducative. Il s'agit d'une technologie compatible avec le système tel qu'il est, un outil commode pour l'enseignant, dans la lignée des systèmes de présentation assistée par ordinateur. Des études sont en cours dans différents pays. Je suis intéressé par leurs résultats et par la valorisation d'observations sur ce qu'il est possible de faire avec ce nouveau type d'outil de l'enseignant, qui réactive potentiellement l'idée des imagiciels illustrée depuis un quart de siècle par A. Deledicq et S. Hocquenghem[19].

J.L.D. Le TBI commence à se développer à l'école primaire. Le TBI est un outil qui répond à des besoins de visualisation collective et qui permet de rendre dynamiques les présentations. Ses usages sont multiples dans toutes les disciplines.

En mathématiques, je citerai cette situation vue récemment dans une classe de CM1 de la région parisienne dont le maître utilise régulièrement le TBI. La séquence observée prend appui sur un document numérisé (ci-dessous) à partir du manuel de CM1[20] en usage dans la classe.

L'enseignant demande d'indiquer le danseur qui « ouvre le plus les bras » et de « ranger les danseurs en fonction de l'ouverture ». Au tableau, un premier élève mesure les écarts entre les mains. Les longueurs évaluées sont identiques pour les danseurs 1 et 2. Un élève estime que les écarts sont identiques. Un deuxième pose le compas sur chaque angle et conclut que les écarts sont différents. Un troisième pose l'angle droit d'une feuille de papier sur chaque angle et indique, lui aussi, que 1 et 2 sont différents.

La réflexion mathématique peut véritablement démarrer sur ce constat de désaccord entre les élèves. Le TBI n'est pas un moyen magique d'améliorer l'enseignement, c'est la façon de l'utiliser qui importe. Le TBI permet une bonne visualisation des constats et des démarches utilisées. En revanche, le passage à l'abstraction résulte essentiellement et même exclusivement du dialogue constructif que le maître engage avec ses élèves : « qui a raison ? Comment peut-on être sûr que l'angle formé par les bras du danseur 2 est plus grand que celui du danseur 1 ? Quelle erreur commet le premier élève ? » Progressivement, le maître conduit les élèves à une méthode et même à une technique experte pour comparer deux angles avec un compas. Au passage, il a introduit l'idée que les bras des deux danseurs n'étaient pas forcément de la même longueur.

---

[19] INRP (1983). Imagiciels, enseignement des mathématiques illustré par ordinateur, Rencontres pédagogiques n° 1, INRP, Paris.
[20] Brissiaud, Clerc, Lelièvre, Ouzoulias, J'apprends les maths, CM1, Retz, 2005

L'outil, aussi performant soit-il, reste un outil. L'essentiel est dans l'attitude du maître, dans sa capacité à comprendre les erreurs des élèves et à y remédier par des exemples judicieux et enfin, à dégager une conclusion pertinente.

B.P. *À l'heure où l'on réfléchit à l'élaboration de curricula au niveau européen, a-t-on des informations sur l'intégration des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques chez nos voisins ? Quelles évolutions peut-on prévoir, chez nous et ailleurs ?*

G.L.B. La question est difficile. Une étude européenne récente[21] donne bien, à partir de l'interrogation d'enseignants dans 27 pays, des indices d'utilisation, qui ne placent d'ailleurs pas notre pays parmi les plus utilisateurs en Europe. Mais elle rassemble au sein de la même catégorie les enseignants de sciences, de mathématiques et d'informatique et n'entre guère dans les types d'usage qui se développent. Dans le cadre des utilisations innovantes des technologies, il est en revanche certain qu'existent, en particulier, dans le cadre de projets européens, des échanges nombreux qui montrent une diversité d'approches en fonction des contextes culturels[22].

J.L.D. Je pense également que la prospective est un exercice très difficile. Il ne suffit pas de se retourner ou de regarder le présent, même dans ses réalisations les plus novatrices. En matière de TICE, les innovations pédagogiques, intéressantes et riches pour les enseignants qui les portaient et pour les élèves qui en étaient acteurs, n'ont pas souvent trouvé de généralisation. Elles appellent un tel effort de préparation ou de connaissance de l'outil qu'elles sont vouées à rester à leur état d'expérience novatrice.

B.P. *Les divers points qui viennent d'être évoqués ont bien sûr des implications sur l'accompagnement et la formation des enseignants, ce qui sera le thème de la journée de demain. Chacun en ce qui vous concerne, pouvez-vous néanmoins conclure en direction de l'organisation de la prescription et de l'accompagnement de la « dimension » technologique dans l'enseignement des mathématiques par les divers corps d'inspection ?*

A.M.B. Il y a des conditions absolument nécessaires à remplir en termes d'équipement, de maintenance, de gestion de réseau etc. (on se reportera aux recommandations de l'audit de modernisation sur les TICE, à paraître en mars 2007). Mais il faut, durant quelques années encore, un accompagnement, et notamment une formation adaptée aux cadres que sont les enseignants : se former en produisant ; se former à travers du travail collaboratif ; comprendre l'intérêt d'utiliser les TICE en résolvant soi-même des problèmes grâce à ces outils, etc. Mais ce sera l'objet de la seconde table ronde …

G.L.B. Je pense, pour ma part, qu'il existe d'un côté un mouvement lent de scolarisation d'outils logiciels dans les cours de mathématiques vis-à-vis duquel l'inspection a un rôle important pour animer et susciter l'adoption de pratiques les utilisant. De l'autre côté, l'avenir dépend de la poursuite de recherches et d'innovations, menées à la fois dans un cadre formel (avec validation scientifique classique) mais aussi dans le cadre moins strict de l'innovation.

---

[21] EMPIRICA / Commission européenne (2006). - Benchmarking Access and Use of ICT in European Schools 2006. Final Report from Head Teacher and Classroom Teacher. Surveys in 27 European Countries. http://ec.europa.eu/information_society/eeurope/i2010/docs/studies/final_report_3.pdf.

[22] Cf. par exemple certains travaux menés dans le cadre du réseau d'excellence européen KALEIDOSCOPE. http://telma.noe-kaleidoscope.org/.

J.L.D. Le souhait que je pourrais formuler pour l'enseignement primaire, en guise de conclusion à cette intervention, serait que les TICE contribuent à résoudre certains des problèmes rencontrés aujourd'hui en matière d'enseignement des mathématiques :

- redonner sa place au calcul dans toutes ses formes : mental, posé, instrumenté (les outils sont déjà là permettant des exercices ludiques et des entraînements méthodiques) ;

- favoriser un enseignement qui donne toute sa place à la résolution de problèmes et où l'enseignant donne des moyens pour « résoudre des problèmes ». Le tableur pourrait permettre de mieux approcher le traitement des données numériques ;

- faciliter l'accès à une première conceptualisation des notions, notamment en géométrie, en utilisant les outils de géométrie dynamique combinés à la visualisation collective pour ne pas rester à un stade descriptif, mais aborder le raisonnement ;

- permettre une réelle différenciation pédagogique permettant à chaque élève de progresser à son rythme ;

- porter une attention aux erreurs commises et y remédier de façon à permettre à tout élève un parcours de réussite en mathématiques.

Enfin, l'observation met en évidence un élément qui est la clé pour une formation mathématique réussie : le maître doit être lui-même bien formé en mathématiques pour pouvoir exploiter les potentialités des outils disponibles. Il doit être capable de faire dépasser les recherches spontanées et de conduire les élèves vers des connaissances assurées.

L’accompagnement de l’intégration des outils logiciels

Table ronde animée par
Guy Menant, inspecteur général, groupe des sciences de la vie et de la Terre, co-responsable de la cellule TICE des inspections générales

Participants :
Éric Bruillard, professeur des Universités, IUFM de Créteil, UMR STEF ENS CACHAN INRP
Marie Mégard, inspectrice générale, groupe enseignement primaire
Xavier Sorbe, inspecteur général, groupe mathématiques
Anne Hirlimann, professeure de mathématiques, responsable DT-SDTICE mathématiques

Les technologies usuelles de l’information et de la communication sont inscrites dans le socle commun de connaissances et de compétences qui doit être maîtrisé à la fin de l’enseignement obligatoire. En ceci, la loi d’orientation et de programme pour l’avenir de l’école votée en 2005 place les TICE dans un contexte nouveau : les TICE sont toujours des outils au service des apprentissages dans les disciplines, mais elles incluent aussi des objectifs de formation à part entière, les acquis indispensables pour être un acteur efficace et averti dans la société du numérique.

Actuellement, plus de un foyer sur deux (53%) possède un ordinateur (augmentation de 10% en un an) ; cette proportion s’élèverait à près de 80% pour les foyers avec enfants. Un enfant sur trois entre 6 et 8 ans est déjà internaute, 96% des enfants de 12 à 18 ans. On le voit, les jeunes générations sont très concernées ; il est impératif et urgent que l’École leur apporte les compétences nécessaires pour un usage éclairé de ces technologies, et tout particulièrement des réseaux numériques.

C’est pourquoi la circulaire de rentrée classe pour la première fois les TICE parmi les apprentissages fondamentaux. Parallèlement, le taux d’obtention du B2i est un indicateur de performance retenu par la loi de finances pour 2007.

Mais ces positions fortes ne font pas disparaître les difficultés rencontrées dans toutes les disciplines pour généraliser les usages des TICE, malgré le travail de fond en impulsion, animation et accompagnement réalisé depuis des années. Ces difficultés sont liées aux contraintes matérielles, au manque de formation des enseignants les plus anciens... et au fait que pour nombre d’acteurs la valeur ajoutée des TICE n’est pas toujours clairement perçue. Elle n’est d’ailleurs pas immédiate, et dépend avant tout de la pertinence de l’usage qui en est fait : l’outil seul ne suffit pas, il ne convient pas toujours et partout, et l’énergie personnelle dépensée pour s’en servir ne garantit pas non plus le succès. L’engagement hors du commun des pionniers de la première heure (espèce qui se renouvelle constamment avec l’évolution des technologies) suscite l’admiration... mais est aussi parfois un repoussoir.

Une évolution positive est cependant très sensible : les jeunes enseignants arrivent avec des compétences TIC initiales qui changent la donne ; par la formation institutionnelle, confortée par la mise en place du certificat informatique et internet niveau 2 « enseignant » (C2i2e), mais aussi par une formation personnelle, de pair à pair, et dans le cadre familial... 67% des enseignants se connectent à domicile, et ces connexions sont très largement à haut débit. Parallèlement, les collectivités se sont fortement impliquées, et ont consenti des investissements importants pour l’équipement des établissements ; les plans de couverture du territoire rural par les réseaux numériques, et les regroupements de communes vont progressivement améliorer la situation des écoles dans le premier degré.

Dans ce contexte, les TIC autorisent la généralisation de nouveaux usages, qui nécessitent une réflexion sur leurs conséquences didactiques, et une mutualisation des pratiques. La table ronde s'est donc déroulée en deux temps :

- un repérage de ce qui se fait et qui marche (au sens d'une valeur ajoutée perceptible pour les apprentissages), et qui pourrait se faire plus ;

- une identification des contextes favorables à la généralisation.

C'est dans ce deuxième temps qu'a été discuté le problème de l'accompagnement. Mettre à disposition des outils performants (matériels, ressources, services...) ne suffit pas. Il faut que le possible soit en conjonction avec le nécessaire ; que l'usage s'impose, par des avantages évidents (il faut convaincre que l'effort en vaut la peine), par une forte impulsion institutionnelle (dans les programmes, les examens) en concordance avec une demande sociale (par les élèves et les parents, ou par les pairs).

La valorisation de l'investissement des enseignants est nécessaire. Mais il faut surtout installer un véritable accompagnement du changement, impliquant les corps d'inspection, en parallèle à la formation.

Le cadre institutionnel pour le premier degré

Marie Mégard, inspectrice générale, groupe enseignement primaire

Les programmes

Le programme du cycle 2 fait mention de la calculatrice, mais pas de l'informatique.

Le programme du cycle 3 fait en revanche mention à deux reprises à l'informatique.

1- Dans ***les objectifs*** de ce cycle, il est dit que :

« L'enseignement des mathématiques doit intégrer et exploiter les possibilités apportées par les technologies de l'information et de la communication : calculatrices, logiciels de ***géométrie*** *dynamique, logiciels d'entraînement, toile (pour la documentation ou l'échange entre classes), rétroprojecteur (pour les moments de travail collectif) ».*

Trois usages pour l'informatique en classe de cycle 3 sont donc suggérés, les logiciels de **géométrie dynamique**, les logiciels **d'entraînement**, et **la toile** pour la documentation ou l'échange entre classes.

2- Dans ***les programmes***, on ne trouve cependant de référence explicite qu'à un seul de ces usages, au chapitre « espace et géométrie », où il est fait mention de l'**écran d'ordinateur**. Il s'agit d'exploiter des logiciels de géométrie dynamique. Cet usage est développé avec des précautions et des réserves.

3- Dans ***le document d'application***, au chapitre géométrie, où il est écrit notamment : *« Les logiciels de dessin assisté par ordinateur ou de géométrie dynamique pourront faire l'objet* *d'une première utilisation, mais les activités réalisées à l'aide de ces outils ne remplacent pas celles qui sont situées dans l'espace réel ou dans celui de la feuille de papier.* »

Comme on le voit, en ce qui concerne l'apprentissage des mathématiques, les programmes sont très prudents sur le chapitre de l'informatique (alors qu'ils sont évidemment beaucoup plus diserts sur celui des calculatrices).

Alors, qu'en est-il, concrètement, des pratiques en classe ?

L'état des pratiques

Tout d'abord, rappelons les conclusions du rapport de l'IGEN sur l'enseignement de mathématiques au cycle 3 : « *le recours à l'informatique pour l'enseignement des mathématiques relève de l'exceptionnel* » ; il précise que, par exemple, les ordinateurs de fond de classe sont souvent présents mais vraiment peu utilisés pendant le temps dédié aux mathématiques.

De fait, la situation est la suivante.

L'équipement

La situation est plutôt bonne de ce point de vue :

- les écoles sont de plus en plus fréquemment reliées à Internet à haut débit ;

- la connexion est même de plus en plus fréquemment possible dans l'enceinte de la classe ;

- l'équipement est en hausse régulière, notamment par des ordinateurs en fond de classe ; on commence à voir arriver les tableaux blancs interactifs (une dizaine dans le Rhône, pour donner un ordre de grandeur) ; les vidéoprojecteurs, en général présents dans l'école, sont rares dans les classes ;

- dans certains départements, des animateurs en technologie de l'informatique et de la communication pour l'école (ATICE) sont en nombre relativement important (un par circonscription par exemple), mais on constate de ce point de vue de fortes disparités ;

- les élèves possèdent des calculatrices, mais elles sont peu utilisées et pour un usage peu réfléchi.

L'utilisation en classe de mathématiques

Tout ceci se situe dans un cadre général marqué par une mobilisation réelle pour la mise en place du B2i. À ce sujet on peut dire qu'il y a une prise de conscience, même si les choses ne vont pas aussi vite qu'on le souhaiterait.

En mathématiques, on constate :

- quelques utilisations d'exerciseurs (logiciels téléchargés à partir de sites nationaux, ou de circonscription) ; en général, la pratique de ces exercices ne fait pas l'objet d'une programmation lisible liée aux apprentissages ;

- des utilisations pour la communication, dans le cadre de rallyes ou défis ; quelques exemples peuvent être cités comme math'Isère (réponses par Internet), GEOMEL (toujours dans l'Isère, avec des classes en doublettes ; description et analyse de figures géométriques et de leur agencement, envoi à l'autre classe qui doit réaliser la figure complexe) ; ces rallyes et défis sont à l'initiative des départements ou des circonscriptions, qui jouent ici un rôle essentiel dans l'impulsion ;

- quelques expériences d'usage de TBI, qui sont plébiscités par leurs utilisateurs (évidemment militants), mais qui peuvent se révéler assez convaincantes ;

- quelques usages, rarissimes il faut bien le dire, de logiciels de géométrie dynamique. Pourtant, lorsque c'est le cas, on signale que l'usage de ces logiciels est "facile", efficace, avec tous les élèves (par exemple, en classe d'intégration scolaire). Il est remarquable que des trois usages suggérés par le programme, ce soit justement celui-ci qui est le moins répandu.

Parmi ces pratiques, lesquelles semblent les plus porteuses ?

La communication : contribution des mathématiques au B2i et plus généralement à la formation des élèves dans le domaine numérique ; cet usage contribue aussi à donner des mathématiques une image positive.

L'utilisation en géométrie : articulés à des activités de manipulation et de dessin à la main, les logiciels de géométrie dynamique contribuent à la construction d'images mentale (on déforme, on fait tourner…), et au passage progressif du dessin à la figure, cette dernière ayant un caractère générique que le dessin ne peut avoir. C'est aussi la seule des trois situations d'utilisation dans laquelle l'ordinateur peut clairement être appréhendé comme un outil qui ne soit pas un simple instrument de communication même élaboré : on lui fait faire des choses, on lui commande un travail.

Les exercices d'entraînement : s'ils rencontrent un certain succès chez les élèves, par leur aspect ludique et aussi par le fait qu'en validant en temps réel les réponses à des exercices de difficulté graduée ils mettent à de nombreuses reprises les élèves en situation de réussite, ce qui n'est pas à négliger, on peut se demander ce qu'ils apportent effectivement en terme de formation ; c'est un sujet sur lequel des études poussées seraient certainement nécessaires.

Ce qui peut être fait en termes d'animation et de formation

L'objectif doit être, une fois identifés les apports didactiques, de passer à la vitesse supérieure, de sortir du militantisme :

En formation initiale

- enseigner la pratique des logiciels de géométrie ;

- faire réfléchir aux apports didactiques des différents usages ; valoriser ceux qui sont avérés.

En animation de circonscription

- développer les groupes de suivi (animés par une personne ressource ; rencontres hors temps scolaire sur la base du volontariat) ;

- proposer une aide dans la classe par un ATICE ou un enseignant ressource ;

- proposer des formations clairement identifiées TICE et mathématiques : l'apport didactique des TICE doit être réel, et pour cela une réflexion spécifique s'impose ;

- continuer de promouvoir l'usage d'Internet pour les mathématiques via les rallyes et défis de tous types.

En formation continue

- Proposer des actions de formation longues, type stages filés, permettant l'émergence progressive de ressources dans toutes les écoles.

- Ne pas négliger la nécessité d'une formation à l'outil.

- Insister sur la réflexion didactique : ce n'est pas parce que l'élève est "actif" (= "occupé") qu'il apprend.

L'état des lieux dans le second degré

Xavier Sorbe, inspecteur général, groupe mathématiques

Un état des lieux objectif doit permettre d'apprécier les évolutions et de réaliser des comparaisons, en vue d'assurer un pilotage le plus efficace possible.

Ces dernières années, le volume consacré à l'accompagnement en faveur des TICE représente 12 % des actions de **formation continue**[23].

En mathématiques, environ un quart des plans académiques a pour objet l'intégration des outils informatiques.

Les **usages pédagogiques** sont en très forte progression. On pourrait certes souhaiter que cette évolution soit plus rapide, mais il s'agit d'un sujet complexe réclamant d'importantes remises en question et posant des problèmes de matériel et de formation.

La formation doit être avant tout de nature pédagogique pour favoriser de nouvelles avancées.

Le travail engagé par l'Inspection générale et les corps d'inspection territoriaux (IA-IPR, IEN) afin d'élaborer un état de l'enseignement de la discipline, permet de dégager des évolutions intéressantes. Il confirme tout d'abord les nets progrès réalisés depuis une dizaine d'années. Les incitations institutionnelles ont porté leurs fruits, au moins partiellement. L'usage des TICE devient perceptible dans tous les établissements, même si ce n'est qu'occasionnellement dans certains d'entre eux.

Les enquêtes réalisées dans plusieurs académies mettent en évidence qu'au moins 30 % des professeurs de mathématiques sont des utilisateurs réguliers des TICE dans leur enseignement, tandis que 25 % demeurent réfractaires.

Le rôle moteur des jeunes enseignants est très régulièrement souligné.

On note toutefois que l'utilisation des TICE en collège fait une trop large place aux exerciseurs et que de nombreux professeurs de lycée considèrent ne pas disposer de suffisamment de temps.

[23] Toutes disciplines confondues, source DESCO A10, 2003-04.

Sur un plan général, on sait que 69 % des collèges avaient mis en place le B2i en 2005 (source : SDTICE), que 18% des élèves de collège avaient obtenu cette année-là l'attestation et 13% une validation partielle.

Sur le plan disciplinaire, on dispose par contre de trop peu d'indications objectives quant aux **acquis des élèves** dans ce domaine. En dehors des évaluations au baccalauréat dans certaines séries (L et STG), on n'a pas une vue d'ensemble des compétences des élèves et on ne sait pas non plus précisément dans quelle mesure ces outils leur permettent de mieux apprendre.

Quelle organisation de la formation continue ?

La réflexion didactique et pédagogique doit être au cœur des **contenus**.

Cela requiert de se centrer autour de préoccupations allant au-delà de la seule intégration des outils. Dans cette logique, on peut s'interroger sur la nécessité de continuer à organiser des stages portant spécifiquement sur les TICE.

La mise en œuvre d'une démarche d'investigation dans l'enseignement des mathématiques doit être privilégiée. Trop souvent, l'activité des élèves se résume à traiter des exercices en répondant successivement à des questions sans que celles-ci aient été motivées et sans une approche globale de la situation proposée qui permettrait de prendre du recul.

Les TICE constituent un levier efficace pour susciter cette démarche et, plus largement, sont de nature à relancer la réflexion sur les finalités de l'activité mathématique.

À ce titre, elles peuvent être naturellement et systématiquement intégrées à tous les stages de formation.

Centrer les contenus sur l'activité mathématique des élèves pourrait aussi conduire à organiser des formations dans des classes ou à exploiter davantage les possibilités offertes par la vidéo.

Par ailleurs, il convient de privilégier la promotion des logiciels qui le méritent (géométrie plane, tableur - grapheur, calcul formel).

Les modalités de mise en œuvre doivent amener à toucher un plus grand nombre d'enseignants. Le recours à l'informatique n'étant pas une composante optionnelle des programmes, une certaine détermination est souhaitable qui conduit à diversifier les approches.

Les usages ne peuvent pas se généraliser sur la base d'initiatives de quelques pionniers. Il convient de privilégier les stages d'équipe en établissement qui sont propices à une réflexion collective, permettent d'assurer une cohérence avec les projets d'établissement et une bonne prise en compte des équipements.

L'expression de la demande de tels stages doit naturellement être suscitée.

Dans le même registre, des stages inter-établissements peuvent apporter une dimension supplémentaire en conduisant à confronter les expériences.

Par ailleurs, on ne peut regretter, sans agir, que les stages à public volontaire attirent un nombre insuffisant de professeurs. L'organisation de stages à public désigné est une solution à retenir pour que tous les enseignants bénéficient d'une formation à la mesure des enjeux.

En complément des stages, d'autres voies sont à explorer :

- la valorisation des réussites ;

- la reconnaissance de la formation continue dans la carrière.

Par ailleurs, la mise en place d'une épreuve pratique au baccalauréat, si elle se confirme, pourrait jouer un rôle incitateur et contribuer à développer un appétit de formation.

Les TICE font l'objet d'une certaine permanence parmi les priorités nationales, comme en témoigne la tenue de ce séminaire.

L'essentiel du pilotage de la formation continue se joue à l'échelon académique et doit être assuré par l'institution rectorale. Les inspecteurs garantissent un réinvestissement cohérent, en définissant avec précision les contenus et en choisissant les meilleurs formateurs grâce à leur connaissance du terrain.

Les formations en établissement sur la base de projets offrent l'opportunité d'un pilotage dynamique et doivent rentrer dans le cadre plus large d'une évaluation par les résultats.

Enfin, un vrai partenariat avec les collectivités est nécessaire, dans lequel chacun exerce les compétences qui lui reviennent.

Compte tenu de l'importance des budgets consacrés par les conseils régionaux à l'éducation, certains sont tentés d'aller au-delà de leurs prérogatives, ce qui pourrait donner lieu à des dérives risquant d'entamer la crédibilité du système.

Dans cette période, qui est sans doute de transition pour la décentralisation, un équipement cohérent des établissements exige un travail harmonieux entre l'institution et les collectivités. Celui-ci doit reposer sur un projet académique fort, clairement structuré autour d'objectifs explicites et largement partagés.

Présentation de quelques dispositifs institutionnels d'accompagnement de l'intégration des outils logiciels dans les pratiques des enseignants de mathématiques

Anne Hirlimann, professeure de mathématiques, responsable DT-SDTICE mathématiques

Un état des lieux

Actuellement, les enseignants de mathématiques ont à leur disposition une panoplie d'outils logiciels qui peuvent leur permettre de mettre en œuvre les préconisations fortes des programmes d'enseignement. Cependant les usages restent encore limités. La mise en place du B2i et du socle commun de connaissances et de compétences et l'expérimentation d'une épreuve pratique avec les TICE au baccalauréat scientifique constituent un levier essentiel pour que les enseignants intègrent réellement les usages des TICE dans leurs pratiques pédagogiques. Il convient pour cela de les accompagner, en leur donnant des pistes d'usages, mais aussi des indications qui peuvent les aider à intégrer régulièrement et efficacement ces usages dans leur enseignement. Au niveau local, tant des établissements que des académies, ce travail important peut s'appuyer sur des dispositifs de mise en commun des productions et d'échange des réflexions. Au niveau national, un dispositif de mutualisation des travaux menés dans les académies, qui peut préfigurer des dispositifs d'animation et d'échanges académiques ou plus locaux, a été mis en place.

Des outils logiciels pour enseigner les mathématiques

Deux dispositifs institutionnels nationaux permettent de porter à la connaissance des enseignants des outils logiciels en mathématiques :

- le dispositif de reconnaissance d'intérêt pédagogique, qui donne lieu à l'attribution de la ***marque RIP*** (http://www2.educnet.education.fr/sections/contenus/rip/) ;

- le ***dispositif SIALLE, qui concerne les logiciels libres*** (http://www2.educnet.education.fr/sections/contenus/logiciels-libre/).

Par ailleurs, le ministre de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche a souhaité que chaque nouvel enseignant reçoive, dès son entrée dans la profession, une ***clé USB*** qui lui permette de découvrir la richesse et la variété des ressources numériques pédagogiques dans sa discipline.

http://www2.educnet.education.fr/sections/contenus/priorites/cle-usb-pou

Ce dispositif, qui concerne en 2007 l'Histoire et Géographie, les Sciences physiques et chimiques fondamentales et appliquées, les Sciences de la vie et de la Terre, et pour l'enseignement primaire quelques départements, à titre expérimental, pourrait être étendu aux Mathématiques pour l'année scolaire prochaine. Sur cette clé figurent également des exemples d'usages.

Des pistes d'usages pédagogiques… à leur mise en oeuvre

Un vivier de pistes d'usages pédagogiques mutualisées : EDU'Base Mathématiques

Dans la plupart des académies, des groupes de travail ont élaboré au fil des années des pistes d'usages des TICE en mathématiques, qu'ils ont publiées, sous la responsabilité des corps d'inspection territoriaux, sur leurs sites académiques :
http://www2.educnet.education.fr/sections/maths/animation/acces-aux-sites/)

Ces activités sont accessibles par niveau et par thème à partir d'une base nationale :

http://www.educnet.education.fr/bd/urtic/maths/

Les académies peuvent, si elles le souhaitent, faire sur leur site académique des interrogations de cette base pour les ressources propres à l'académie, par exemple :

http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/new/ressources_lycee.htm

Des vidéos

Des vidéos présentant des usages en collège donnent des indications pour répondre aux questions souvent posées par les enseignants sur la mise en œuvre dans leurs classes d'activités (intégration dans une progression pédagogique, mise en œuvre). Elles figureront dans le DVD qui sera envoyé aux enseignants de collège en accompagnement des nouveaux programmes. Ces vidéos peuvent être consultées à l'adresse :

http://www2.educnet.education.fr/sections/maths/usages/exemples_usages/college

Une approche mutualisée de la conception et mise à disposition de scénarios

Parallèlement, en accompagnement de la prise en compte dans les examens, un appel à propositions a été lancé auprès des académies sur le thème de la « mise à disposition d'activités mathématiques utilisant les TICE et pouvant donner lieu à une évaluation de compétences mathématiques (collège et lycée) ». Des échanges au sein d'un groupe national s'appuient sur les travaux menés dans les groupes académiques impliqués dans cette action et contribuent à un enrichissement mutuel des réflexions.

http://www2.educnet.education.fr/sections/maths/animation/actions-specifi/ticmath0607/activites-mathe

Tout ceci prend son sens à travers un ***réseau d'interlocuteurs*** nommés par les académies, qui, par leur expertise et leur connaissance du terrain, vont assister les corps d'inspection dans leur tâche de repérage de pratiques innovantes ou généralisables et de diffusion de ces pratiques. La lettre d'information TIC'EDU, qui propose des informations nationales qui viennent compléter les informations académiques, constitue un des vecteurs de cette information.

Mathématiques et instruments informatiques : questions de formation

Éric Bruillard, professeur des Universités, IUFM de Créteil, UMR STEF ENS CACHAN INRP

Afin de mieux comprendre comment mettre en place des formations aux instruments informatiques intéressant les mathématiques et leur apprentissage, il convient de différencier trois types d'instruments ou plutôt trois types d'utilisations ou de statuts conférés aux instruments informatisés. Ensuite, nous pourrons préciser les objectifs et modalités de formation ou d'accompagnement que l'on peut leur associer et dresser quelques perspectives.

Statut des instruments informatisés

S'agissant d'instruments informatisés, nous pouvons les séparer en trois grandes classes, selon le rôle qu'ils peuvent avoir dans l'éducation (Baron et Bruillard, 1996 ; Bruillard et Baron, 2006).

1. D'abord les instruments mathématiques ; ils permettent de faire des mathématiques et leur sont spécifiques : logiciels de géométrie dynamique, logiciels de calcul formel, etc. ; ainsi que les *ancêtres* (non informatisés) : compas, règle, etc.

2. Ensuite les outils de communication, de production et d'accès à l'information : les « progiciels » comme les traitements de texte, moteurs de recherche, plates-formes de travail collaboratif, etc. ; ils ne sont pas spécifiques aux mathématiques ; ils interviennent dans l'environnement de travail général des enseignants et des élèves et contribuent à le modifier et à l'enrichir.

3. Enfin les outils pédagogiques : ils relèvent de la technologie éducative et sont utilisés pour faciliter l'enseignement ou l'apprentissage. On peut citer le tableau blanc interactif, les logiciels d'illustration, les exerciseurs… et certains instruments mathématiques.

Dans le premier cas, il y a une responsabilité spécifique des enseignants pour faire acquérir aux élèves une maîtrise suffisante des logiciels requise pour conduire les activités mathématiques. Cela nécessite un apprentissage particulier. Les activités mathématiques sont modifiées conduisant d'une part à les repenser et, dans une perspective curriculaire, à construire des progressions intégrant cette nouvelle instrumentation ; d'autre part à une remise en cause des contenus mêmes d'enseignement et ensuite de leurs modalités d'évaluation (examens, exercices). Cela n'est pas sans poser des difficultés, notamment du fait que cette instrumentation prend souvent en charge une partie de ce que sont censés faire les élèves (par exemple dans certaines maîtrises techniques de calcul ou de traçage) et que les instruments n'ont pas encore été « naturalisés » dans la scolarité précédente des enseignants. Cela pose également des problèmes curriculaires complexes (quand introduire un instrument qui peut rendre inutiles certaines maîtrises auparavant nécessaires). On a alors souvent tendance à « brider » ou restreindre l'utilisation (par exemple n'utiliser un outil automatique de calcul que pour vérifier un calcul fait auparavant), et la notion de tricherie n'est jamais loin. L'acceptabilité par les enseignants dépend de leur vision des mathématiques, c'est-à-dire de leur perception de ce qui est légitime en tant que mathématiques à enseigner. Sans oublier une asymétrie importante entre l'enseignant et l'élève. Le premier a d'autres connaissances pour maîtriser l'instrument, son champ de validité, etc., connaissances dont ne disposent pas les élèves.

Dans le second cas, les technologies faisant partie de l'environnement de travail, les élèves doivent en acquérir une certaine familiarité. Cette dernière s'acquiert en collège principalement dans les cours de technologie, sinon à l'extérieur de l'école. C'est le cadre du B2i (brevet informatique et Internet), et il n'y a pas de responsabilité particulière des enseignants de mathématiques, mais une responsabilité partagée avec d'autres enseignants. Toutefois, les utilisations scolaires sont en opposition avec les utilisations non scolaires (orientées vers la communication, l'immédiateté au contraire de la prise de distance et de la réflexivité, essentielles dans l'apprentissage) et les élèves sont moins compétents qu'on a trop tendance à le penser. On manque encore d'études permettant de situer leur maîtrise effective et une certaine forme d'aisance pour des actions spécifiques masque souvent de grandes difficultés de conceptualisation. Les outils logiciels utilisés sont périphériques au travail mathématique, cela ne change pas les contenus mais les modalités de travail (modes d'accès aux ressources, travail collaboratif, travail distant…).

Dans le troisième cas, aucune maîtrise spécifique n'est attendue des élèves, les outils sont ceux de l'enseignant pour des formes d'action pédagogique ou didactique particulière. Les contenus d'enseignement ne sont pas modifiés, ni les modalités d'évaluation. Il s'agit d'activités choisies par les enseignants pour améliorer leur enseignement, motiver les élèves, illustrer les concepts mathématiques, etc. Il n'y a pas de responsabilité sur les instruments utilisés mais cette utilisation dépend des infrastructures installées et des gestes acquis par la profession, sans tradition encore établie. Eu égard à la liberté pédagogique des enseignants, cela ne peut être qu'optionnel, sauf à imposer une pédagogie « officielle ». La question de la plus-value pédagogique se pose ici de manière récurrente. Le problème du temps revient souvent. Pour les enseignants, il ne faut pas en perdre, la maîtrise des instruments n'est donc pas visée. Ces derniers sont subordonnés à un objectif notionnel spécifique, ce qui incite à gommer les obstacles éventuels dans leur utilisation, ne permettant pas aux élèves d'en acquérir une bonne maîtrise.

Ces trois rôles ne sont pas complètement indépendants et il y a des questions insistantes liées au mélange de ces rôles, voire dans leur confusion.

Ainsi, se pose le problème de la disposition d'un environnement de travail pour les élèves et la nécessité de compétences effectives des élèves (traitement de texte, outils de recherche, etc.) pour les activités pédagogiques menées en classe ou à la maison.

Les outils généraux peuvent être spécialisés pour les activités mathématiques. C'est le cas, par exemple, du traitement de texte avec les notations mathématiques. À ce propos, la question des notations est centrale, puisque les notations dépendent des instruments que l'on a à disposition pour les manipuler et l'informatique en offre de très nombreux (permettant par exemple le passage des notations linéaires à des notations planes).

De manière duale, des connaissances mathématiques peuvent s'avérer indispensables pour la maîtrise des outils généraux. C'est, par exemple, le cas des tableurs, qui interviennent dans des filières non scientifiques du lycée et qui nécessitent une bonne maîtrise de l'algèbre, souvent non acquise par les élèves.

Mais la question la plus délicate est sans doute celle liée à la confusion entre technologie éducative et instruments mathématiques : l'incertitude de statut des instruments introduit des difficultés particulières. C'est logique, puisque lorsque les instruments sont disponibles, ils ne sont pas encore « naturalisés » et sont avant tout des adjuvants pédagogiques. Dans une phase d'introduction, de nouveaux instruments ouvrent de nouveaux possibles, permettent de nouvelles activités… Un long processus est nécessaire, une introduction dans les programmes, la diffusion d'activités et de progressions, mais aussi un processus de légitimation collective (parmi les enseignants de mathématiques) pour aller vers la généralisation. Mais il peut y avoir une sorte de paradoxe : soit on restreint la liberté pédagogique des enseignants, soit on rend les instruments optionnels. Sinon, il faut qu'ils acquièrent un statut d'instrument mathématique. De manière duale, des outils ayant perdu leur statut d'instrument, en ce sens, deviennent utiles comme technologie éducative. C'est le cas du boulier ou de la règle à calcul. En effet, le fonctionnement des instruments informatiques est caché. La mise en œuvre d'instruments obsolètes peut avoir des vertus pédagogiques.

Enfin, les technologies issues de l'informatique ont des spécificités intéressantes pour l'apprentissage :

- ce sont le plus souvent des instruments incomplets ou imparfaits (sinon cela supprime l'intérêt de l'apprentissage), conduisant à modifier les tâches à effectuer ;

- ils facilitent l'expérimentation et ouvrent des activités de modélisation ;

- les multiples traces qui peuvent être consultées, rejouées, modifiées permettent de « voir » et de traiter des processus et favorisent les activités réflexives.

Mais tout cela n'est que potentiel. Pour que les enseignants puissent en tirer parti, il faut réfléchir à des modalités de formation ou d'accompagnement qui sont différentes selon les trois cas que l'on vient de décrire.

Une formation initiale à repenser

Une nouvelle formation professionnelle des enseignants est à construire pour septembre 2007, s'accompagnant d'une réforme des IUFM (instituts universitaires de formation des maîtres) qui devraient être recréés comme des écoles internes des universités (avant le 1er janvier 2008). Une organisation nouvelle est prévue puisque après le concours, il y aura l'année de stage suivie de deux années après la titularisation où des compléments de formation sont prévus. Une approche « par compétences » est également recommandée.

Diverses catégories de formateurs et plusieurs lieux (l'IUFM, les terrains de stage en responsabilité et en tutelle, puis les terrains d'affectation) sont concernés (voir figure 1).

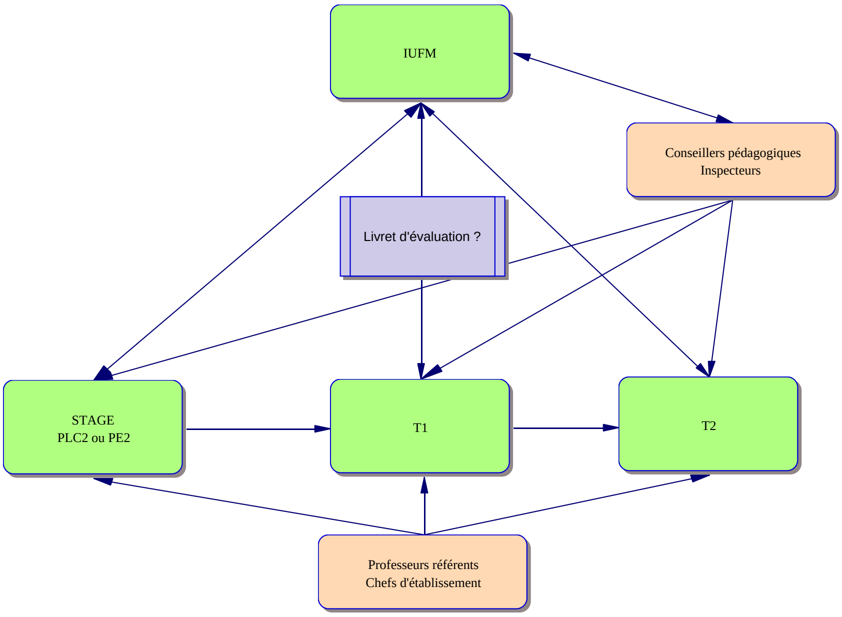


Figure 1. **La formation initiale des enseignants**

Concernant les instruments mathématiques, l'utilisation avant le concours est souvent encore faible. Il n'y a pas de légitimation à l'université. A l'IUFM, un objectif premier serait de montrer comment on peut faire des mathématiques instrumentées, puis dans un deuxième temps, comment on peut apprendre au cours d'activités instrumentées. Il s'agit de rendre légitime l'utilisation d'instruments informatisés spécifiques aux mathématiques – un professeur de mathématiques se doit de connaître un système de calcul formel, un logiciel de géométrie dynamique, etc. – et d'aider à construire une nouvelle identité professionnelle des enseignants de mathématiques. Notons par ailleurs que les instruments eux-mêmes peuvent renseigner sur les difficultés probables des élèves (ce qui est difficile à faire automatiquement, par exemple avec les résolveurs en démonstration, est souvent aussi ardu pour les élèves).

Concernant les outils généraux, il importe de les utiliser dans le cadre de la formation, c'est-à-dire que les stagiaires puissent « vivre » des situations de formation dans lesquelles ces outils jouent un rôle. De nouvelles modalités de formation des enseignants pourraient être mises en place, autour du travail collaboratif, de la mutualisation (échange de documents) jusqu'aux travaux collectifs permettant la prise en compte du point de vue de l'autre. Comme la présence d'une plate-forme de travail ne garantit en rien le développement de travaux coopératifs, il faudrait installer des situations spécifiques qui les suscitent.

Enfin, s'agissant d'outils pédagogiques, ils se travaillent au sein même des classes, avec la supervision éventuelle des formateurs et des échanges entre stagiaires et formateurs. Engager les stagiaires dans une réflexion, à la fois individuelle et collective, sur leur propre pratique peut s'avérer utile.

L'enjeu principal de la mise en place d'une plate-forme de travail collaboratif, dans une formation en alternance, est de conserver et d'étendre le lien entre l'institution de formation, l'IUFM, et les terrains d'exercice. Un processus de professionnalisation nécessite une autonomisation croissante vis-à-vis de l'IUFM. Il ne s'agit pas d'une simple « intégration » au terrain mais de la construction progressive d'une identité professionnelle. Dans cette élaboration, il importe de remplacer l'opposition stérile entre théorie et pratique par une problématisation partant du particulier pour aller au général. Les plates-formes de travail et les outils de discussion synchrones et asynchrones associés peuvent contribuer à favoriser ces processus de problématisation.

Enfin, quel modèle sous-jacent à cette nouvelle formation initiale des enseignants ? Va-t-on se contenter de listes de compétences, avec des objectifs de simple complétion de ces listes (modèle d'accumulation) ou va-t-on élaborer des modèles plus intégrés, tirant parti de l'étalement de la formation sur trois ans ?

En particulier, dans un climat plus serein, après la titularisation, la collecte de traces peut fournir des éléments pour réfléchir aux progressions annuelles, vues comme un objet déjà vécu, passant de l'urgence au regard réflexif. L'enjeu pour les instituts de formation est d'animer une communauté construisant peu à peu sa professionnalité, y intégrant les instruments informatisés du travail scolaire et les instruments mathématiques spécialisés, ainsi qu'une dimension plus collective du travail d'enseignant.

Références

BARON Georges-Louis et BRUILLARD Éric (1996). *L'informatique et ses usagers dans l'éducation*. Presses Universitaires de France, l'Educateur, Paris, 312 p.

BRUILLARD Éric, BARON Georges-Louis, (2006). Usages en milieu scolaire : caractérisation, observation et évaluation. *In GRANDBASTIEN Monique et LABAT Jean-Marc (dir.), Environnements informatiques pour l'apprentissage humain,* Traité IC2, Lavoisier, Paris, p. 269-284.

Ateliers

Série A : « Quelles évolutions des contenus avec les TICE ? »

Atelier A1

Le calcul, continuité du primaire au collège

Intervenants :
Michèle Chevalier-Coyot, IGEN groupe mathématiques
Benoît Ducange, professeur de mathématiques, académie d'Amiens et responsable DT-SDTICE Mathématiques
Stéphane Carpentier, IEN enseignement du premier degré, Pas-de-Calais, académie de Lille

L'objet de l'atelier est de mettre en évidence en quoi les outils logiciels (sur ordinateur ou calculatrice) font évoluer les contenus d'enseignement dans le domaine du calcul à l'école et au collège.

Les nouveaux programmes de mathématiques de l'école et du collège ainsi que les documents d'accompagnement insistent beaucoup plus que par le passé sur l'importance de la construction des apprentissages en calcul et précisent notamment que le calcul assisté par une calculatrice (ou un ordinateur) trouve naturellement sa place dans l'enseignement dispensé en mathématiques.

Des textes officiels se dégagent au moins trois champs d'utilisation des outils logiciels :

- ils peuvent être utilisés comme des outils techniques au service du calcul, dans la résolution de problèmes ou d'exercices ;
- ils peuvent offrir des supports intéressants pour atteindre certains objectifs assignés à l'enseignement des mathématiques ;
- ils peuvent contribuer à la formation générale des élèves en les familiarisant à leur environnement de futurs adultes.

Partie 1 : La calculatrice

*À l'école primaire***,** l'utilisation de la calculatrice est guidée par l'existence d'un document d'accompagnement consacré à ce sujet et qui propose de nombreuses activités à mettre en place dans la classe.

La présentation qui suit cherche à montrer en quoi la calculatrice modifie les contenus d'enseignement, au delà de l'apprentissage nouveau des fonctionnalités de l'instrument, mais aussi quelles sont les possibilités nouvelles offertes à l'enseignant d'aborder les nombres, les opérations et la résolution de problèmes.

L'opérateur constant est l'une des fonctionnalités les plus intéressantes de la calculatrice.

Au cycle 2, il permet par exemple à l'élève, en répétant des ajouts de 10, de voir rapidement l'effet obtenu (évolution du chiffre des dizaines et passage à la centaine supérieure) et de mieux comprendre l'addition. C'est l'aspect dynamique au niveau de l'affichage qui est ici en jeu. Parallèlement, la compréhension de la numération décimale est renforcée.
Au cycle 3, il en est de même quand on procède à des divisions réitérées par 10 (réciproquement à des multiplications par 10), l'élève assiste à la disparition progressive d'éventuels 0 terminaux du nombre entier entré initialement puis voit une virgule apparaître et se décaler progressivement. La fameuse et dangereuse « règle des zéros » est ici replacée dans le contexte plus général des nombres décimaux, la compréhension de ces derniers est aussi renforcée.

Dans le domaine du **calcul réfléchi**, l'opérateur constant peut aussi être utilisé avec profit. Des ajouts successifs de 99, par exemple, à un nombre donné se traduisent sur l'écran de la calculatrice par une évolution simple qui attire l'œil des élèves au niveau du chiffre des unités. L'émergence d'une procédure de calcul réfléchi est ainsi facilitée.
Les défis lancés au maître par les élèves sont aussi porteurs : il s'agit de proposer des opérations au maître qui doit trouver rapidement les résultats. Les élèves contrôlent les réponses à l'aide de leur calculatrice. L'expérience montre que les élèves choisissent des exemples qui ne posent pas de problème à un enseignant. Ils imaginent que la difficulté naît de la taille des nombres et ne s'intéressent pas *a priori* à la proximité de ceux-ci de 100, 1000, etc. Une proposition fréquente des élèves de CE1 est ainsi « 99 + 99 ». La réponse rapide et exacte du maître apparaît comme aussi magique que le fonctionnement de la calculatrice et les élèves veulent connaître le « truc ». Quelle meilleure occasion trouver pour aborder le calcul réfléchi ?

Enfin les limites, réelles ou imposées par le maître, de l'instrument sont des sources intéressantes de **nouveaux problèmes.** Ainsi le calcul à la calculatrice d'une multiplication sans pouvoir utiliser la touche dévolue à cet effet entraînera les élèves à mettre en évidence les propriétés de l'opération utilisées par la **technique opératoire**.

Le document d'accompagnement propose d'exploiter les limites de la calculatrice en prenant comme exemple le produit 231456 × 789. Les capacités d'affichage sont insuffisantes et il est nécessaire de procéder par étapes. La distributivité de la multiplication sur l'addition est ainsi mise en valeur.

Demander d'afficher un nombre et, par additions successives, en obtenir un autre, en un nombre limité d'étapes, amènera les élèves à élaborer des procédures d'estimation de la différence qui ne correspondent pas cette fois à une technique opératoire et qui seront ensuite très utiles pour le calcul mental.

On voit sur ces quelques exemples que **le calcul instrumenté ne s'oppose pas aux autres formes de calcul** mais qu'il peut les enrichir, faciliter ou conforter leur pratique.
Des problèmes pour chercher et de premiers raisonnements déductifs peuvent aussi être initiés par la calculatrice : si on demande aux élèves d'afficher 100 le plus rapidement possible en n'utilisant que les touches 5, ×, + et = de leur calculatrice, qu'on reprend le même problème avec 5, ×, – et = puis en autorisant l'utilisation des touches 5, ×, +, – et = , les essais sont rapides, l'organisation et la notation des opérations effectuées sont délicates, les raisonnements pour convaincre qu'on est parvenu à une solution optimale sont riches ... et la motivation des élèves est garantie.

Au collège, **l'instrumentation du calcul** se poursuit avec la rencontre de nouvelles formes numériques. Le passage à l'écriture en ligne imposé par la calculatrice va être l'occasion de s'interroger, par exemple, sur le rôle de « regroupement » de la barre de fraction et plus généralement sur les priorités opératoires.

En outre, l'introduction de nouveaux nombres tels les radicaux est modifiée par l'utilisation de la calculatrice. La recherche, par exemple, de la longueur du côté d'un carré d'aire 5cm² est l'occasion, d'une part, de travailler sur une démarche de recherche de valeur approchée basée sur le sens et, d'autre part, de mener une réflexion sur les nombres proposés. On observe donc ici en quoi **l'usage de la calculatrice peut changer le mode d'apprentissage et le contenu lui-même.**

L'usage de la calculatrice peut aussi conduire à des modes de raisonnement tout à fait formateurs et originaux comme dans l'exemple présenté dans le document d'accompagnement à la mise en œuvre des programmes de collège[24] où l'on prouve l'égalité des deux nombres $\frac{88}{209}$ et $\frac{56}{133}$ en exploitant les limites imposées par l'affichage de la calculatrice.

Débats

Les premières remarques portent sur la faible utilisation des calculatrices dans les classes et ceci, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les enseignants s'appuient sur des fichiers et des manuels dans lesquels les mises en situation utilisant la calculatrice sont peu présentes, même si, s'agissant des manuels, des progrès sont à relever. Mais la raison la plus importante semble être l'idée que l'apprentissage ne peut se faire que dans la « souffrance » : dans ces conditions, la calculatrice perçue comme un outil facilitant est considérée comme nuisible aux apprentissages.
De fait, les nouveaux apprentissages liés à l'utilisation de la calculatrice sont largement sous-estimés. Mais, on constate que là où les enseignants ont pu bénéficier de formations, l'usage de la calculatrice est nettement valorisé. Le point le plus positif semble être l'usage de la calculatrice pour différencier les exercices. Cet usage peut être jugé peu prestigieux. Il n'en est pas moins riche, notamment dans les classes regroupant plusieurs niveaux, à l'école primaire.

Partie 2 : Le tableur et les logiciels de calcul formel au collège

Le tableur, dont les utilisations sont multiples, peut être utilisé à bon escient au collège pour **« entrer » dans le calcul littéral**. Il permet en effet de passer d'une série d'instructions à des expressions numériques puis à des formules littérales. C'est le cas par exemple pour les exercices où les élèves ont à appliquer une série d'instructions à des nombres et à découvrir une particularité du résultat.

Dans un premier temps, ils appliquent la suite d'instructions à des nombres qu'ils auront choisi puis ils construisent dans le tableur les formules permettant de trouver le nombre final en plusieurs colonnes puis en une colonne. Arrivés à ce stade et après avoir constaté facilement, grâce au tableur, la particularité des nombres obtenus, ils obtiendront naturellement la forme littérale réduite de l'expression permettant de répondre à la question. De telles pratiques illustrent bien en quoi **l'utilisation du tableur peut changer les modes d'apprentissage.**

---

[24] Projet de document d'accompagnement - Le calcul numérique au collège - Janvier 2007
Voir également l'article de Y. Chevallard, "La calculatrice, ce bon objet. La calculatrice en classe : instrument tout puissant, tombeau de la pensée ou laboratoire très sûr ?", publiée dans le numéro 54 des Dossiers de l'ingénierie éducative, intitulé "Des outils pour les mathématiques", avril 2006.

Cet outil permet également de **rendre accessible des problèmes** qu’il serait difficile de résoudre « à la main » et ainsi de **modifier les contenus proposés.**
En effet, l’utilisation du tableur donne accès à des conjectures qui permettent de poser les problèmes de manière plus ouverte.

L’utilisation *d’un logiciel de calcul formel* peut aussi rendre accessibles des problèmes alors même que les élèves ne maîtrisent pas encore la technique de résolution. C’est le cas, par exemple, pour les problèmes de mise en équation.
Cette fois, c’est **la façon dont on enseigne les mathématiques qui est modifiée** par l’usage de cet outil puisqu’une nouvelle liberté pédagogique est ainsi offerte aux enseignants.

Débats

Les échanges portent sur la pertinence des outils spécifiquement développés pour l’enseignement des mathématiques : calculatrices virtuelles paramétrables (un cahier des charges est détaillé dans le document d’accompagnement de l’école, mais les calculatrices du commerce ne répondent que partiellement aux attentes) ou tableurs spécifiques tels celui décrit dans le Schéma de l’édition numérique pour l’enseignement (SCHENE).
Le fait que l’usage de ces outils spécifiques constitue une première étape dans les apprentissages des élèves mais que, à terme, ceux-ci doivent maîtriser les outils génériques, fait consensus. Cela ne pose pas de difficulté car les élèves s’adaptent très facilement à la superposition des contraintes : celles données par l’enseignant et celles, plus techniques, imposées par l’environnement numérique.

Partie 3 : Les autres outils : « exerciseurs » et « vérificateurs numériques ou algébriques »

Les exerciseurs sont parmi les outils logiciels les plus utilisés en mathématiques au collège. Si leur pertinence dans le calcul mental automatisé n’est plus à démontrer, il est important de garder un regard critique sur ces outils dans les autres domaines.

Un des avantages de leur utilisation est d’alléger la tâche de correction du professeur et de favoriser une mise en activité des élèves en leur permettant de progresser à leur rythme dans un environnement stimulant. Mais leur utilisation peut aussi avoir un effet réducteur sur le richesse et la diversité des activités proposées, compte tenu des contraintes techniques à respecter, ainsi que sur l’initiative laissée aux élèves. Ceci conduit à être très prudent dans l’usage de tels outils.
Certains exercices présentent aussi des défauts dont l’impact sur les utilisateurs peut être très néfaste dans le cadre d’une utilisation autonome. C’est ainsi que, dans tel exercice portant sur l’addition de deux fractions, la forme de l’écriture imposée tend à laisser penser que la fraction n’est pas un nombre en lui-même mais la superposition de deux nombres séparés par un trait. De plus, le formatage du calcul à effectuer conduit à la mise en place d’une recette plutôt qu’à l’acquisition d’une véritable méthode de calcul basée sur des règles.

Les vérificateurs numériques et algébriques, en revanche, tout en conservant les mêmes objectifs (auto-évaluation, travail différencié) permettent un véritable travail autonome des élèves en laissant la place à une plus grande diversité des démarches et des formes de réponse.
Par exemple, pour un exercice classique de développement ou de factorisation d’une expression algébrique, le logiciel signale à chaque étape de l’écriture si l’expression obtenue est égale à celle de départ et est capable de dire si c’est l’expression développée (ou factorisée) attendue. En cas d’erreur, l’élève peut revenir sur ce qu’il a déjà écrit sans recommencer tous les calculs et retrouver lui-même son erreur. C’est une démarche tout à fait formatrice, difficile à mettre en œuvre sans ce type d’outil.

Débats

Si l’usage des outils logiciels engendre de nouvelles démarches d’apprentissage et enrichit les contenus enseignés, leur mise en œuvre dans la classe nécessite du temps, ce qui fait craindre que cela se fasse au détriment d’autres apprentissages.

Ainsi, la calculatrice pourtant peu utilisée est souvent accusée d’être responsable d’une maîtrise moins assurée des techniques opératoires.

De fait, l’instrumentation du calcul ne doit pas entraîner une baisse de compétence des élèves dans ce domaine si l’utilisation que l’on fait de la calculatrice ou des outils logiciels est pertinente, les exemples présentés le montrent.

Quant aux exerciseurs, ils peuvent dans ce domaine jouer leur rôle et permettre un entraînement en dehors du temps scolaire pour les élèves qui en ont besoin.

Atelier A2

Calcul formel : contenus et usages au lycée général et technologique

Intervenants :
Jean-Louis Bonnafet, professeur de mathématiques, académie de Lyon
Christian Brucker, professeur de mathématiques, académie de Strasbourg
Philippe Fortin, professeur de mathématiques de l'académie de Bordeaux

Cet atelier avait pour but d'apporter quelques éléments de réponse aux questions soulevées par l'utilisation de logiciels de calculs formels au niveau des classes de lycée. Quels apports peut-on espérer de l'utilisation de ces logiciels ? Quels types d'usage ? Quels changements de pratiques peut-on en attendre ? Ces logiciels nécessitent-ils un apprentissage spécifique ? Sont-ils facilement accessibles ?

La première partie de cet atelier a fait l'objet d'une présentation basée sur un diaporama[25] et différents exemples d'utilisation directe de logiciels de calcul formel (Maple, Derive, TI-Nspire).

Cette présentation a débuté par un rappel des principaux outils disponibles dans le domaine du calcul formel (logiciels commerciaux comme Derive, Maple ou Mathematica, logiciels libres comme Maxima ou Xcas, calculatrices de différents constructeurs, outils en ligne comme Euler, Wims ou Giac).

Elle s'est ensuite poursuivie par une partie comportant différents exemples de type d'utilisation des outils de calcul formel au niveau du lycée :

- aide pour la mise en œuvre de nouvelles méthodes (par exemple lors de la résolution pas à pas, guidée par l'élève, d'un système d'équations) ;
- aide à l'introduction de nouveaux concepts (exemple de la dérivation) ;
- assistant pour les calculs annexes (comme une décomposition en éléments simples préliminaire à une recherche d'asymptote ou un calcul de primitive) ;
- possibilité d'aborder des problèmes plus riches, grâce à la prise en charge de certains calculs techniques ;
- utilisation pour la démonstration de conjectures obtenues après une étude expérimentale (illustrée par l'exemple de la position de l'orthocentre d'un triangle dont les sommets se trouvent sur une hyperbole équilatère, et par la résolution de l'exercice 001 de l'épreuve expérimentale en terminale S) ;
- possibilité d'explorer rapidement des approches multiples d'un même problème (par exemple dans la résolution de l'exercice 003 de l'épreuve expérimentale en terminale S, où l'on peut choisir différents paramétrages pour caractériser la configuration optimale).

[25] Cf. le diaporama, dans les annexes p.143.

Les copies d'écrans contenues dans le diaporama joint à ce compte rendu permettent de retrouver les principaux éléments de ces exemples.

Cette présentation des apports possibles du calcul formel dans l'enseignement au niveau des classes de lycée s'est poursuivie par une partie soulignant l'importance d'une formation à l'utilisation de ces outils, pour les élèves, comme pour leurs professeurs.

Parmi les points qu'il est manifestement nécessaire d'étudier lors de cette formation, on pourra citer en particulier :

- les questions relatives au choix du domaine des calculs (**R** ou **C)** ;
- les problèmes soulevés par la gestion des paramètres (par exemple lors de la résolution d'un système d'équations) ;
- la nécessité d'une bonne compréhension des mécanismes de simplification utilisés de manière systématique par certains logiciels ;
- la diversité des expressions retournées par différents logiciels de calcul formel lors d'un même calcul (cela est tout particulièrement vrai lors des calculs de primitives).

Il semble également nécessaire de bien comprendre que la réponse à un « simple » test d'égalité ou d'inégalité entre deux nombres réels peut s'avérer très vite problématique sauf quand on se restreint à des ensembles de nombres bien spécifiques.

En résumé, un véritable apprentissage est nécessaire pour utiliser correctement ces outils, et il semblerait indispensable d'inclure cet apprentissage dans les programmes.

Christian Brucker et Jean-Louis Bonnafet ont complété cet exposé par une présentation d'exemples déjà étudiés dans leurs classes, ou destinés à être prochainement étudiés.

Une discussion s'est ensuite engagée avec le groupe des personnes assistant à cet atelier. On pourra souligner la densité des échanges, qu'il est difficile de reprendre intégralement ici.

Parmi les points abordés :

- importance de la formation (et l'information) à un logiciel. Le nombre d'activités proposées dans le domaine de l'utilisation du calcul formel est encore trop limité ;
- présence des implicites dans l'écriture des expressions mathématiques (comme par exemple l'ambiguïté des notations du type $x(x+1)$, $f(x+1)$). Il n'est pas possible d'ignorer ces implicites lorsque l'on passe à l'utilisation des logiciels de calcul formel ;
- question du matériel : comment peut-on avoir le matériel ? À quel coût ? (matériel ou logiciel). Consensus des intervenants ayant répondu à cette question sur le fait que les équipes qui déposent des projets obtiennent des financements ;
- réflexion sur les effets d'échelle : achat d'un modèle de machine pour tout le lycée, achat d'un logiciel pour tous les établissements d'une région. Clé USB fournie aux néo-titulaires ;
- augmenter la facilité d'utilisation. Certains logiciels nécessitent la connaissance de trop nombreuses fonctions. À l'inverse les logiciels disponibles sur calculatrice intègrent généralement le choix de type de simplifications effectuées. La présence de menus paramétrables semble souhaitable. Sur les logiciels de calcul en ligne, le paramétrage est fait en fonction de l'exercice proposé ;
- des élèves utilisant des outils de calcul formel font-ils des mathématiques ? Cela dépend de la nature de l'activité pédagogique proposée ;

- citation d'un jugement de Michèle Artigue sur l'utilité de tous ces outils. Elle n'est pas certaine pour l'enseignement des mathématiques d'aujourd'hui, mais elle semble indiscutable pour l'enseignement des mathématiques dont nos élèves auront besoin demain ;
- combien de temps faut-il pour former les élèves ? Il semble nécessaire d'accepter de passer du temps pour permettre une prise en main des logiciels. C'est ensuite la pratique régulière qui permettra d'augmenter le niveau de maîtrise du logiciel ;
- il reste beaucoup de choses à apprendre aux élèves avant d'aborder de manière profitable les mathématiques avec les outils et trouver des stratégies de classe qui fassent cohabiter les concepts avec et sans machine. Il est nécessaire de repenser notre approche pédagogique et cette réflexion doit être collective au sein d'un établissement. Les choix de calculatrices ou de logiciels doivent se faire par l'ensemble de l'équipe au sein d'un établissement. Jean-François Canet indique qu'à Montpellier, les enseignants ayant utilisé les outils logiciels ont dit que cela changeait leur manière d'aborder leur progression sur l'année ;
- Christian Brucker insiste sur l'importance de permettre l'utilisation ponctuelle du vidéoprojecteur par le professeur. Il mentionne également l'intérêt de l'utilisation de cet outil par les élèves eux-mêmes ;
- un intervenant souligne que l'utilisation du calcul formel est bénéfique aux élèves qui ont des difficultés, aux élèves brillants, mais aussi aux professeurs, pour la conception de nouveaux exercices ;
- pour compléter les points déjà indiqués dans l'exposé, l'un des participants souligne le problème de la simplification d'expressions contenant des entiers comme par exemple $\cos(n\pi)$ ou encore $(-1)^{2n+1}$;
- quelles sont les mathématiques que l'on peut faire avec ce type d'outils ? Qu'évalue-t-on ? (dans les réponses : leur capacité d'initiative) ;
- question sur les programmes de lycée professionnel. Quelles parties doit-on réellement conserver ? Le calcul formel n'offre-t-il pas une possibilité d'offrir aux élèves parfois en difficulté sur des points techniques d'aborder de manière plus satisfaisante les points qu'il serait réellement utile de traiter ?
- à propos des baccalauréats professionnels et des BEP, un participant précise que les projets de programmes intègrent les usages d'outils logiciels (tableurs et logiciels de géométrie dynamique) ;
- Jean-François Canet souligne qu'outiller le calcul algébrique ce n'est pas le supprimer. Il est nécessaire de bien connaître le calcul algébrique pour utiliser correctement les logiciels.

Atelier A3

Géométrie au collège : articulation entre tracés effectifs à la main et représentations à l'écran

Intervenants :
Brigitte Jauffret, IA-IPR de mathématiques de l'académie d' Aix-Marseille
Francis Petit, IA-IPR de mathématiques de l'académie de Lyon
Stéphane Clément, professeur de mathématiques, académie d'Aix-Marseille

On peut envisager d'utiliser des logiciels de géométrie en visualisation collective ou en travail individuel en salle d'informatique pour :

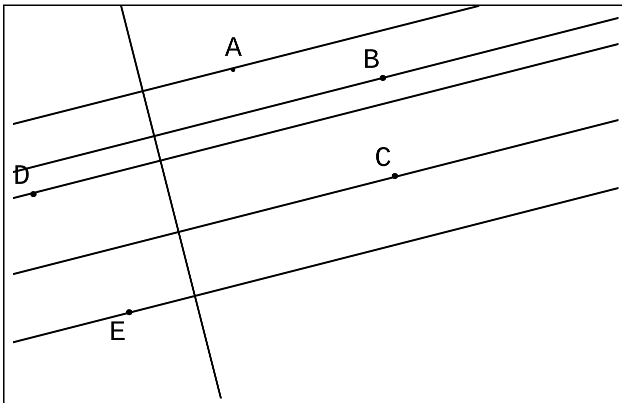
- renforcer des images mentales de configurations du plan ou de l'espace ;
- aider à distinguer « dessin » et « figure » ;
- servir de support à l'introduction de notions de cours ;
- élaborer des conjectures.

La présentation d'activités pour divers niveaux (du cycle 3 à la classe de troisième) permet d'illustrer et de susciter le débat sur les points suivants :

- pour quels types d'activités est-il pertinent de mettre en œuvre un logiciel de géométrie ?
- quels sont les rôles respectifs des logiciels de géométrie et des activités « papier crayon » dans l'appropriation des connaissances et compétences ?

« Voir » dans le plan : exemple d’un défi entre l’école et le collège

À l’aide d’un logiciel de géométrie, on a tracé une droite et ses perpendiculaires passant par des points donnés (mobiles dans le plan). Le défi consiste à faire en sorte que le moins de droites possible restent à l’écran.

	En faisant bouger les points, les élèves perçoivent dans un premier temps que des droites perpendiculaires à une droite donnée sont parallèles et aussi que des droites parallèles peuvent être confondues. Mais toutes leurs tentatives pour rendre confondues les deux droites perpendiculaires restent vaines… L’intérêt majeur de ce travail a été mesuré l’année suivante car on a constaté un gain de 20% sur les items de l’évaluation sixième testant la distinction « parallèle - perpendiculaire » ainsi qu’une installation durable et solide des notions de droites parallèles et perpendiculaires.

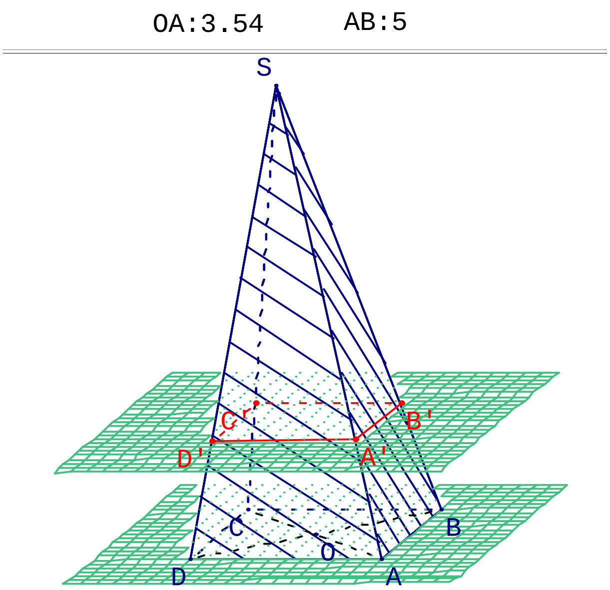
« Voir » dans l’espace : deux exemples qui mettent en œuvre le logiciel « GeospacW ».

En visualisation collective : le cube éclaté.

ABCDEFGH est un cube. On le tronque en ôtant les solides S1 : ADED, S2 : FEGB, S3 : GCBD, S4 : DHAC. Que reste-t-il du cube une fois les solides S1, S2, S3 et S4 enlevés ? Justifier la réponse. (Possibilité de demander de calculer le volume du solide restant, ainsi que son patron).

Ce type d’activité doit impérativement intégrer un travail papier crayon et éventuellement un travail de construction des objets. Il faut par ailleurs noter une difficulté concernant les « patrons » réalisés par le logiciel utilisé ici (GeospacW) : ils sont le plus souvent représentés en perspective !

En travail individuel : section plane de pyramide



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD et de sommet S. On appelle O le centre de symétrie du carré. On a : SO = 12 cm et SA = 13 cm.

Une section plane de cette pyramide parallèlement à la base ABCD coupe [SO], [SA], [SB], [SC] et [SD] respectivement en O', A', B', C' et D'. On donne S0' = 9 cm.

La figure vous est donnée : ouvrir le fichier pyra.g3w, vous pouvez la manipuler avec le clic droit de la souris. La touche A permet d'afficher ou de cacher les deux plans parallèles. Par la suite vous pouvez vérifier vos résultats en utilisant la commande : créer > affichage > longueur d'un segment.

1. *Déterminer AO.*

2. *Déterminer AB.*

3. *Déterminer A'B'.*

4. *Calculer le volume des pyramides SABCD et SA'B'C'D'.*

Tous vos calculs doivent être justifiés.

Dans les deux cas, le logiciel permet de changer le plan de face et ainsi de faciliter la vision des figures planes en jeu. On peut aussi l'utiliser pour vérifier les résultats numériques obtenus.

Mais, la manipulation effective des solides reste indispensable.

C'est l'articulation entre les différentes approches (représentations planes, patron, solide, représentation du solide par le logiciel) qui permettra aux élèves de s'approprier la notion.

Ici, on peut noter que le logiciel peut servir d'intermédiaire entre la manipulation du solide et sa représentation (en perspective cavalière par exemple).

Distinction « dessin / figure » à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

Choisir deux points A et B dans le plan. Construire un point C tel que le triangle ABC soit rectangle en C.

Différentes procédures sont envisageables :

1 - l'élève marque trois points et les place de sorte que le triangle ABC semble rectangle en C. Il peut même faire mesurer l'angle de sommet C et modifier son dessin ;

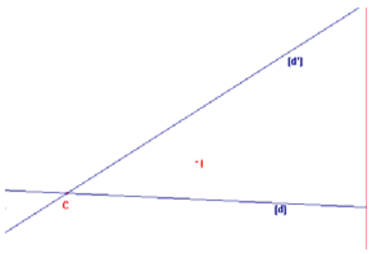
2 - l'élève fait tracer une droite passant par A puis sa perpendiculaire passant par B ;

3 - l'élève place un point C sur le cercle de diamètre [AB] ;

4 - L'élève utilise la notion de médiatrice.

Si le triangle rectangle résiste au déplacement des points A et B, c'est que l'élève a utilisé des propriétés (cas 2, 3 et 4), sinon (cas 1) il est encore dans le cadre du dessin. De nouveau, l'utilisation du logiciel permet d'accompagner les élèves vers la conceptualisation.

Problème de construction



Soient (d) et (d') deux droites sécantes en C et I est un point n'appartenant pas aux droites (d) et (d').

Construire le parallélogramme CHOU de centre I tel que H appartienne à la droite (d) et U à la droite (d').

Dans un premier temps, il semble que l'ordinateur ne soit pas utile et qu'une figure réalisée à main levée permette mieux d'analyser la configuration attendue.

Il apparaît toutefois que le logiciel est un outil de validation des résultats et qu'il offre aux élèves la possibilité de faire de nombreux essais peu coûteux en temps et aussi de développer d'autres stratégies : par exemple, tracer d'abord un parallélogramme à partir des droites (*d*) et (*d'*) puis le déformer pour qu'il soit de centre I conduit à une autre analyse de la figure. De plus, le logiciel permet d'élargir le problème par l'exploration d'autres configurations selon la position du point.

Par ailleurs, on peut envisager de ne pas fournir à l'élève certaines primitives de construction proposées par le logiciel. Ainsi, si l'on souhaite travailler exclusivement avec l'outil « symétrie centrale », les commandes concernant le tracé de droites parallèles peuvent être masquées.

De nouveau, il apparaît indispensable que les élèves soient entraînés à effectuer de nombreux allers-retours entre l'écran et la figure codée tracée sur papier. La confrontation de ces deux approches devrait permettre d'élaborer une solution qui leur est propre.

Introduction de notions de cours

Étude de deux exemples de mise en œuvre d'un logiciel de géométrie en classe de quatrième.

Cosinus d'un angle aigu

On donne un triangle OMN rectangle en O. A est un point de la demi-droite [OM), et B le point de la demi-droite [ON) tel que (AB) et (MN) sont parallèles. On fait calculer et afficher les quotients ON/OM et OB/OA.

On constate que l'égalité des quotients OB/OA et OM/ON résiste lorsque A varie sur la demi-droite [OM) puis lorsque M varie dans le premier quadrant.
On peut ensuite introduire le quart de cercle trigonométrique.

Triangle rectangle et cercle circonscrit

- *Dans un premier temps, un segment [AB] est donné. On demande de construire un point C tel que le triangle ABC soit rectangle en C.*

On constate que C se situe sur le cercle de diamètre [AB]. On peut à ce stade se lancer dans la recherche de la preuve.

- *Dans un deuxième temps, un cercle (C) de diamètre [MN] est donné. P étant un point du cercle, quelle est la nature du triangle MNP ?*

Validation du logiciel puis preuve...

On se trouve confronté ici à une situation dont la pertinence n'est pas flagrante.

Le logiciel indique effectivement que l'angle $\widehat{MPN}$ est droit, quelle que soit la position du point P sur le cercle en dehors des points M et N. Cette activité ne motive pas nécessairement la mise en place d'une preuve.

Afin de rendre la démarche plus pertinente, on peut suggérer de placer un point libre P dans le plan et demander de le déplacer en dehors, sur et à l'intérieur du cercle.

Analyse d'une situation dans laquelle l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique n'est pas forcément pertinent : « les médiatrices d'un triangle sont concourantes »

Si on trace un triangle et ses médiatrices avec un logiciel de géométrie dynamique puis que l'on fait bouger les sommets, on constatera que les médiatrices restent concourantes. Les élèves seront convaincus que le résultat est vrai, alors à quoi bon chercher à le démontrer ?

Si l'on veut semer le doute pour justifier la nécessité de faire une démonstration, il vaut mieux demander aux élèves de construire un triangle et ses médiatrices, puis faire un grand dessin au tableau en s'arrangeant pour que les médiatrices soient simplement « presque » concourantes.

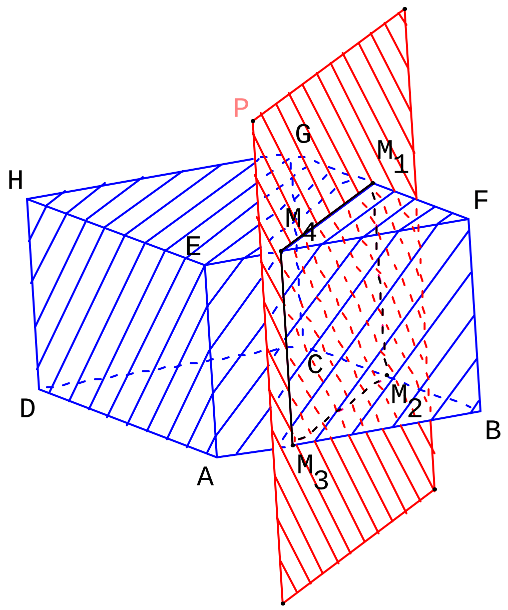
Par contre, rien n'empêche ensuite de représenter les bissectrices d'un triangle à l'aide du logiciel de géométrie et d'admettre le résultat…

Sur ces trois exemples, on s'aperçoit que tout dépend de l'objectif visé par le professeur. Dans tous les cas, il doit adapter au mieux le travail proposé à cet objectif : s'il veut faire admettre un résultat, le logiciel peut permettre de gagner du temps ; s'il veut que les élèves démontrent une propriété, il lui faut, d'abord, soit semer le doute, soit susciter la question « pourquoi est-ce ainsi ? »

Apprendre à conjecturer : problèmes de lieu

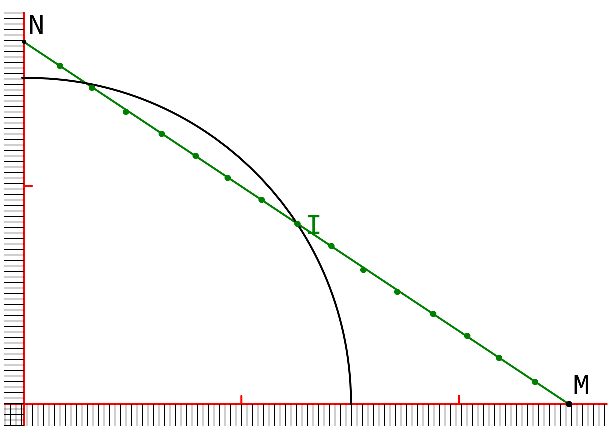
Dans les activités suivantes, utiliser un logiciel de géométrie permet aux élèves de manipuler les figures et, ainsi, d'émettre des conjectures qu'il pourra valider ou infirmer. Toutefois, la manipulation du logiciel de géométrie ne peut remplacer la manipulation de vrais solides.

Section d'un pavé droit par un plan parallèle à l'une de ses arêtes



Un logiciel de géométrie dynamique peut permettre d'aider à une visualisation dans l'espace. On peut, par exemple, s'intéresser à la section d'un pavé par un plan parallèle à une arête. La nature de la section ne s'impose pas de manière évidente. Les élèves arrivent facilement à conjecturer et justifier que c'est un parallélogramme. Pour le rectangle, il y a un réel doute qui nécessite une analyse réfléchie de la figure.

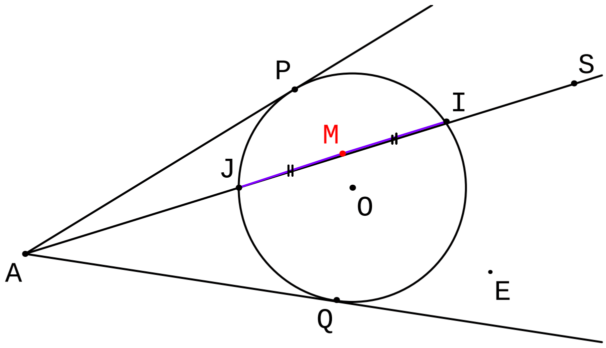
Le problème de l'échelle



Une échelle (représentée par le segment [MN]) de longueur fixe glisse le long d'un mur. Quel est l'ensemble décrit par le « milieu » I de l'échelle ?

Pour conjecturer, les flèches permettent de piloter la position de l'échelle et on peut visualiser l'arc de cercle solution à l'aide de l'option « trace ». Pour visualiser les différents éléments de la démonstration, la touche [A] permet d'afficher successivement le cercle circonscrit au triangle OMN, le rayon [OI] et le codage de l'égalité de longueur.

Le problème « du singe »



On donne un cercle de centre O et ses deux tangentes (AP) et (AQ) issues d'un point A. Une demi-droite [AS) coupe le cercle en les points I et J. On cherche l'ensemble des milieux M des cordes [IJ] lorsque la demi droite [AS) varie.

Le point S (comme « singe » d'où le nom de l'exercice) est variable dans le plan et pilote la demi-droite [AS). L'option « trace » permet de visualiser l'arc de cercle susceptible d'être solution.

Spontanément, deux « candidats » sont proposés : le cercle de rayon [AO] puis le cercle de rayon [AP]. L'élève peut facilement infirmer ces conjectures en construisant ces cercles. Une analyse plus fine de la figure conduira à envisager le cercle de diamètre [AO]. Après avoir vérifié que cela semble convenir, il restera à démontrer que l'arc solution est bien porté par ce cercle.

La principale question qui demeure est « pourquoi démontrer un résultat dont on est convaincu » ?

Conclusion :

Des discussions à propos des diverses activités proposées, il ressort que les logiciels de géométrie :

- offrent la possibilité d'évoluer dans un nouveau cadre de travail, souvent intermédiaire entre les « manipulations » concrètes et la conceptualisation des objets géométriques ;

- permettent de proposer des situations simples mais riches à partir desquelles on laisse les élèves réfléchir par eux-mêmes ;

- sont de bons outils pour différencier les activités proposées à chacun ;

- très globalement, suscitent l'intérêt des élèves mais il faut les amener à dépasser le seul aspect spectaculaire (« on voit bien ») pour y voir un outil qui permet notamment d'émettre des conjectures, de tester la « robustesse » d'une construction et de vérifier des calculs.

Bien sûr, tout dépend de l'adéquation entre l'activité proposée et l'objectif visé.

Les allers-retours entre les manipulations effectives, les tracés à la main et les représentations à l'écran doivent en permanence sous-tendre la réflexion des enseignants lorsqu'ils conçoivent les séances de travail des élèves.

S'ils sont ainsi intégrés au travail quotidien par l'intermédiaire de situations simples, les logiciels de géométrie devraient permettre de gagner en efficacité et contribuer à apprendre aux élèves comment mener une démarche d'investigation.

Atelier A4

Les TICE dans l'enseignement de la statistique et des probabilités au lycée

Chantal Perfetta, IA-IPR de mathématiques de l'académie d Créteil
Jean Labbouz, IA-IPR de mathématiques de l'académie de Créteil
Philippe Dutarte, professeur de mathématiques, académie de Créteil

Il est nécessaire, pour réfléchir à l'évolution des contenus d'enseignement et des pratiques avec les TICE, en « statistique et probabilité » au lycée général et technologique et au lycée professionnel, de les replacer dans un cadre plus large intégrant le socle commun des connaissances et des compétences et les nouveaux programmes de collège.

Statistique, probabilités et TICE au collège

Au collège, en conformité avec les nouveaux programmes qui sont progressivement mis en oeuvre depuis septembre 2005, les élèves sont initiés à la lecture, à l'utilisation et à la production de tableaux et de représentations graphiques puis ils mettent en place les outils numériques permettant de résumer une série statistique. Dès la classe de *sixième*, l'utilisation d'un logiciel informatique est préconisée pour obtenir certaines représentations graphiques de séries statistiques. En classe de *cinquième*, le programme met l'accent sur l'enrichissement qu'un tableur peut apporter en permettant de prolonger le travail « **à des situations plus complexes que celles qui peuvent être traitées à la main** ».

Les six thèmes de convergence qui figurent dans les nouveaux programmes et qui concernent tous les niveaux du collège, permettent tous de travailler sur des données statistiques. Il en est un néanmoins qui a un poids particulier, dans ce domaine : le thème « mode de pensée statistique dans le regard scientifique porté sur le monde ». Le texte paru au BO hors série n°5 du 25 août 2005 insiste sur le rôle joué par les mathématiques dans « la mise en place des premiers éléments qui vont permettre aux élèves de réfléchir et de s'exprimer à propos de situations incertaines ou de phénomènes variables, d'intégrer le langage graphique et les données quantitatives au langage usuel et d'apprendre à regarder des données à une plus grande échelle : **c'est le regard qui permettra, plus tard, la découverte de régularités et la prévisibilité** ». Le même texte fait également référence à l'utilisation du tableur-grapheur.

Les connaissances de base de statistique descriptive font partie de la compétence intitulée « les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique » du socle commun. La perception par les élèves des **notions de chance et de probabilité** y est également mentionnée, ce qui signifie une approche de l'aléatoire dès la fin du collège. Des capacités identifiées dans les textes réglementaires définissant le B2i, telles que « créer, produire, traiter, exploiter des données », et développées dans le cadre de l'enseignement de la statistique descriptive participent à « la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication », compétence du socle commun.

Statistique, aléatoire et TICE en classe de seconde générale

Tous ces éléments montrent la part importante de la statistique descriptive et de son ouverture sur l'aléatoire, le rôle essentiel de l'outil informatique dans leur enseignement au collège, conformément au nouveau programme. Cela ne peut que renforcer le poids que doit avoir l'enseignement de la statistique et des probabilités au lycée général et technologique.

Actuellement le programme de la classe de *seconde générale*, en vigueur depuis la rentrée 2000, renvoie, pour ce qui concerne la statistique descriptive, au programme de collège puisqu'il prévoit de poursuivre la réflexion sur les outils numériques et graphiques mis en place. Trop souvent, dans les classes, on se contente de réactiver les techniques, sans se tourner vers une **interprétation** des caractéristiques numériques obtenues et des représentations utilisées et sans une réflexion critique sur **leur sens et leur pertinence**. Or, l'outil informatique, parce qu'il permet de traiter des données importantes en nombre et de les modifier rapidement, devrait décharger l'élève de la lourdeur technique des calculs afin que celui-ci puisse concentrer ses efforts sur le sens, les choix faits et leur pertinence.

L'autre volet de l'enseignement de la statistique en seconde générale concerne la **fluctuation d'échantillonnage**. L'étude de celle-ci incite les élèves, d'une part, à considérer les statistiques avec un **esprit critique** intégrant ces fluctuations et, d'autre part, à prendre conscience que **le « hasard » a des lois**, celles des probabilités, qui permettent, même en situation d'incertitude, de porter des jugements.

Le premier point pourrait faire l'objet d'une sensibilisation dès le collège. La plupart des statistiques étudiées (dans le cadre de la statistique descriptive), en particulier lorsqu'elles sont le résultat d'un recueil par les élèves, peuvent difficilement être considérées comme une connaissance exhaustive et devraient être mises en relation avec des données plus larges. La fréquence d'un caractère, par exemple, n'a pas du tout la même signification si elle a été obtenue sur 10 données ou sur 10 000. La puissance de calcul des TICE permet d'expérimenter **l'impact de la taille de l'échantillon sur la qualité de l'information** recueillie. De plus, il faudrait éviter dans l'enseignement de dissocier statistique descriptive et fluctuations aléatoires, les deux notions étant intimement liées dans la pratique de la statistique comme dans l'exploitation de ses résultats.

Le second point concerne celui de l'introduction de la notion de probabilité, notion délicate, aux résultats parfois contraires au « sens commun », et pourtant de plus en plus indispensable dans le monde moderne. Notre enseignement de mathématiques a trop longtemps fait calculer aux élèves des probabilités sans qu'aucune réflexion préalable n'ait été menée sur leur signification pratique. Dans les années 1980, l'approche fréquentiste a enfin été privilégiée, mais c'est la généralisation de l'usage des TICE qui en a permis toute l'efficacité. C'est en effet la puissance de simulation de l'ordinateur qui rend possible l'expérimentation pédagogique de la « **loi des grands nombres** ». En observant la variation des résultats sur de très nombreux échantillons aléatoires de taille n fixée, on met en évidence des régularités correspondant à la « variabilité naturelle » pour cette taille d'échantillon. On peut vérifier que cette variabilité répond à des règles mathématiques rigoureuses (ce qui ne tombe pas sous le sens) qui permettent alors des prises de décisions fondées sur des notions comme celles de « différence significative » ou de « preuve statistique ». En augmentant la taille des échantillons, on constate, par ailleurs, une stabilisation progressive des observations mettant en évidence la signification théorique sous-jacente de « probabilité ».

Après plus de sept années de pratique dans les classes de seconde générale, on peut faire un premier constat de **l'enrichissement réciproque que présente l'utilisation des TICE pour l'enseignement de la statistique et des probabilités**. L'apport des TICE est indéniable. La puissance de calcul et d'illustration des calculatrices et de l'ordinateur a permis une approche plus expérimentale de ces notions délicates, convaincante de leur intérêt et de leur efficacité. Les TICE favorisent l'implication des élèves, mettant au premier plan la recherche du sens, l'analyse et la démarche scientifique, en éliminant la pénibilité des calculs (très pénibles en statistique). Inversement, le choix de thèmes liés à la statistique et aux probabilités, favorise l'apprentissage technique des TICE en fournissant des thèmes d'études motivants, liés à la vie quotidienne ou professionnelle et impliquant souvent différentes disciplines.

Statistique, probabilités et TICE en lycée professionnel

Les futurs programmes de mathématiques des classes préparant au BEP et au baccalauréat professionnel, actuellement en cours d'écriture, s'inscrivent dans la continuité des programmes de collège.

En classe de seconde professionnelle, il est prévu d'une part de consolider les acquis du collège en statistique en prenant appui sur des **situations technologiques, professionnelles ou de la vie courante** et d'autre part d'initier les élèves aux **fluctuations d'une fréquence** selon les échantillons et à la notion de probabilité qui en découle.

Dans ce cadre, l'outil informatique sera utile pour pouvoir traiter un grand nombre de données et pour étudier la stabilité de tel ou tel indicateur de tendance centrale, libérant ainsi les élèves de fastidieux calculs pour leur permettre de se concentrer sur le sens et l'interprétation des résultats obtenus à l'aide des TICE.

Il permettra également de pouvoir **simuler** des expériences aléatoires, tout d'abord à taille d'échantillon fixée puis en modifiant la taille de l'échantillon, afin d'étudier les variations de la fréquence observée d'un événement. Ces études permettront de sensibiliser les élèves à la notion de variabilité naturelle et d'introduire la notion de probabilité par une approche fréquentiste.

L'utilisation des TICE dans cette partie du programme pourra donc permettre aux élèves d'exercer leur esprit critique face à des résultats obtenus ou à des questions ou des informations provenant de la vie sociale, de l'économie, de la technologie ou de l'environnement.

Bibliographie

DOWEK (Gilles) – *Peut-on croire les sondages ?* – Le Pommier 2002.

DUTARTE (Philippe), *L'induction statistique au lycée illustrée par le tableur*, Didier 2005.

PIEDNOIR (Jean-Louis), DUTARTE (Philippe), *Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes*, IREM Paris-Nord 2003.

SCHWARTZ (Claudine) – *Pratiques de la statistique* – Vuibert 2006.

Internet

www.irem.univ-paris13.fr/

À partir du site de l'IREM de Paris-Nord, on peut accéder aux pages du groupe « statistique et citoyenneté ».

www.statistix.fr/

Le site « Statistix », coordonné par Claudine Schwartz, présente de nombreuses ressources pour les enseignants, avec souvent une dimension inter-disciplinaire.

Annexe :

Statistique et TICE : Fluctuations d'une fréquence selon les échantillons, cf. p.153.

Atelier A5

Algorithmique au lycée : apports du tableur

Intervenants :
Jean Pierre Bouvier, professeur de mathématiques, académie d'Orléans-Tours, formateur spécialiste des calculatrices
Philippe Sérès, professeur de mathématiques, académie de Paris, membre du groupe d'experts pour les programmes de la série L, spécialiste algorithmique et tableur
Yves Olivier, IA IPR de mathématiques de l'académie d'Orléans-Tours
Rapporteur :
Bernard Aguer, IA-IPR de mathématiques de l'académie d'Amiens

Ont été abordés successivement la place du thème dans les programmes du collège et du lycée, la notion d'algorithme et les objectifs de formation signalés dans les documents d'accompagnement de la série L, les transpositions algorithme/tableur et algorithme /calculatrice, le logiciel Execalgo (logiciel libre créé par Philippe Sérès pour tester des algorithmes rédigés en « langage naturel », la spécificité de l'exécution d'un algorithme sur un tableur, un comparatif tableur – calculatrice : points forts, points faibles et enfin une « sitographie » possible.

Place de l'algorithmique et du tableur dans les programmes de mathématiques

au niveau du collège :

Le tableur apparaît explicitement comme logiciel pouvant servir dans le traitement statistique de données et pour la représentation de fonctions affines ou linéaires. Dans les documents d'accompagnement pour aider le passage de l'arithmétique à l'algèbre (cf. travaux d'André Pressiat et de Bernard Capponi), le tableur sert pour faire des approximations des solutions d'équations. C'est en arithmétique de troisième qu'apparaissent les premiers algorithmes : algorithme des différences et algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres donnés.

au niveau du lycée :

- en seconde, le tableur est proposé comme outil lors de l'approche de la notion de fonction, lors de l'approximation d'un extremum, et dans les simulations et la mise en évidence, par la répétition d'expériences aléatoires, de la fluctuation des échantillonnages ;

- en première L et en terminale L, les programmes et les documents d'accompagnement font référence de façon explicite au tableur (BO HS n°7 du 01/09/05). Le programme vise des compétences précises. De même, la notion d'algorithme figure au programme et les compétences visées sont dans les documents d'accompagnement des programmes de la série ;

- en série ES, il est signalé que l'élève doit apprendre à situer et à intégrer l'usage des outils informatiques dans une démarche scientifique. Le tableur apparaît explicitement lors des travaux en Statistiques, sur les suites, lors de l'étude du comportement asymptotique d'une fonction, des courbes de niveau en géométrie dans l'espace et encore pour le calcul matriciel ;

- en série S, des notions informatiques élémentaires sont soulignées (boucle, test, récursivité, tri, etc…) mais aucune compétence n'est exigible.

Présentation d'algorithmes

Cette partie s'est appuyée sur le document d'accompagnement des programmes de la série L. La notion d'algorithme y est présentée d'une manière simple. Sont évoquées les notions de variables (mémoires), d'instructions, la description en « langage naturel » des différentes étapes de l'algorithme des entrées aux sorties en passant par les instructions, les tests et les boucles. Les compétences visées y sont commentées sur quelques exemples :

Transposer un algorithme sur un tableur

Selon Bernard Egger, les deux fonctions essentielles du tableur sont : la recopie et le recalcul. Nous reprenons évidemment à notre compte cette remarque.

La cellule est à la fois variable, instruction et affichage. La transposition d'un algorithme va donc nécessiter d'initialiser le contenu de cellules, puis d'introduire dans une cellule une formule qui donnera le résultat d'une instruction de l'algorithme. Cette formule peut être l'exécution d'un calcul ou d'un test avec une certaine formule attribuée à la cellule si le test est vrai et une autre formule attribuée si le test est faux. On recopie ensuite la cellule autant qu'il est nécessaire. L'algorithme est exécuté à tout instant de manière instantanée chaque fois que l'on modifie le contenu d'une cellule (c'est la fonction de recalcul). On ne « voit » pas se dérouler le programme. La fonction de recopie est indispensable pour répéter une instruction mais elle parasite la transposition de l'algorithme (on a du mal à décrypter sur une feuille de calcul déjà remplie la manière ou les manières avec laquelle la recopie a été faite). Ce n'est souvent qu'à travers l'observation de l'utilisation du $ que l'on peut s'en apercevoir.

Comparaison tableurs et calculatrices

Le temps et l'espace

Sur un tableur, on est en dimension 2. On ne sait pas toujours dans quel ordre les calculs sont effectués. Ce qui est bien visible, ce sont les valeurs prises par les variables. Un exemple sur les **triplets pythagoriciens**[26] permet de l'illustrer ; le même exemple est vu côté calculatrice et permet de faire des comparaisons. Sur la calculatrice, l'ordre vient de l'affichage dans le temps.

D'autres exemples sont proposés : **recherche d'un PGCD, recherche des diviseurs premiers** (ce travail nécessite de s'appuyer sur des propositions logiques connectées par « ou » et « et »). On reste donc très limité au niveau de la complexité des algorithmes à proposer aux élèves.

Avantages et inconvénients

Cela dépend naturellement de l'algorithme et des objectifs que l'on se fixe.

[26] Cf en annexe, p.171.

Si on s'intéresse à la compréhension de l'algorithme, malgré les problèmes de syntaxe des langages de programmation, la calculatrice semble plus simple. En particulier, la transparence de la mise en œuvre de l'algorithme est moins bonne sur le tableur que sur la calculatrice (sauf pour l'exemple du triangle de Pascal qui est réalisé en direct et qui permet de réaliser, simultanément, programmation et sortie des données bien organisées).

Sur le tableur, il est plus difficile de repérer les retours en arrière éventuels.

La calculatrice nécessite les tests d'arrêt pour que le programme s'arrête alors que le tableur s'arrête automatiquement après recalcul de toutes les cellules. Elle n'est plus limitée au niveau de la mémoire et l'organisation de l'affichage des résultats peut s'avérer complexe si l'on s'en tient aux fonctions de base (affichage d'un résultat par ligne).

Liens internet

Certains sites ont été présentés en direct pour illustrer les propos. Ce sont :

Site EDUCNET : la base de données contient nombre de liens sur des activités tableurs
Site EDUSCOL : liste de diffusion pour les enseignants en série L
Site « ChronoMath » de Serge Mehl : serge.mehl.free.fr (outre la partie histoire très complète, voir aussi la partie mathématiques et tableurs)
Site de Bernard Egger « Ce qu'il faut savoir faire avec un tableur »
Site « Xmaths » de Xavier Delahaye : xmath.free.fr (quelques réalisations avec Excel)
Site « Promenades mathématiques » de Frédéric Laroche (site en accompagnement de son livre paru aux éditions Ellipses avec de nombreuses applications tableurs téléchargeables)
Site du Collège Albert Camus de l'académie de Strasbourg tenu par Ivan Monka

Quelques exemples sur la calculatrice

Des exemples pour les séries scientifiques sont proposés :
- valeur approchée de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles ;
- algorithme de dichotomie.

Points soulevés lors des échanges

Suivent ensuite des échanges avec la salle, voici quelques points soulevés :

- existe-t-il des tableurs mathématiques ? intégration du calcul formel (par exemple comme sur voyage 200 de TI).
  Réponse : actuellement c'est en cours de développement chez les concepteurs. Dans le cadre du projet SCHENE, un appel d'offre a été lancé mais, à notre connaissance, pas de réponse des éditeurs.
  Note : le logiciel libre Xcas comporte un tableur comprenant du calcul formel ;

- il est signalé que différents modèles de calculatrices, dans une même classe, posent des problèmes aux professeurs ; l'utilisation du tableur est alors un recours ;

- à propos des évaluations au baccalauréat : l'évaluation des élèves de STG et de L ne se fait que sur papier uniquement : vu l'évolution avec l'épreuve pratique de la série S, ne pourrait-on pas espérer un dispositif adapté à ces séries ou à une validation de compétences en cours de formation ?
  Réponse : c'est une bonne suggestion.

Série B : le rôle de l'institution

Atelier B1

Socle commun des connaissances et mathématiques : la place des TICE dans la construction des apprentissages en mathématiques

Intervenants :
Jacques Moisan, IGEN, doyen du groupe mathématiques
Françoise Munck, IA-IPR de mathématiques de l'académie de Nantes
Stéphane Percot, professeur de mathématiques, académie de Nantes

Préliminaire : Nous n'avons pas cherché à faire œuvre d'exhaustivité. Les quelques pistes proposées ont été choisies essentiellement pour susciter le débat.

Nous avons choisi de faire l'impasse sur les didacticiels (il en a été question dans les ateliers ressources proposés lors de ce séminaire) et de centrer notre propos exclusivement sur l'apport du tableur et des logiciels de géométrie.

En revanche, nous nous sommes efforcés d'illustrer chacun des points abordés par des exemples concrets, privilégiant une utilisation du tableur puisque l'un des ateliers du lundi sur le thème « tracés effectifs à la main et représentations à l'écran » était centré sur l'exploitation des logiciels de géométrie.

I Des compétences en rapport avec les TICE à construire en mathématiques

On peut identifier des compétences du socle faisant explicitement référence aux TICE :

- L'élève doit être capable d'utiliser des outils (calculatrices, logiciels)[pilier 3] ;
- Capacité à
  - s'approprier un environnement informatique de travail ;
  - créer, traiter, s'approprier des données [pilier 4] .

<u>Situation n°1</u> :

Sont donnés aux élèves les effectifs des populations de chacun des départements français en 1801 et 1988 ainsi que la superficie de ces départements.
Question posée par Stéphane Percot à ses élèves : **Faire « parler » ces données**.
Des questions ressortent à la suite de leurs premières observations.
Par exemple : Quel est le département qui a connu l'essor démographique le plus important ?

Modalités de travail : Une heure en salle multimédia (les élèves qui le souhaitaient pouvaient prolonger à la maison leur travail de gestion de données).

Quelles sont les productions des élèves ?

Quelques grandes lignes :

- dans un premier temps, s'impose le calcul de la différence absolue, le tri des différences absolues, une représentation graphique de ces différences ;
- dans un deuxième temps, la prise en compte de la seule évolution absolue ne suffisait pas et l'idée de l'accroissement relatif apparaît ;
- dans un troisième temps, la notion de densité de population apparaît.

Quelques réactions de la salle

1. Y aura-t-il un document officiel permettant d'identifier année après année les compétences exigibles au niveau des mathématiques et des TICE ?

Réponse de Jacques Moisan :
Un groupe d'experts travaille sur une nouvelle présentation des programmes de collège dans le but de clarifier, pour chaque niveau :

- les points du programme qui sont des exigibles du socle commun à la fin de ce niveau ;
- les points du programme qui sont des exigibles du socle commun mais pas dès la fin de ce niveau ;
- les points du programme qui sont à travailler mais qui ne sont pas des exigibles du socle.

2. Un consensus se fait sur l'exemple proposé :

Une situation qui permet de construire des compétences relatives aux TICE (formules, tri , graphique) mais pas seulement :

- prise d'initiative rendue possible grâce à la puissance de l'outil (on peut faire des essais sans que cela ne nécessite des efforts surhumains) ;
- la question posée sous une forme ouverte contraint l'élaboration d'un questionnement et de stratégies pour y répondre ;
- l'exposé des conclusions aux autres est une occasion d'apprendre à s'exprimer à l'oral (rendre compte d'un travail personnel) ;
- l'attitude « volonté de se prendre en charge personnellement » peut être développée, les élèves devant poursuivre à la maison leur travail.

3. Quel type d'équipement est disponible dans le collège des élèves mis en scène dans cette situation ?

Stéphane Percot précise que

- l'équipement du collège Haxo est un équipement standard (une salle avec 16 postes pour 450 élèves et un ensemble vidéoprojecteur + portable dans une salle de mathématiques pour 4 professeurs) ;
- le pourcentage des familles qui ont un ordinateur à la maison est de l'ordre de 55%. Mais ce pourcentage augmente d'année en année… parfois sous la pression des enfants…

Stéphane Percot précise également que c'est une activité susceptible de mobiliser l'intérêt des élèves peu scolaires voire en décrochage scolaire.

II Des compétences en mathématiques à construire avec les TICE

L'élève doit être capable de :

- **utiliser les techniques et les technologies pour surmonter des obstacles [pilier 3B Culture scientifique et technologique]** (ce que le premier exemple illustre déjà - les élèves devaient traiter des données nombreuses difficilement exploitables à la main -) ;
- **saisir quand une situation de la vie courante se prête à un traitement mathématique, l'analyser en posant les données, puis en émettant des hypothèses** (situations 2 et 3) ;
- **contrôler la vraisemblance d'un résultat** (ce que l'élève peut apprendre à faire par exemple lors d'une construction géométrique. En effet, les propriétés d'une figure peuvent être, avec un logiciel de géométrie, testées par la robustesse au mouvement d'une construction géométrique. Un autre exemple est proposé dans le point 3) ;
- **utiliser les représentations graphiques ;**
- **utiliser les théorèmes de géométrie plane** (par exemple pour réaliser des constructions géométriques avec un logiciel mais aussi sans un logiciel !) ;
- **mettre à l'essai plusieurs pistes de solution [pilier 7]** (situations 2 et 3) ;
- **Distinguer ce dont on est sûr de ce qu'il faut prouver.**

Attitudes à faire acquérir

L'étude des mathématiques permet aux élèves

- **de développer rigueur et précision**
  - **élaboration des formules sur tableur** (tableau à double entrée de la situation 2) ;
  - possibilité offerte par les logiciels de géométrie de faire la **distinction entre dessiner et construire** (un carré dessiné à l'écran par simple glissement de la souris n'est pas préservé par le déplacement ultérieur de l'un de ses points : **la construction du carré avec un logiciel exige la mise en œuvre - concrète et non pas la rédaction - d'un algorithme de construction reposant sur les propriétés des figures) ;**
  - contrainte de la prise en compte de l'ordre dans lequel les objets mathématiques sont construits en utilisant un logiciel de géométrie.

- **de développer la prise d'initiatives, l'anticipation, la curiosité, la créativité (pilier [7]).**

<u>Situation n°2</u>
J'ai acheté des cahiers à 2€50 l'un et des crayons à 1€20 l'un. J'ai payé 54€30.
Combien ai-je acheté de cahiers et de crayons ?

Modalité de travail :
Une heure en salle multimédia. 27 élèves qui travaillent par groupe de 2. L'énoncé du problème est distribué aux élèves.
L'utilisation de l'ordinateur n'est pas imposée mais un ordinateur est disponible en cas de besoin.

A posteriori, Stéphane Percot dit regretter avoir posé une question. Il laisserait aujourd'hui volontiers les élèves trouver par eux-mêmes le problème à résoudre.

Les élèves se mettent au travail et sont très vite productifs. Ils essaient des choses, certains utilisent la calculatrice, beaucoup le tableur.

Quelques stratégies

Des élèves font des essais avec un nombre donné de cahiers et de crayons mais ne gardent pas trace des essais successifs :

- élaboration d'une feuille de calcul permettant de garder trace des essais ;
- quelques tentatives infructueuses : même nombre de crayons que de cahiers. Après une première réaction consistant à dire que « le problème n'a pas de solution ! » les élèves parviennent à formaliser leur erreur ;
- <u>une stratégie très opérationnelle est inventée</u> : on ne peut avoir acheté plus de 45 crayons. On calcule les 45 premiers multiples de 1,20€. Puis on fait apparaître dans une nouvelle colonne le résultat de 54,30€ moins tous ces multiples. On regarde si, dans cette colonne, il y a des multiples de 2,50€. Alors, on a toutes les solutions ;
- de nombreux groupes arrivent à trouver une solution au bout de 20 minutes de travail.

Tout en valorisant la solution trouvée, Stéphane Percot relance la recherche en soulevant la question de savoir s'il peut y avoir d'autres solutions. Les stratégies évoluent : il s'agit, à présent, de ne plus tâtonner mais d'élaborer une stratégie permettant de trouver tous les cas.

La séance en salle informatique est suivie d'une séance en salle de classe durant laquelle le professeur fait le <u>point sur les différentes stratégies mises en œuvre</u>. Elles sont analysées ; leurs efficacités sont comparées. Des stratégies plus expertes comme celle du tableau à double entrée sont présentées par les deux élèves qui les ont mises en œuvre.

Questions dans la salle :

1. **Quel entraînement au tableur avez vous proposé auparavant à vos élèves pour qu'ils soient ainsi en mesure de faire preuve d'autonomie en salle informatique ?**

Réponse de Stéphane Percot :
Les élèves ont eu l'occasion de me voir utiliser le tableur OpenOffice en classe (avec le vidéoprojecteur) et assez régulièrement, par exemple de façon très simple à la place d'une utilisation de la calculatrice ou pour programmer un calcul, donner rapidement les réponses d'un exercice calculatoire. Les élèves avaient eu deux séances en salle informatique : la première sur le thème du calcul avec des nombres relatifs, séance qui avait donné le prétexte à saisir une formule et à la recopier pour automatiser un calcul ; la seconde sur la gestion des données de la situation 1 évoquée précédemment.

2. **Une telle banalisation de l’utilisation du tableur ne risque-t-elle pas de nuire à une certaine formation des élèves, de sur-développer « la bidouille » (les essais) au détriment d’une réflexion préalable, de la recherche d’un ordre de grandeur, etc. ?**

Réponse de Françoise Munck :
Notre position n’est pas : tous les apprentissages avec logiciels. De la même manière qu’il faut apprendre aux élèves à utiliser de façon pertinente leur calculatrice, il ne s’agit pas de cultiver leur dépendance à cet outil. Il est bien entendu nécessaire de diversifier les stratégies pédagogiques. Nous avons voulu simplement montrer comment les élèves pouvaient très vite s’emparer d’un logiciel tel qu’un tableur pour résoudre des problèmes posés sous une forme totalement ouverte. Ce faisant, ils sont tous mis en situation de construire des compétences **du socle.**

Un exemple de résolution non experte d’un problème

<u>Situation n°3</u>
Julie et Carole ont travaillé pendant le mois d’août. Au total, elles ont reçu exactement le même salaire. Pourtant, Julie était payée 7,50€ de l’heure alors que Carole était payée 7,80€ de l’heure. Mais, Carole a travaillé, au cours du mois, six heures de moins que Julie.
Combien d’heures chacune d’entre elles a t-elle travaillé durant le mois d’août ?

Modalité de travail :
Une heure en salle multimédia. 27 élèves qui travaillent par groupe de 2. L’énoncé du problème est distribué aux élèves.
L’utilisation de l’ordinateur n’est pas imposée mais un ordinateur est disponible en cas de besoin.

Les élèves se mettent très vite au travail. Ils essaient des choses sur le tableur, avec de plus en plus de dextérité par rapport à l’outil qu’ils utilisent en autonomie pour la quatrième séance.

Quelques stratégies :

- des élèves font des essais avec un nombre donné d’heures de travail pour l’une et pour l’autre, avec prise en compte des 6h d’écart. Ils tâtonnent et trouvent une solution ;
- des élèves font une feuille de calcul de manière à garder trace des deux salaires pour un grand nombre de cas. Mais, certains élèves s’arrêtent de tirer la formule inventée car ils n’osent pas générer un tableau de 150 colonnes ;
- certains ont trouvé en tirant de 10 en 10 les heures et en affinant lorsqu’ils avaient trouvé l’intervalle dans lequel se trouvait la solution. La vie réelle (35 heures par semaine, 7 heures par jour) intervient dans leurs essais.

1 Question posée à la salle : Que penser de la stratégie des élèves si on avait posé l'exercice sous la forme suivante :

Julie et Carole ont travaillé pendant le mois d'août. Au total, elles ont reçu exactement le même salaire. Pourtant Julie était payée 7,50€ de l'heure alors que Carole était payée 7,80€ de l'heure. Mais Carole a travaillé, au cours du mois, 6 heures de moins que Julie. *On note x le nombre d'heures faites par Julie durant ce mois d'août.* *Exprimer en fonction de x le nombre d'heures faites par Carole.* *Exprimer en fonction de x le salaire de Julie puis celui de Carole.* *Résoudre l'équation $7{,}5*x = 7{,}8 * (x-6)$.* *En déduire le nombre d'heures durant lesquelles chacune d'entre elles ont travaillé durant le mois d'août ?*

Consensus : C'est un énoncé qui induit la stratégie experte mais qui ne laisse aucune place à une stratégie personnelle et qui peut induire une totale passivité de certains élèves.

2 Question posée à la salle : Poser des problèmes sous une forme ouverte est susceptible de mettre les élèves en situation de réussir. Mais comment peuvent réagir les élèves qui n'y arrivent toujours pas, même avec la possibilité d'exploiter les potentialités des logiciels ?

Réponse de Stéphane Percot

Lors de cette séance, les 2 élèves qui ont rencontré des difficultés sont des élèves qui réussissent habituellement bien en mathématiques.

Complément de Françoise Munck

Le constat de Stéphane Percot est assez largement généralisable. La réaction des élèves que l'on qualifie de bons en mathématiques, sur ce genre d'activité, doit interpeller. Ouvrir les questions que l'on pose aux élèves est aussi une manière de confronter les excellents élèves à des « problèmes qui posent problème » (expression de Pascal Charnay) et donc de répondre à une exigence du socle « ambition pour les plus fragiles et exigence pour ceux qui réussissent bien ».

3 Il y a consensus sur le fait que, dans les deux situations 2 et 3, les élèves sont effectivement conduits à élaborer des stratégies pour résoudre un problème. Mais est-ce bien des mathématiques que l'on fait ? Quels contenus construit-on ? Quelle place laisse-t-on à la modélisation mathématique ?

Réponse de Françoise Munck

En élaborant des stratégies (y compris des stratégies personnelles) pour apporter une réponse (exacte ou approchée) à un problème, un élève est conduit à construire des compétences (capacités et attitudes) du socle commun. Le défi que la mise en œuvre du socle pose est bien de mettre (remettre ?) en activité mathématique tout élève, y compris celui qui n'arrivera pas à entrer dans le monde des modèles.

Mais l'objectif de l'enseignement des mathématiques est de faire évoluer les stratégies des élèves et de les aider à abandonner leurs stratégies personnelles pour passer dans le monde des modèles. Toutefois, imposer la stratégie experte n'est pas le bon moyen d'y arriver. Quel intérêt y a-t-il pour un élève à mettre en équation un problème qu'il peut résoudre arithmétiquement aussi facilement ?

L'objectif que le professeur doit avoir consiste à faire évoluer la nature des problèmes posés afin de rendre les stratégies personnelles de moins en moins facilement opérantes. Les potentialités des logiciels mis à la disposition des élèves peuvent rendre la recherche de telles situations plus délicate !

De plus dans ce genre de démarche un temps fort s'impose : la confrontation des stratégies différentes adoptées. Un élève peut être convaincu par la stratégie experte qui aura permis à son camarade de résoudre beaucoup plus vite que lui le problème posé.

III Les TICE outils pédagogiques pour une différenciation dans la classe

Une question de fond que la mise en œuvre du socle commun pose !

« Comment dans le quotidien des classes concilier la mise en œuvre du programme et la construction des compétences du socle pour tout élève ? »

Des stratégies de différenciation pédagogique sont à inventer. Quelques pistes ?

- **Piste n°1**

<u>Pour une mise en activité de tout élève y compris sur un point du programme qui ne fait pas partie du socle…</u>

Exemple : « Triangle rectangle et cercle »

Stratégie pédagogique retenue : Exploration d'une figure, élaboration d'une conjecture, démonstration de la propriété conjecturée.

Modalité de travail : Individuelle ; Papier et crayon dans un premier temps, avec l'ordinateur dans un second temps.

Questions posées successivement aux élèves :

On se donne deux points A et B.
- Construisez sur votre cahier un triangle rectangle d'hypoténuse [AB].
- Pouvez-vous construire un autre triangle rectangle qui a la même hypoténuse [AB]?
- Pouvez-vous en construire d'autres ?
- Réalisez avec un logiciel de géométrie une figure dynamique permettant d'obtenir plusieurs triangles rectangles d'hypoténuse [AB] et gardez trace du déplacement du sommet de l'angle droit.
- Qu'observez-vous ?

Commentaires :

Laisser vivre pour tous l'élaboration de conjectures est une bonne manière d'aménager un espace propice à la construction des compétences du socle y compris dans un travail centré sur la construction d'un point du programme.

Il s'agit d'une mise en activité de tout élève favorisant la mobilisation de connaissances du socle (droites perpendiculaires et cercle) et la construction de capacités telles que :

- prises d'initiative, créativité ;
- rigueur (ordre dans lequel construire les objets mathématiques : si je supprime la droite support d'un des deux côtés de l'angle droit, je supprime le triangle ! L'utilisation d'un logiciel de géométrie peut contraindre à l'élaboration d'un programme de construction sans pour autant l'oraliser) ;
- habitude de contrôler la vraisemblance d'un résultat (le cercle tracé est-il bien le cercle de diamètre [AB] ?).

- **Piste n°2**

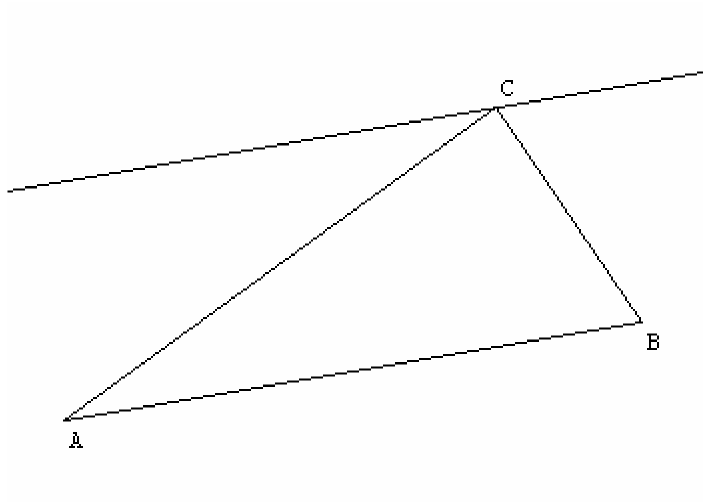
<u>Place de la démonstration dans les apprentissages de tous</u>

Alors que la géométrie hypothético-déductive ne fait pas partie des exigibles du socle, comment aider chaque élève à comprendre qu'en mathématique tout peut se démontrer ? Autrement dit, comment faire vivre certaines démonstrations sans pour autant avoir sur ce point les mêmes exigences vis-à-vis de tous ?

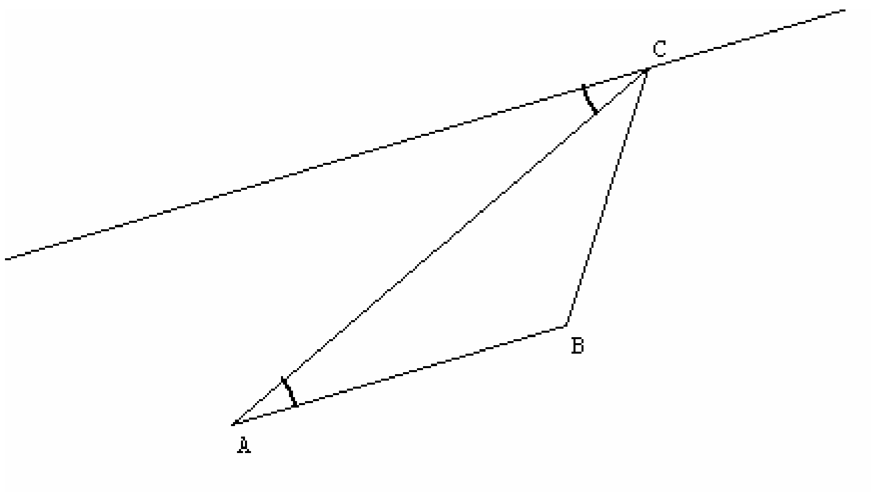
Exemple : La somme des mesures des angles d'un triangle
Modalité de travail : Le professeur dispose d'un ordinateur et d'un vidéoprojecteur
Stratégie pédagogique retenue : Exploration d'une figure. (On a fait des dessins sur une feuille de papier, sur ces dessins on a effectué des mesures et on a trouvé 179°, 181°, 180°, 182°, etc…). Des élèves affirment que cette somme est égale à 180°.
Question : vrai ou faux ?

Reformulation du problème : *On voudrait savoir si la somme des mesures des trois angles de n'importe quel triangle ABC est toujours égale à 180° ou pas ?*
Le professeur explique : J'ai réalisé une figure dynamique avec un logiciel de géométrie et je fais bouger les points A, B et C.
Il demande : Quelqu'un observe-t-il quelque chose de particulier ?

Et si je construis la droite (d) parallèle à (AB) passant par C ?



Une propriété d'une figure géométrique étant robuste au mouvement, les élèves peuvent ainsi percevoir plus aisément que certains angles doivent avoir toujours la même mesure.



D'où une reformulation du problème

Si on justifie que les deux angles codés sont toujours de même mesure et que l'angle de sommet B du triangle ABC a même mesure qu'un autre angle de sommet C, aura–t-on répondu à la question posée ?

Débat

Et maintenant, pourquoi les deux angles codés ont-ils la même mesure ?
Ce faisant, la stratégie de démonstration est accessible à tous. Rédiger cette démonstration peut être demandé à certains élèves.
D'autres démonstrations de géométrie peuvent vivre de cette manière en classe grâce aux potentialités des logiciels de géométrie : mobilité de la figure, possibilité d'extraire des figures, etc.

- ## Piste n°3

Un outil pour laisser du temps à certains élèves en permettant à quelques élèves plus rapides d'aller plus loin.

Possibilité d'envisager une étude plus générale, de poser à certains élèves (et seulement à certains) des questions formatrices mais non incontournables.

Exemple : Les trois médiatrices d'un triangle

Modalité de travail : Papier et crayon. L'ordinateur est disponible dans la classe.

Questions :

Construire un triangle ABC, la médiatrice du segment [AB] et celle du segment [BC].
Noter O le point commun à ces deux médiatrices puis construire le cercle de centre O qui passe par A. Que remarquez-vous ?

Questions supplémentaires à l'intention de quelques élèves plus rapides.

- Nous avons dit que O est le point d'intersection des deux médiatrices. Mais deux droites sont-elles toujours sécantes ? O existe-t-il toujours ?
- Sur ton dessin, le point O est à l'intérieur du triangle. Penses-tu que ce sera toujours le cas ?
- Sinon, peux-tu faire un dessin qui le prouve ?
- Utilité de la figure dynamique pour trouver des contre-exemples.

Atelier B2

Expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques en classe de terminale S

Intervenants :
Jean Moussa, IGEN, groupe mathématiques
Jean François Canet, IA-IPR de mathématiques, académie de Montpellier
Marie-Claude Renaldo, professeure de mathématiques, académie de Versailles

Cet atelier s'est déroulé en trois temps :

- objectifs et projet d'organisation de cette épreuve ;
- exemple de sujets, remarques sur la passation et l'évaluation ;
- la préparation des élèves.

Chacun de ces temps a été l'occasion d'un exposé rapide suivi d'une discussion avec les nombreux participants.

Objectifs et projet d'organisation de cette épreuve

L'Inspection générale de mathématiques (représentée par Jean Moussa et Marc Fort) commence par présenter les objectifs assignés à une telle épreuve et l'économie générale du dispositif imaginé pour l'expérimentation.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer les compétences des élèves dans l'utilisation des calculatrices et de certains logiciels spécifiques en mathématiques. Il s'agit d'évaluer chez les élèves, la capacité à mobiliser les TICE pour résoudre un problème mathématique.

Les sujets proposés aux candidats sont des exercices mathématiques où l'utilisation des TICE (calculatrice graphique programmable, ordinateurs et logiciels spécifiques, logiciels libres de préférence, tableurs, grapheur tableur, géométrie dynamique, calcul formel) intervient de manière significative dans la résolution du problème posé.

Une banque de sujets a été élaborée au niveau national. Chaque sujet est composé :

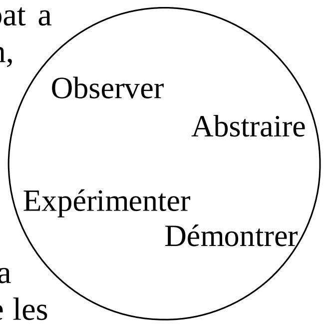
- d'une description « D » destinée à alimenter la liste nationale de situations d'évaluation ;
- d'une fiche-élève « S » (sujet) donnant l'énoncé et précisant ce qui est attendu du candidat ;
- d'une fiche-professeur « P » décrivant les intentions de l'auteur, des considérations sur l'environnement TICE du sujet et des commentaires sur l'évaluation ;
- d'une fiche-évaluation « N » (note) destinée à figurer dans le dossier du candidat.

L'épreuve s'est déroulée au sein des lycées fréquentés par les élèves. Chaque établissement a choisi (ce choix est guidé par les équipements disponibles et les apprentissages effectués par les élèves) dans cette banque les sujets qui seront proposés aux élèves de l'établissement. Un même sujet peut être commun à plusieurs candidats passant au même moment dans la même salle. L'épreuve dure une heure.
Le pilotage de l'expérimentation et l'élaboration des sujets ont été assurés par un groupe de professeurs, d'IA-IPR et d'inspecteurs généraux de mathématiques. Ce groupe s'est réuni une première fois en juin 2006. Lors de cette réunion, un appel à sujets a été lancé auprès des cinq académies représentées dans ce groupe.

Une centaine de propositions de sujets ont été reçues en septembre. Le groupe de travail en a retenu 54. Vingt-huit sujets ont été retenus par le groupe de mathématiques de l'Inspection générale. Les descriptifs ont été envoyés dans les académies dans le courant du mois de novembre, l'ensemble des sujets dans la deuxième quinzaine du mois de décembre.

L'expérimentation a concerné neuf académies, vingt lycées[27], près de deux mille deux cent élèves. Vingt-cinq sujets ont été retenus par les établissements. Les épreuves se sont déroulées entre le huit et le vingt janvier 2007.
L'épreuve a été notée sur 20 points. Elle compterait, en cas de mise en place généralisée, pour un cinquième de la note globale de l'épreuve de mathématiques.
L'ensemble de ces dispositions est en cohérence, sans qu'il y ait simple recopie, avec la manière dont les deux disciplines physique-chimie et sciences de la vie et de la Terre ont mis en place leurs épreuves d'évaluation des capacités expérimentales au baccalauréat depuis quelques années.

Les questions sur ce premier point ont permis de s'interroger sur la complémentarité à trouver entre l'épreuve pratique et l'épreuve écrite actuelle qui subsisterait (avec 16 points sur 20). Cette question concerne à la fois les dispositifs (par exemple : gardera-t-on la possibilité d'utiliser une calculatrice aux épreuves écrites ?) et les objectifs d'évaluation visés. Les questions posées, très pertinentes, ne pourront avoir de réponses un peu complètes que lorsque l'institution aura choisi le devenir de ce type d'épreuve. Le débat a cependant permis de mettre en lumière le problème que pose la disposition, à une épreuve écrite, d'un outil capable de mémoriser un nombre très important d'informations et dont les possibilités de communication à distance s'accroissent de jour en jour. Sur les objectifs d'évaluation, les programmes affichent quatre compétences essentielles ; la compétence à expérimenter est difficile à prendre en compte véritablement dans une épreuve écrite. La discussion a aussi permis de mettre l'accent sur la nécessaire progressivité que doit connaître l'évolution des équilibres entre les divers modes d'évaluation.



Exemple de sujets, remarques sur la passation et l'évaluation

Trois sujets ont été présentés[28]. Pour chacun, il a été possible d'étudier les divers documents (descriptif, fiche élève, fiche professeur, fiche évaluation) relatifs au sujet. Des commentaires sur la passation (réactions d'élèves ou d'enseignants) ont aussi été présentés.

[27] Dans l'académie de Versailles certains lycées, ne faisant pas partie du panel national, se sont volontairement associés à cette expérimentation en faisant passer les épreuves aux élèves. Ce sont donc, en définitive, une trentaine d'établissements qui ont été concernés.

Parmi les remarques faites, plusieurs ont une portée qui dépasse le cadre de l'exemple choisi, par exemple :

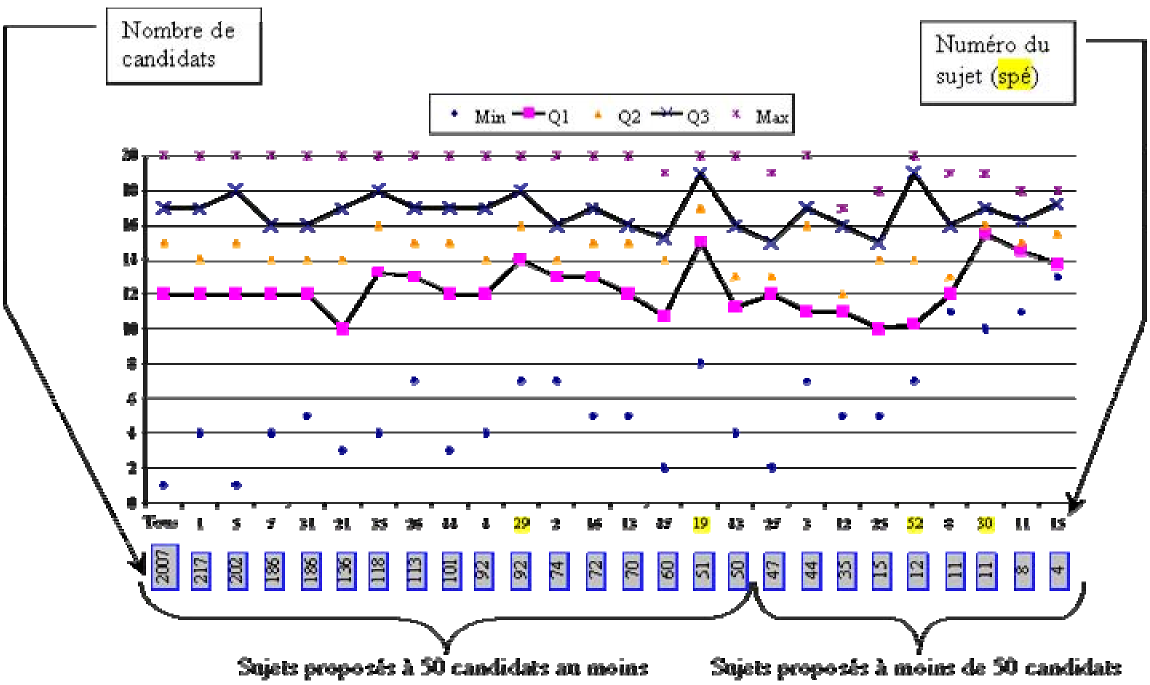
- ce type d'épreuve est aussi l'occasion de solliciter chez les élèves des savoirs « anciens » – dans l'exemple cité, la trigonométrie dans le triangle rectangle telle qu'elle est vue au collège – plusieurs élèves ont de la difficulté à mobiliser ces connaissances et il arrive que cela surprenne les enseignants ;

- la prise d'initiative des élèves (même en se situant à des niveaux très élémentaires) est très inégale. Cette attitude est fortement liée (semble-t-il) aux situations rencontrées en cours de formation. Les professeurs ayant participé à cette expérimentation ont souligné que c'est dès le collège que des habitudes devraient être prises et plusieurs se retrouvent dans la citation faite par l'un d'entre eux : « *Il est clair que ce type de nouveauté aura une répercussion immédiate dans mon enseignement (en première S par exemple)* » ;

- la construction d'un tel sujet présente des caractéristiques inhabituelles, en particulier le fait que le candidat pourra, en cours d'épreuve, recevoir de l'aide incite à donner moins d'indications sur les procédures à mettre en œuvre. La présence de logiciels différents fait, du reste, que certaines des indications qui pourraient être utiles dépendent fortement du contexte de passation et donc ne trouvent plus leur place dans le sujet ;

- ce type d'épreuve a permis à un certain nombre d'élèves, dont les résultats écrits sont régulièrement très faibles, de connaître une certaine réussite ; la répartition des notes obtenues ci-dessous en témoigne. Cela n'est toutefois en rien une simple faveur qui leur est ainsi faite : à ce dispositif nouveau correspondent en effet des capacités qui n'étaient pas repérées dans les modes « classiques » d'évaluation. Cette situation entraîne naturellement une réelle satisfaction chez les élèves et les enseignants.

Une présentation rapide des résultats obtenus a été faite, elle est résumée par le graphique suivant :



28 Cf, dans les annexes p.173.

Liste des sujets retenus par les établissements :

001 Expression du terme de rang n d'une suite récurrente
002 Recherche d'un lieu géométrique
003 Problème d'optimisation
004 Nombre de solutions d'une équation
005 Comportement d'une suite définie par une relation de récurrence
007 Courbe représentative de la fonction exponentielle
008 Planètes et ajustements
011 Simulation d'une expérience, lois de probabilités
012 Étude de lieux géométriques
013 Orthocentre
015 Distance de deux droites dans l'espace
016 Modélisation d'une situation géométrique
019 Cryptographie
021 Équation différentielle et méthode d'Euler
025 Suite définie par une moyenne arithmétique
026 Barycentre
027 Triangle d'aire maximale
029 PGCD
030 Famille de cercles
031 Tangentes à une parabole
035 Demi-vie
043 Étude d'une courbe
044 Somme de termes d'une suite
047 Partage d'un triangle
052 Suite de Syracuse

Une discussion très riche a accompagné cette présentation. Au-delà de la nouveauté introduite par une telle épreuve, il est clair que les participants reposent de façon pertinente la question des objectifs et des priorités qu'il convient de choisir dans la conception et la mise en œuvre de l'enseignement.

La préparation des élèves

L'existence d'une telle épreuve n'a de sens que si les élèves y ont été préparés. Une des professeurs ayant participé à l'expérimentation a donc présenté la situation rencontrée dans sa classe.
La classe comportait 25 élèves dont 15 suivaient l'option SI et 10, l'option SVT.

Conditions matérielles

Une salle de cours équipée d'un ordinateur relié à un vidéoprojecteur, disponible pour toutes les séances en classe entière. Une salle d'informatique équipée de 12 postes, disponible pour toutes les séances en demi-groupes.

État des lieux en début d'année

La plupart des élèves avaient utilisé le tableur au *collège*, en technologie. En *seconde* et en *première,* leur professeur de mathématiques avait utilisé Geoplan ou le tableur sur l'ordinateur relié au vidéoprojecteur, mais peu d'élèves avaient eu l'occasion d'utiliser personnellement ces logiciels. Les compétences sur calculatrices étaient inégales.

Objectifs de la préparation

Dans le cadre du programme et de la préparation au baccalauréat :

- apprendre aux élèves un certain nombre de fonctionnalités des outils ;
- leur faire acquérir un minimum d'autonomie dans l'utilisation de ces outils ;
- les aider à s'en servir efficacement pour résoudre un problème, en particulier susciter des prises d'initiatives.

Les outils choisis et les usages : calculatrices personnelles ou ordinateurs (tableur et Geoplan).

En cours, en classe entière : chaque utilisation du vidéoprojecteur a permis d'expliquer aux élèves certaines fonctionnalités, reprises en TD dans les séances suivantes.
En TD, en demi-groupes : travail autonome sur les ordinateurs, sur des exercices utilisant les TICE en complément d'un questionnement mathématique.
Dans certains devoirs à la maison : les élèves ont eu l'occasion d'utiliser un tableur ou Geoplan.
Des occasions d'utiliser les TICE dans le cours ou les exercices « classiques » : il suffit souvent de remanier un énoncé (inclure une partie expérimentale, poser des questions ouvertes, introduire les questions au fur et à mesure de l'analyse de la situation) ou d'imaginer une illustration.

Quelques éléments du bilan

Les élèves sont volontaires. Ils sont contents de faire évoluer leurs habitudes de travail et satisfaits d'avoir assez bien réussi leur épreuve.
Malgré quelques difficultés rencontrées en début d'apprentissage, la plupart des élèves ont assez vite compris le fonctionnement général des outils pour pouvoir en connaître les principales fonctionnalités.

Pour autant, les objectifs ne sont pas tous atteints (manque d'autonomie, difficulté à mobiliser les connaissances, à changer de cadre...).
Les principaux obstacles rencontrés par les élèves, proviennent d'une part, d'une fragilité des connaissances mathématiques et de leur cloisonnement, d'autre part d'un manque d'expérience des problèmes ouverts.

Remarques sur l'évaluation

Des difficultés liées à la *forme de l'épreuve :*

- manque d'expérience dans l'évaluation d'une épreuve orale ;
- nécessité de faire la part entre l'évaluation et l'accompagnement du travail de l'élève ;

Besoin *d'éléments d'évaluation :*

- évaluation en termes de compétences : Qu'est-ce qui est attendu ? Quels niveaux de compétence ?
- prise en compte des aides : quel temps raisonnable avant d'apporter un élément d'aide et quelle aide ? Quels éléments d'aide sont « sanctionnables » et comment les sanctionner ?
- besoin d'éléments d'appréciation détaillés, tenant compte des spécificités des sujets et des compétences à évaluer.

Garantir *l'équité de la notation :*

- prendre en compte l'hétérogénéité des sujets ;
- équilibrer le temps consacré aux élèves d'un groupe donné ;
- apprécier les aides apportées.

Intérêt

- évaluer les élèves autrement et par rapport à d'autres compétences ;
- pouvoir aider les élèves et éviter les situations de blocage ;
- valoriser des attitudes positives ;
- permettre à des élèves en difficulté face aux évaluations classiques de réussir dans un autre type d'épreuve.

La discussion, très riche, a permis de voir que ces constats et ces réflexions dépassaient largement le cadre de l'exemple. D'autres questions ont aussi permis de souligner le besoin de progressivité dans la mise en œuvre de cette épreuve. La forme même du dispositif permet cette souplesse : les sujets pourront présenter des parties expérimentales d'ampleur variée ; les outils mis en œuvre (en particulier les outils de calcul formel) pourront prendre une place différente au fil du temps, ce qui permet d'éviter qu'un hiatus n'apparaisse entre pratiques de formation et compétences attendues lors de l'épreuve.

Atelier B3

Documents d'accompagnement des programmes de mathématiques au collège

Intervenants :
Véronique Fouquat, adjointe au chef de bureau des programmes d'enseignement
Benoît Ducange, responsable DT-SDTICE mathématiques

L'enseignement des mathématiques doit désormais intégrer l'usage de l'outil informatique, les nouveaux programmes le soulignent largement.

Des scénarios de séquences d'enseignement, souvent riches et complexes, ont été produits par des enseignants considérés comme des pionniers en la matière mais, même s'ils permettent des échanges et la diffusion de pratiques, cette diffusion reste à destination d'un public averti.

Pour toucher plus largement les enseignants, la diffusion de scénarios plus simples à mettre en œuvre ainsi que de nouveaux modes de diffusion de ces pratiques sont explorés. Il est, en effet, difficile pour les enseignants qui n'ont jamais utilisé l'outil informatique d'imaginer la mise en œuvre à partir de la lecture d'un document écrit. L'une des pistes que la SDTICE a choisi de retenir est la diffusion de vidéo-clips de reportages faits dans des classes. Dix-sept clips, dont quatre en mathématiques, ont été réalisés dans ce but. En mathématiques, le groupe d'experts chargé des programmes et des documents d'accompagnement de mathématiques pour le collège a été sollicité et a proposé des pistes pour les scénarios pédagogiques.

Les vidéos ont été diffusées auprès des rectorats (IPR-CTICE), des IUFM et des interlocuteurs académiques sous forme de DVD et diffusés en ligne via le site Educnet[29]. Elles sont libres de droit dans le cadre d'une utilisation pédagogique. Elles sont accompagnées d'un document réalisé par les enseignants avec le soutien SD-TICE.

La réalisation de ce projet a pris en compte différents paramètres :

- les contraintes liées à la production d'un DVD (moment et délais de tournage) ;
- le respect d'une réalité pédagogique en termes de progression et d'exploitation ;
- la volonté d'avoir un public varié (urbain, rural, ZEP…) ;
- le choix d'enseignants non experts des TICE pour la plupart.

Les quatre vidéos présentées seront intégrées au DVD d'accompagnement à la mise en oeuvre des programmes de mathématiques du collège.

L'objectif de cet atelier est d'étudier l'impact que pourraient avoir ces vidéos sur des enseignants qui connaissent mal l'outil informatique et n'osent pas l'utiliser en classe ainsi que d'identifier la nature des compléments à apporter pour améliorer leur lecture et leur utilisation.

[29] http://www2.educnet.education.fr/sections/maths/usages/exemples_usages/college

Le visionnage des quatre séquences vidéo a amené les remarques suivantes de la part des participants à l'atelier (IGEN, IA-IPR, formateurs).

I) Le magicien
Outil : le tableur
Objectif de la séquence : passer d'une série d'instructions de calcul à une expression algébrique.

Les points forts suivants sont identifiés :

Mise en place de la séquence :

- les enseignants veulent généralement que les élèves maîtrisent l'outil avant de l'utiliser. On montre ici que cela n'est pas nécessaire : l'apprentissage mathématique et technique peut se mener parallèlement ;

- on voit aussi qu'il faut prendre en charge la saisie des premières formules. La méthode orale et collective est convaincante.

Intérêt pédagogique :

- l'utilisation de l'outil informatique fait apparaître la difficulté des élèves à passer à la forme littérale ;

- les interactions entre le projet mathématique et la manipulation de l'outil sont visibles ;

- c'est une illustration intéressante du document d'accompagnement sur l'algèbre.

Quelques regrets sont exprimés. Les remarques concernent davantage la vidéo elle-même que la séance :

Du fait de la disposition des tables, on ne se rend pas compte de l'effectif de la classe : il faudrait indiquer clairement dans le générique que c'est une classe entière avec vingt-quatre élèves.

On n'entend pas les interactions des binômes d'élèves.

La disposition et le joli mobilier donnent l'impression de conditions privilégiées (en fait, on a un poste informatique pour deux élèves, les plus-values de la salle multimédia ne sont pas exploitées ici).

On ne voit pas assez les phases collectives ni le travail entre les élèves mais davantage les interventions de l'enseignant.

On ne comprend pas que c'est en observant les nombres que les élèves trouvent la forme réduite. Cette information devrait être donnée dans la vidéo.

Il faudrait préciser que les élèves n'avaient jamais travaillé sur la forme algébrique mais qu'en revanche, ils connaissaient le principe des programmes de calcul.

Il pourrait être intéressant d'avoir une balise horaire qui permettrait de suivre la progression de la séance.

II) Le nombre d'Alice et Bertrand

Outil : logiciel de calcul formel
Objectif de la séquence : résolution de problèmes par une mise en équation.

Les points forts suivants sont identifiés :

Mise en place de la séquence :
- c'est facilement déclinable : on peut imaginer une utilisation plus ponctuelle du logiciel.
Intérêt pédagogique :
- on cherche à résoudre un problème sans y parvenir : l'appel à l'outil est pleinement justifié, il montre de ce fait la nécessité de savoir résoudre des équations pour résoudre des problèmes ;
- l'équation et la solution sont clairement identifiées, leur forme se dégage ;

- l'usage du logiciel impose une rigueur dans l'écriture ;

- c'est attrayant et d'accès facile.

Les regrets exprimés sont les suivants :
- On ne comprend pas l'objectif mathématique poursuivi par l'enseignant. L'interview est très éclairante à ce sujet : il faudrait l'inscrire à l'intérieur du film pour permettre une meilleure compréhension des intentions de l'enseignant.
(NDLR : c'est la vidéo qui convainc le moins sur ce point).
- On ne voit pas quel logiciel est utilisé ni le travail sur la mise en équation.

III) Minimiser une longueur

Outil : logiciel de géométrie dynamique
Objectif de la séquence *:* Chercher la position optimale d'un point et identifier cette situation.

Les points forts suivants sont identifiés :

Mise en œuvre de la séquence :
- cette séquence peut convaincre l'enseignant de la pertinence de l'utilisation d'un logiciel pour enseigner les mathématiques ;
- le logiciel Geogebra est simple d'emploi, on voit cependant que les élèves l'ont déjà utilisé.
Intérêt pédagogique :
- l'aller retour entre les conjectures, les manipulations de la figure, les calculs apparaissent clairement ;
- les différentes phases sont bien identifiées et sont presque toutes visibles à l'écran :
  - présentation du problème
  - modélisation
  - recherche
  - justification
  - rédaction de la démonstration (à finir à la maison).

Les regrets exprimés sont les suivants :
Le très faible effectif d'élèves qui doit être impérativement expliqué en fin de film.

IV) Représentation statistiques

Outil : tableur
Objectif de la séquence : Évolution de populations : comparer des séries

Les points forts suivants sont identifiés :

Mise en place de la séquence :
- c’est classique et accessible pour les enseignants,
- les élèves produisent des graphiques,
- il est important pour les élèves de voir avant l’enseignant manipuler le tableur dans une situation collective.

Intérêt pédagogique :
- ce sont les mathématiques du citoyen
- cela permet de travailler sur les séries

Avis général

La diversité des activités présentées est appréciée. Celles-ci sont plus ou moins ouvertes, on passe d’une activité très ouverte (le magicien) à une activité clef en main (représentation statistiques). Ce n’est pas trop éloigné des pratiques, ce ne sont pas des usages de pionniers. Cela ne demande ni préparation, ni compétences techniques importantes.
Il ne s’agit pas de modèles idéaux (il y a des erreurs de langage, des imperfections…) et l’on évite ainsi le risque que ce soit modélisant.
Le fait que les TICE servent les mathématiques apparaît clairement dans ces séquences. Ce sont de bons outils de formation qui sont utiles en animation pédagogique et peuvent être utilisés en inspection.
Un document accompagnant chacune de ces vidéos est nécessaire mais la vidéo doit pouvoir se suffire à elle-même. Quelques aménagements ont été demandés en ce sens. Ceux présentés sont convaincants. On pourrait ajouter des liens vers d’autres scénarios de la même famille ainsi que des indications pour la validation d’items du B2i.

Atelier B4

Les usages d’une ressource institutionnelle : « Euler »

Intervenants :
Pierre Michalak, IA/IPR de mathématiques de l’académie de Versailles
Richard Breheret, professeur de mathématiques, académie de Versailles
Martine Salmon, professeure de mathématiques, académie de Versailles

L’académie de Versailles dispose, comme beaucoup d’autres, d’un site dédié à l’enseignement des mathématiques. Les circonstances ont fait qu’au sein de ce site a été développé un ensemble original de services aux enseignants et aux élèves : ce furent en premier lieu les « pages interactives », suivies des premiers « espaces personnels de travail » réservés aux enseignants, enrichis depuis le dernier été d’un bouquet de fonctionnalités (cahiers de textes, système de gestion de classes et de gestion du travail confié à chaque élève, organisation d’espaces élèves, organisation du dialogue entre l’enseignant et ses élèves par le biais du système « math et mel », etc.) qui en font un environnement de travail riche de possibilités non seulement pour les professeurs de l’académie (il y a près de 7 000 enseignants de mathématiques dans l’académie ; plus de 700 d’entre eux ont à ce jour créé leur espace personnel de travail) mais, pour tous les autres, puisque l’accès et l’usage sont gratuits pour l’utilisateur, où qu’il soit.

Dans l’académie de Versailles, des moyens sont regroupés autour du conseiller TICE du recteur, qui est aussi directeur du CRDP. Les développeurs, responsables des serveurs et responsables des sites académiques sont des fonctionnaires dont la charge de travail prévoit leur intervention éventuelle sur le site de mathématiques et ses serveurs, en complémentarité avec le chef de projet, Richard Breheret, professeur certifié au lycée Galilée de Cergy, webmestre du site *euler*. Les inspecteurs pédagogiques régionaux sont les garants de la qualité des contenus, élaborés par un groupe de production comprenant, outre Richard Breheret déjà nommé, Martine Salmon, professeure agrégée au lycée Évariste Galois de Sartrouville et Michel Abadie, professeur agrégé au lycée Galilée de Gennevilliers. L’outil ainsi créé affiche son caractère institutionnel. Les moyens humains lui permettant de fonctionner (à ce jour 0,84 ETP (Equivalent temps plein)) relèvent de la volonté des recteurs, auxquels des comptes sont régulièrement rendus par le conseiller TICE comme par les inspecteurs pédagogiques régionaux.

Si l’outil est institutionnel, son coût pour l’institution doit être minimal. Après l’achat initial de noyaux de calcul *Mathematica* et de l’interface *Web Mathematica*, et la mise en ligne des douze premières ressources – il y en a aujourd’hui 1 500 – la société Wolfram Research est devenue partenaire du site *euler*, fournit les mises à jour et des prototypes que nous testons. Les sociétés Dell et Intel ont apporté plus récemment leur concours en mettant à la disposition de l’académie un serveur très puissant. Site institutionnel, *euler* rapporte à l’académie là où il pourrait lui coûter.

La présentation est faite par Martine Salmon et Michel Abadie, dont les interventions sont complétées par Pierre Michalak et Évelyne Roundneff, inspecteurs pédagogiques régionaux. Le webmestre Richard Breheret gère les documents présentés. Tous répondent aux questions.

La présentation prend la forme d'une suite de réponses aux exigences d'un cahier des charges fictif.

a. Satisfaire des exigences mathématiques

La technologie utilisée permet de poser des questions mathématiques correctement formulées, analyser la réponse fournie, donner une réponse rédigée. L'utilisateur voit s'écrire à l'écran comme au fil de la plume ce qu'il saisit comme avec une calculatrice dans la fenêtre de dialogue. Ce qui a été saisi est traduit en instructions pour le noyau de calcul : $\frac{28}{56}$, $\frac{5}{10}$ et $\frac{\mathrm{Pi}}{2\times\mathrm{Pi}}$ sont tous le nombre $\frac{1}{2}$. On peut représenter des objets de l'espace et les faire se mouvoir.

Exemples présentés [30]

Entrée par le lexique Équation du second degré dans $\mathbf{R}$.

http://euler.ac-versailles.fr/baseeuler/lexique/notion.jsp?id=97

On montre comment sont écrites les solutions, les rubriques connexes (discriminant), les exemples.

Entrée par les pages interactives Résoudre une équation du second degré :

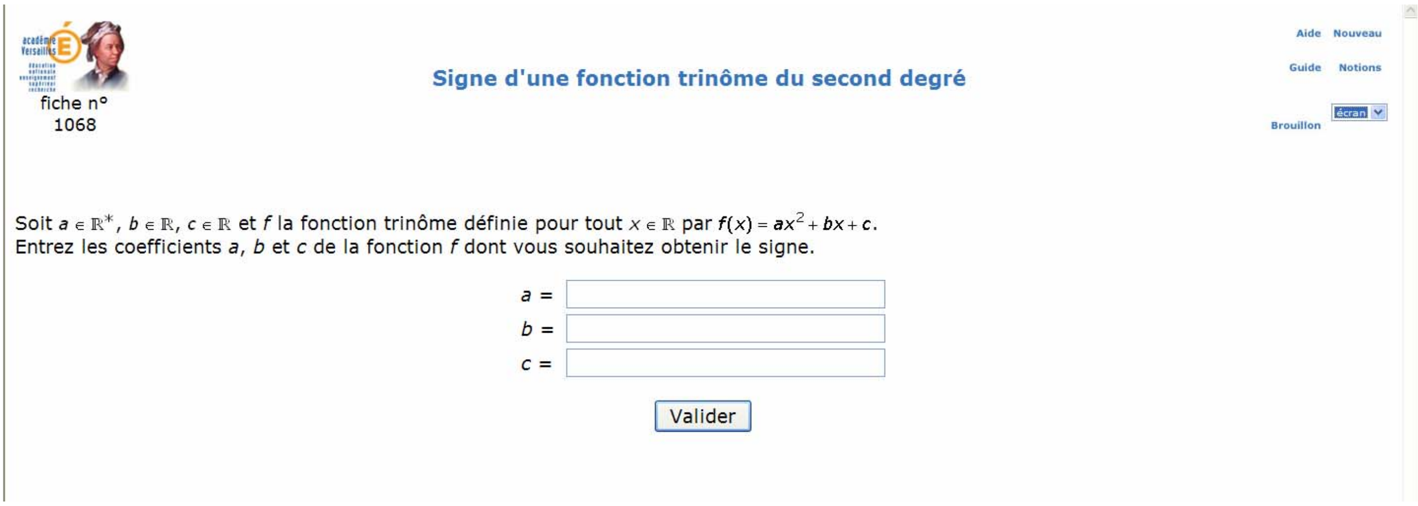
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/2nddegre/equations1.jsp montre un exercice d'apprentissage

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/2nddegre/latex/equations1.jsp propose un générateur d'exercices (sur sa demande, l'utilisateur obtient, sous forme de fichier .tex ou .pdf, un certain nombre d'énoncés d'exercices correspondant au thème, avec des solutions rédigées)

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/2nddegre/inequations1.jsp propose des exercices guidés

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/2nddegre/signe2.jsp donne un outil.

[30] La technologie permet certes de lire de « vraies » mathématiques, mais il faut équiper l'ordinateur client du composant MathPlayer, totalement gratuit, qu'il faut non seulement télécharger, mais **installer**.



b. Accompagner les élèves

Il faut pouvoir tenir compte des besoins de chacun, graduer les exercices, jouer sur les paramètres didactiques (garder des coefficients entiers là où ils pourraient en toute généralité ne pas l'être), prolonger les réponses données par l'élève par de nouvelles questions.

Il n'y a pas d'enseignement sans enseignant, telle est la devise du serveur. Aussi n'imagine-t-on pas que la machine seule puisse interpréter les réponses (au sens large) données par l'élève.

Exemples présentés

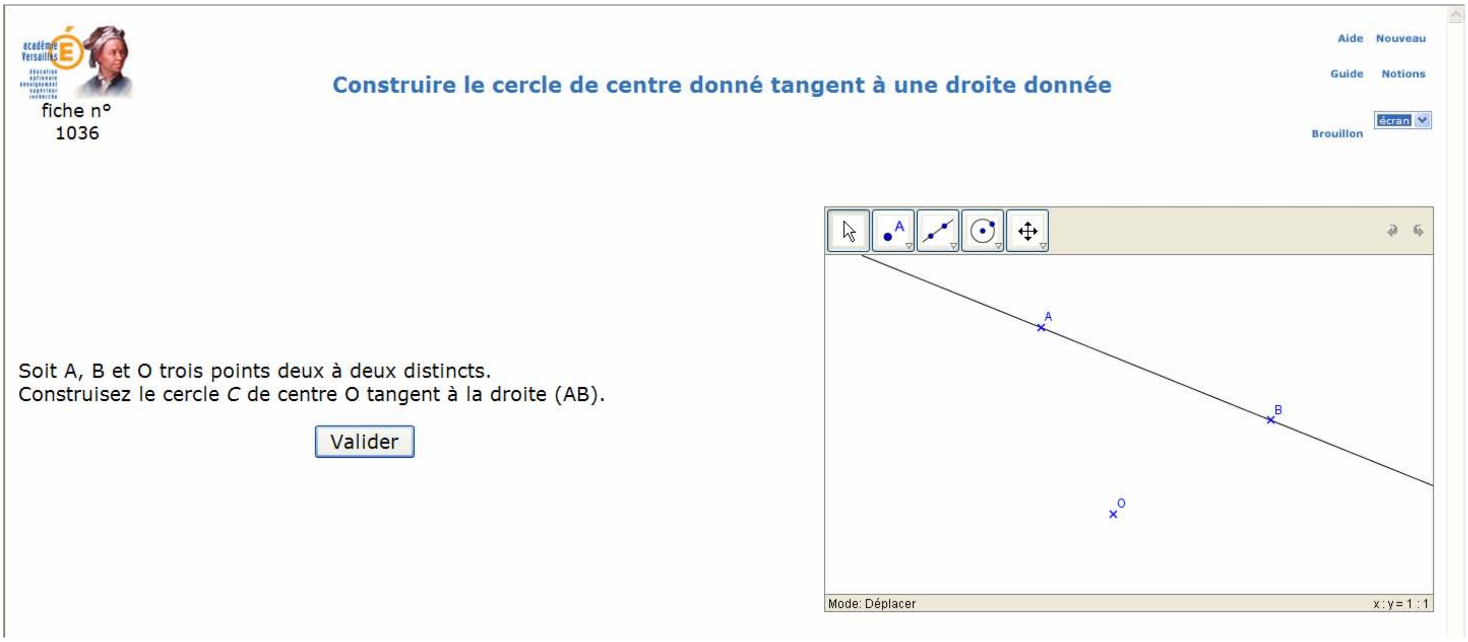
Dans le domaine du calcul numérique :

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/calculs/radicaux/radicaux1.jsp

et

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/logarithme/logarithme1.jsp montrent comment est précisé le champ de l'exercice.

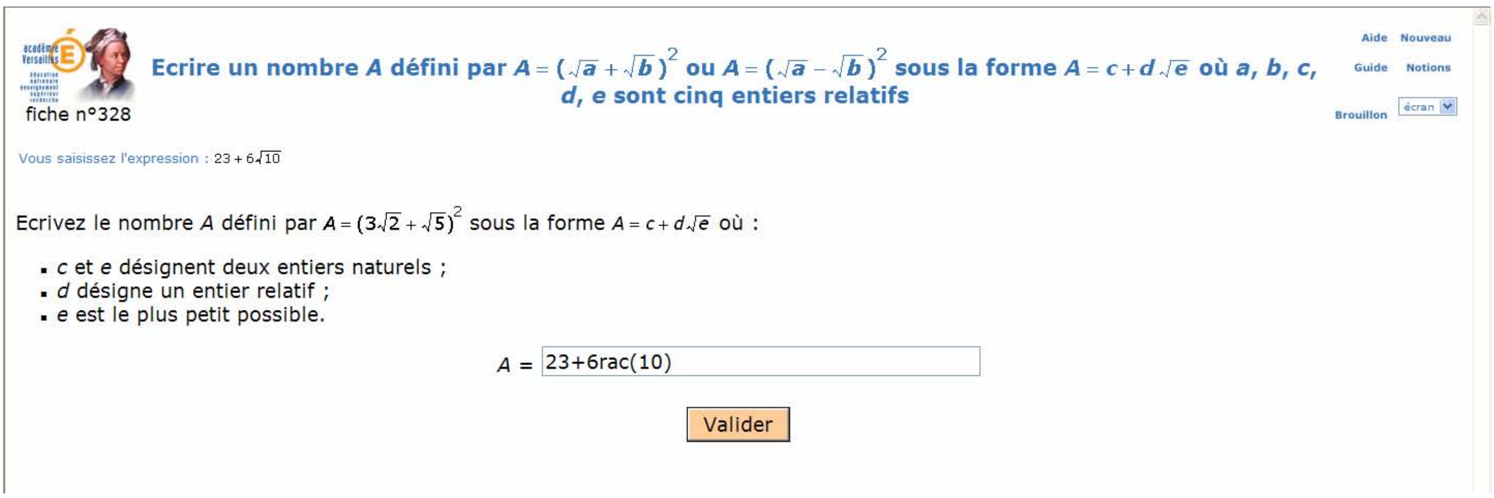
Dans le domaine du calcul littéral (fiche 158), dans le domaine des fonctions (fiches 990, 323 et 711), dans le domaine des nombres complexes (fiche 763), des statistiques (fiche 1111), en géométrie plane (fiches 90, 404, 1036) comme dans celui de la géométrie de l'espace (fiches 1423, 468, 847), de nombreux exercices d'apprentissages sont présentés qui confirment le propos liminaire.



Deux questions de la salle

La première interroge sur les messages d'erreur et les techniques de remédiation éventuellement mises en œuvre. Il est répondu que les messages d'erreur portent sur la forme du résultat proposé (et renvoient à l'énoncé) ou indiquent qu'une erreur de calcul a été commise, ou que la figure obtenue ne répond pas aux conditions données, mais n'interprètent pas ce qu'a fait l'utilisateur. Quelque chose du genre « vous avez confondu addition et multiplication » ne se rencontre pas sur *euler*, ce qui laisse place au dialogue entre l'élève et le professeur.

La seconde évoque l'effet possible sur les élèves de l'obligation d'écrire. Si elle peut être bloquante, c'est au professeur d'aménager le terrain. La plupart des pages interactives proposent à présent un espace de brouillon, où ce qu'on voudrait écrire trouve sa traduction en langage mathématique.



c. Accompagner les professeurs

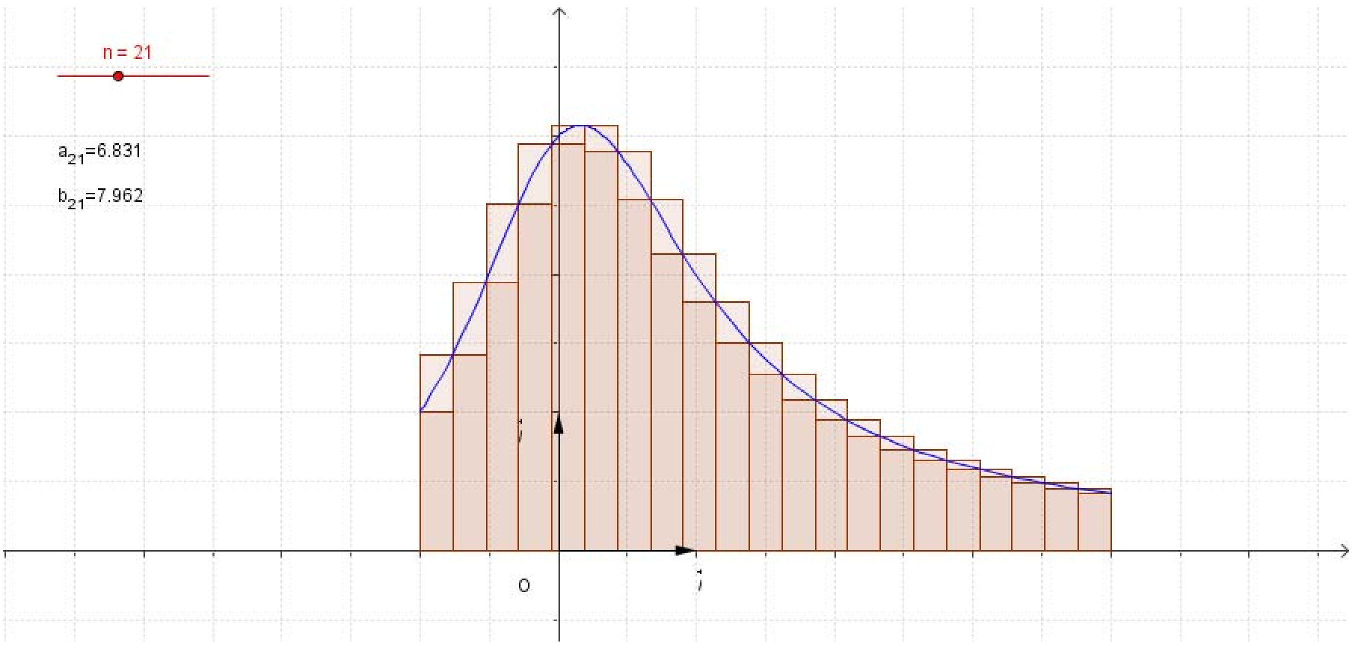
Les professeurs, ou les groupes de professeurs (l'académie de Versailles développe depuis 2004 le projet de création de *Départements de mathématiques* dans les lycées - à ce jour une cinquantaine de lycées sur les 180 que compte l'académie ont fait enregistrer par leur Conseil d'administration l'existence d'un *département de mathématiques* -) peuvent utiliser le serveur dans la pratique quotidienne du métier : c'est l'accompagnement que leur propose le lexique, tout d'abord, où chaque définition est mise en relation avec des définitions, des théorèmes ou des exercices connexes, celui des outils pour la classe ensuite.

Les nouvelles fonctionnalités du serveur viennent en aide au professeur pour la gestion des travaux d'élèves : devoirs en ligne, communication mathématique en langage mathématique avec les élèves, cahier de textes en ligne rédigé en langage mathématique.

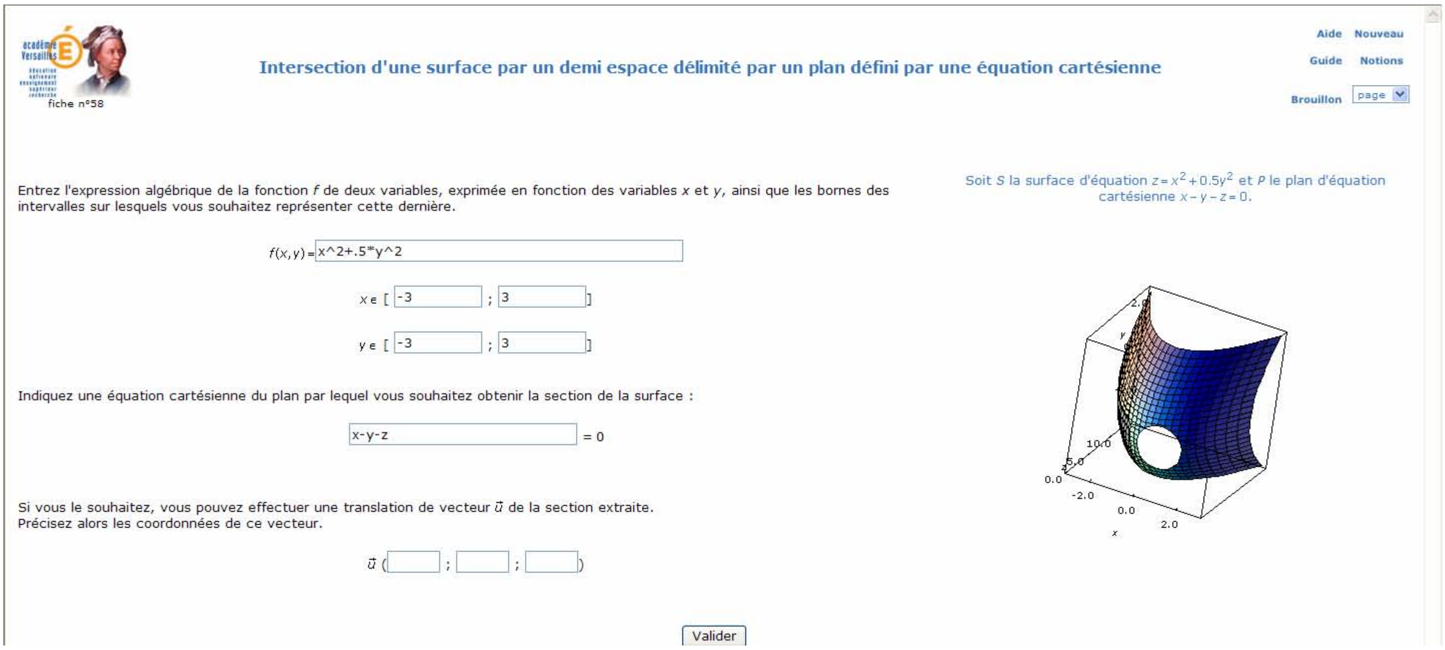
Exemples présentés

- Des outils pour la classe :

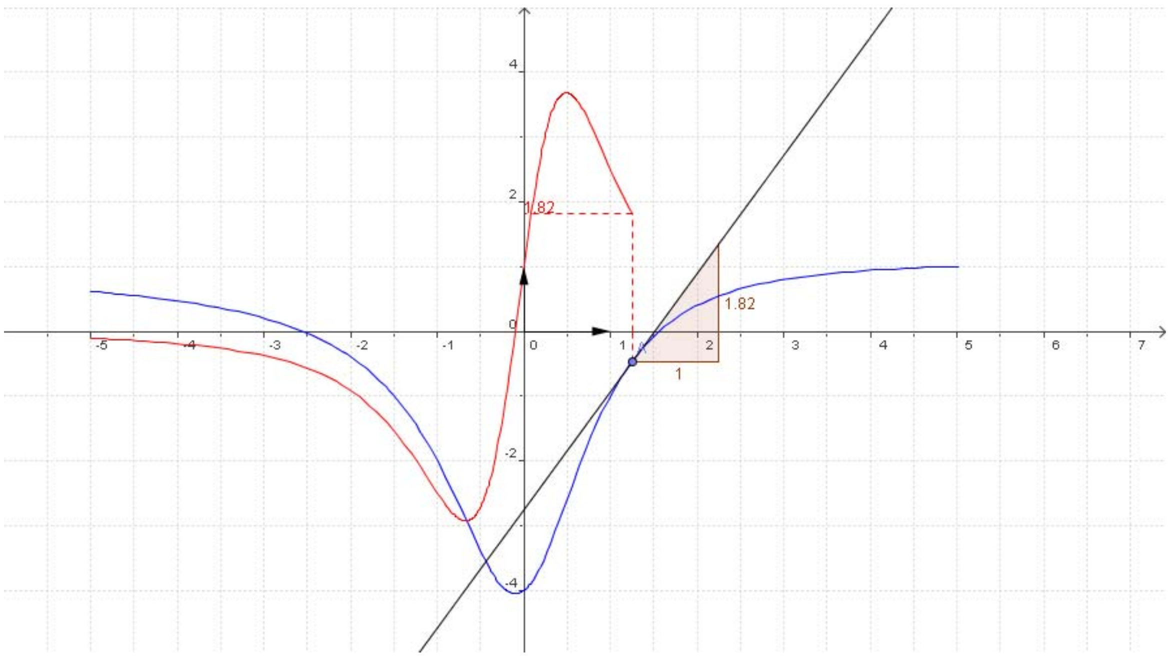
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/integrale/integrale2.jsp?expr=(3%2Bx)/(1%2Bx^2)&a=-1&b=4 permet au professeur de faire une animation sur les sommes d'aires de rectangles associées à la définition de l'intégrale (on peut utiliser la page interactive ou télécharger le fichier GeoGebra et l'utiliser en autonomie).



http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/pi/surfaces/section1.jsp permet d'observer des intersections de surfaces et plans

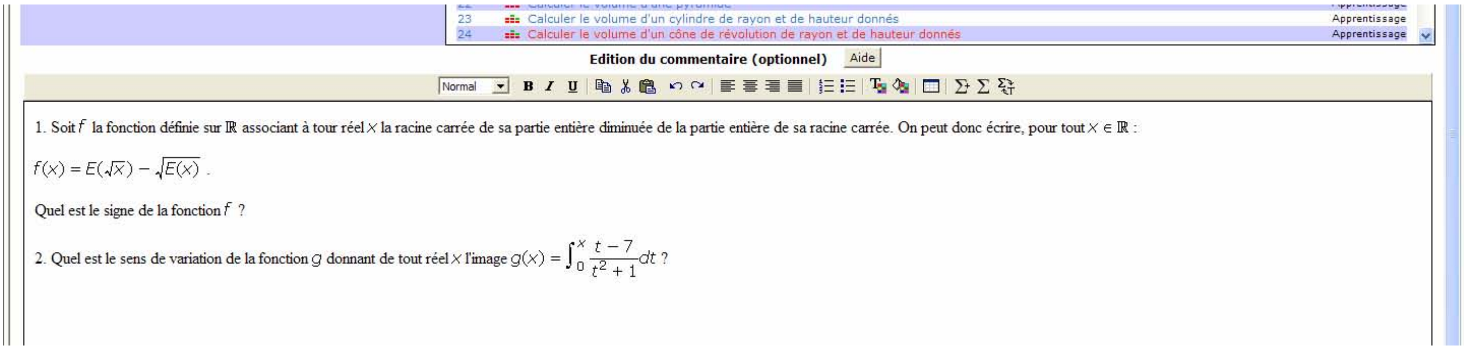


La fiche 47 permet de voir se tracer la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction (à chaque réel *x* de l'intervalle de définition, on associe la pente de la tangente à la courbe de la fonction donnée en son point d'abscisse *x*)



- Les espaces personnels de travail donnent la possibilité de gérer des classes, d'affecter des tâches à tout ou partie de l'effectif, de créer des devoirs et d'en surveiller l'avancement ou de les corriger en ligne, de tenir son cahier de textes.

Une interface d'utilisation très simple permet l'écriture de symboles mathématiques :



Des questions de la salle

Un enseignant peut-il créer des exercices ?

Non, un enseignant ne peut pas créer une page interactive, mais nombreux sont les collègues qui ont fait des demandes ou des suggestions au webmestre, qui a encore toute une liste de scénarios à réaliser.
Un enseignant peut, en revanche, créer des exercices, des devoirs, des séances de travail pour ses élèves : la partie « commentaires » des séances de travail peut contenir des énoncés d'exercices, les fiches proposées en marge renvoyant à des exercices modèles.

Qui peut utiliser les espaces personnels ?
Tout le monde. Il suffit de se déclarer.

Les fiches peuvent-elles être utilisées à partir d'autres serveurs ?
Il y a un problème d'adresse. Les fiches, fréquemment remises à jours pour suivre les évolutions technologiques, peuvent changer d'adresse.

Et les ENT ?
Beaucoup en parlent, en effet. Pas nous. Nous faisons simplement ce que nous pouvons pour les professeurs, qui disposent ainsi d'une plate-forme assez complète. Des développements sont prévus, qui seront annoncés à la fin.

d. Accompagner l'académie

Le site académique de mathématiques est aussi un vecteur d'information et un lieu de travail collaboratif pour des utilisateurs disposant de droits d'accès. C'est le cas des membres des cellules académiques d'organisation des Olympiades (de première mais aussi de quatrième).

Les *départements de mathématiques* sont aussi invités à témoigner de leur action. Nous leur réservons des espaces de travail qu'ils pourront utiliser en propre ou pour communiquer plus largement.
La *Pépinière académique de mathématiques* constituée récemment pourra elle aussi bénéficier des espaces ouverts sur le serveur.

e. Modéliser

En s'efforçant de garder une expression rigoureuse, en proposant dans le lexique des énoncés « définitifs » de définitions ou de théorèmes, le site académique fige un modèle. Il utilise un niveau de langage qu'on ne trouve pas nécessairement dans les manuels ni, *a fortiori*, dans certains « exerciseurs ». Même lorsqu'il propose un certain type de communication entre le professeur et ses élèves (rappelons cependant qu'il n'y a pas d'échange d'adresse électronique), *euler* modélise.

Questions de la salle

Lorsque vous utilisez GeoGebra, ne mettez-vous pas entre les mains des professeurs et élèves un logiciel qui n'a pas votre rigueur (il confond, par exemple, la fonction et l'équation de sa courbe représentative) ?
GeoGebra n'est pas offert en tant que tel, mais intégré à des pages interactives. Sous cette présentation, il est en quelque sorte bridé, les fonctionnalités utilisables étant limitées à ce qu'a voulu l'auteur de l'exercice. C'est plus libre dans les devoirs : l'élève peut rendre une figure ou une courbe réalisée avec GeoGebra ; c'est à son professeur de mettre en garde sur les abus de langage ou les confusions.

Les nouveaux professeurs ou les professeurs stagiaires sont-ils formés à l'utilisation d'euler ?
Des annonces sont faites systématiquement lors de nos réunions de rentrée (quatre réunions, une par département, ouvertes à tous les enseignants), lors des réunions d'accueil des nouveaux titulaires (plus de 400 cette année en mathématiques dans l'académie), lors des premières réunions disciplinaires à l'IUFM. Il ne s'agit dans tous les cas que d'information. Quelques réunions spécifiques *euler* sont régulièrement programmées.

f. Expérimenter

Le site académique se doit d'intégrer les innovations technologiques pour les mettre au service d'une meilleure expression mathématique, mais il doit aussi accompagner les innovations pédagogiques. Ainsi, avons-nous proposé de réaliser partiellement en ligne l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques pour les terminales S qui a eu lieu cette année dans quelques lycées (30 lycées expérimentaient dans l'académie de Versailles). Nous avons proposé une réécriture des sujets (les fiches élèves) comme devoirs ou séances de travail dans un espace dédié sur *euler*. Ce sera peut-être pour l'an prochain.

Nous proposerons prochainement un moyen de « valider » en ligne les compétences décrites dans le socle commun. Nous créerons des pages interactives consacrées à la démonstration et nous proposerons aux *départements de mathématiques* des espaces (blogs ou Wiki) utilisables par eux à discrétion.

http://euler.ac-versailles.fr

Atelier B5

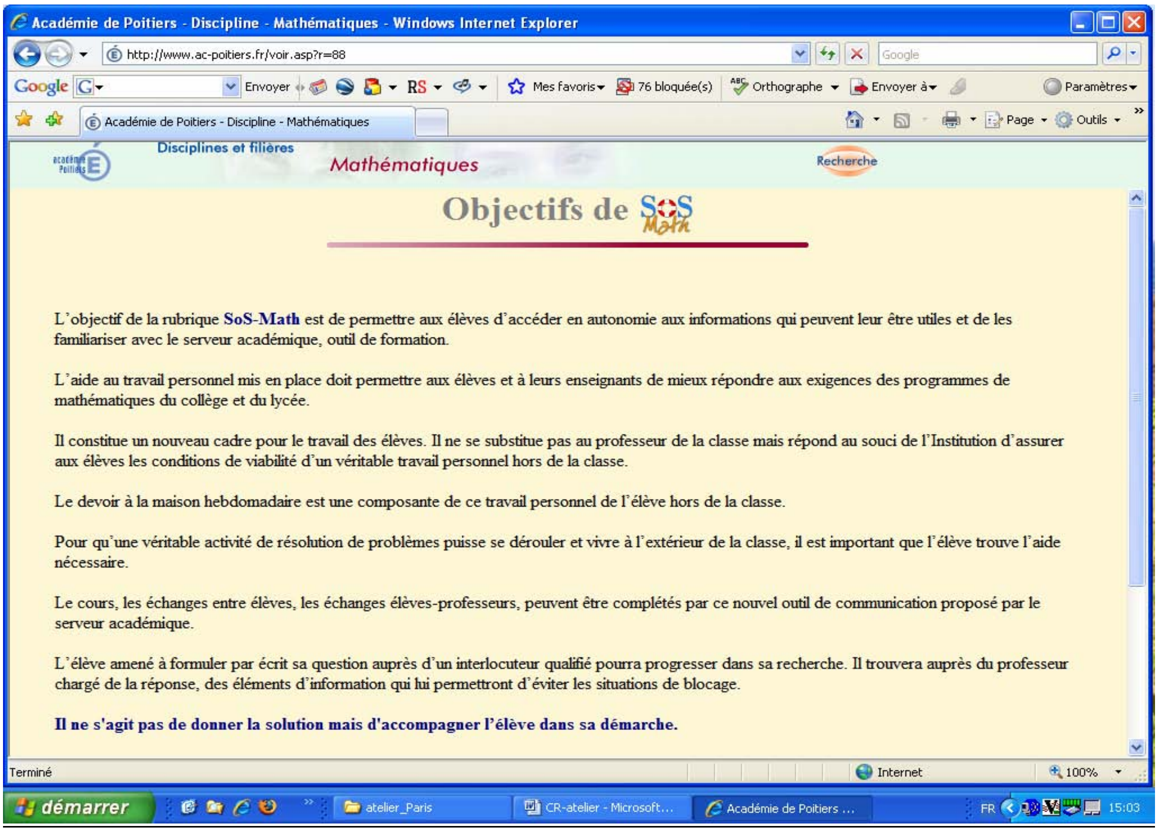
SoS-Math : un dispositif d'aide à distance gratuit

Intervenants :
Christiane Charrassier, professeure de mathématiques, académie de Poitiers
Jean-Louis Coquin, professeur de mathématiques, académie de Poitiers
Harry Christophe, IA-IPR de mathématiques de l'académie de Poitiers

Présentation du dispositif

Cet atelier a pour objectif de présenter le dispositif SoS-Math qui a été créé en 1998, sous l'impulsion de Danielle Blau, IA-IPR de mathématiques à l'époque en poste dans l'académie. Depuis, les IA-IPR qui se sont succédé dans l'académie ont été attentifs à développer cet outil en maintenant ses objectifs initiaux, et sa spécificité.

Les objectifs



Le fonctionnement

Il s'agit d'un forum asynchrone, où les élèves viennent déposer leurs questions. Ce forum est hébergé par le serveur académique de l'académie de Poitiers. Les questions posées par les élèves sont validées par un accompagnateur qui doit ensuite leur apporter une aide dans la recherche de la solution à la question posée.

Le point de vue organisationnel

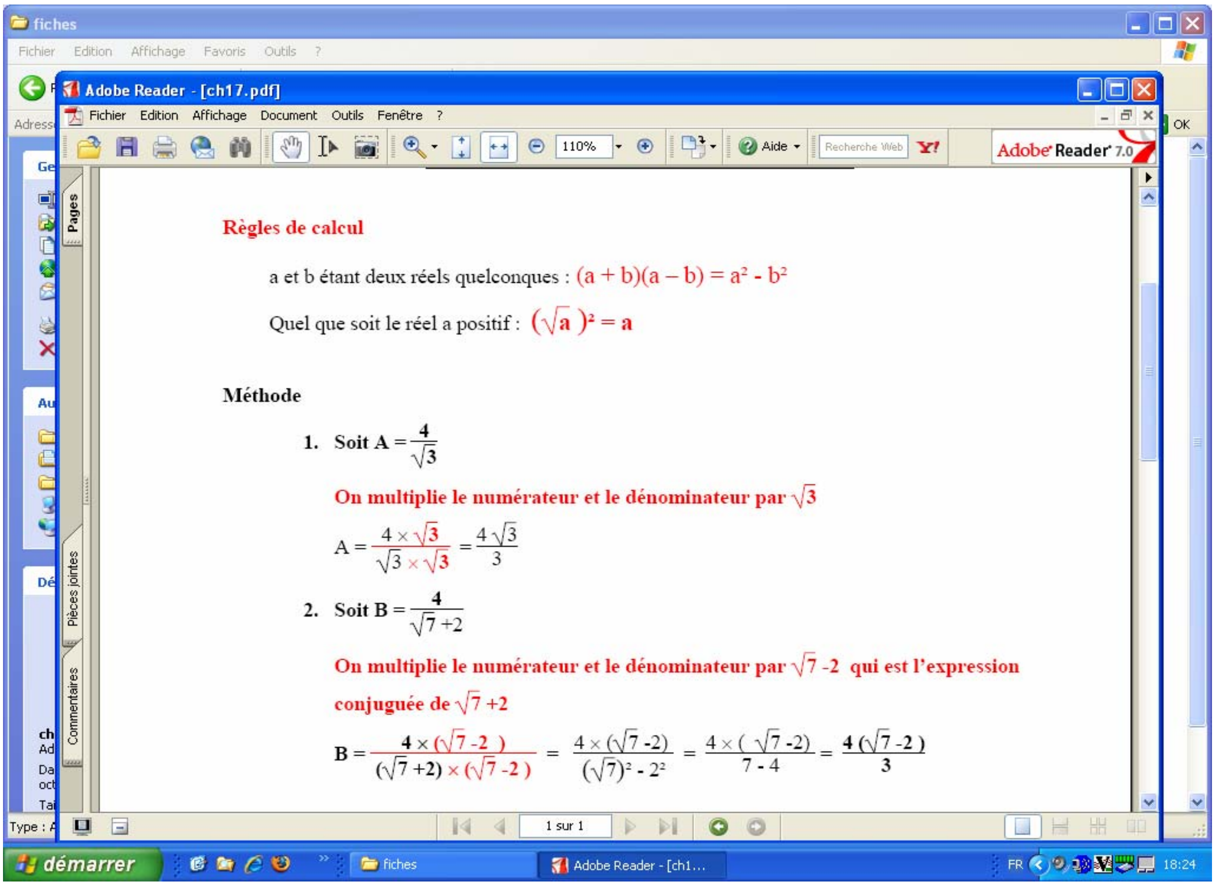
Les accompagnateurs sont des professeurs de mathématiques de l'académie de Poitiers. Chacun d'entre eux est responsable un à deux jours par semaine des réponses à donner. Ils ont à la fois un rôle de modérateur du forum et un rôle d'accompagnateur pédagogique. Ils constituent un groupe de six professeurs ressources en matière de TICE pour les mathématiques. La mission d'accompagnement du forum SoS-Math est intégrée dans les tâches assignées au groupe ressource TICE qui s'occupe aussi de la maintenance et de l'évolution du site disciplinaire académique. Ils sont aussi des acteurs très impliqués dans la politique d'animation académique en matière d'intégration des TICE dans les pratiques pédagogiques.

Un outil développé par l'équipe des accompagnateurs

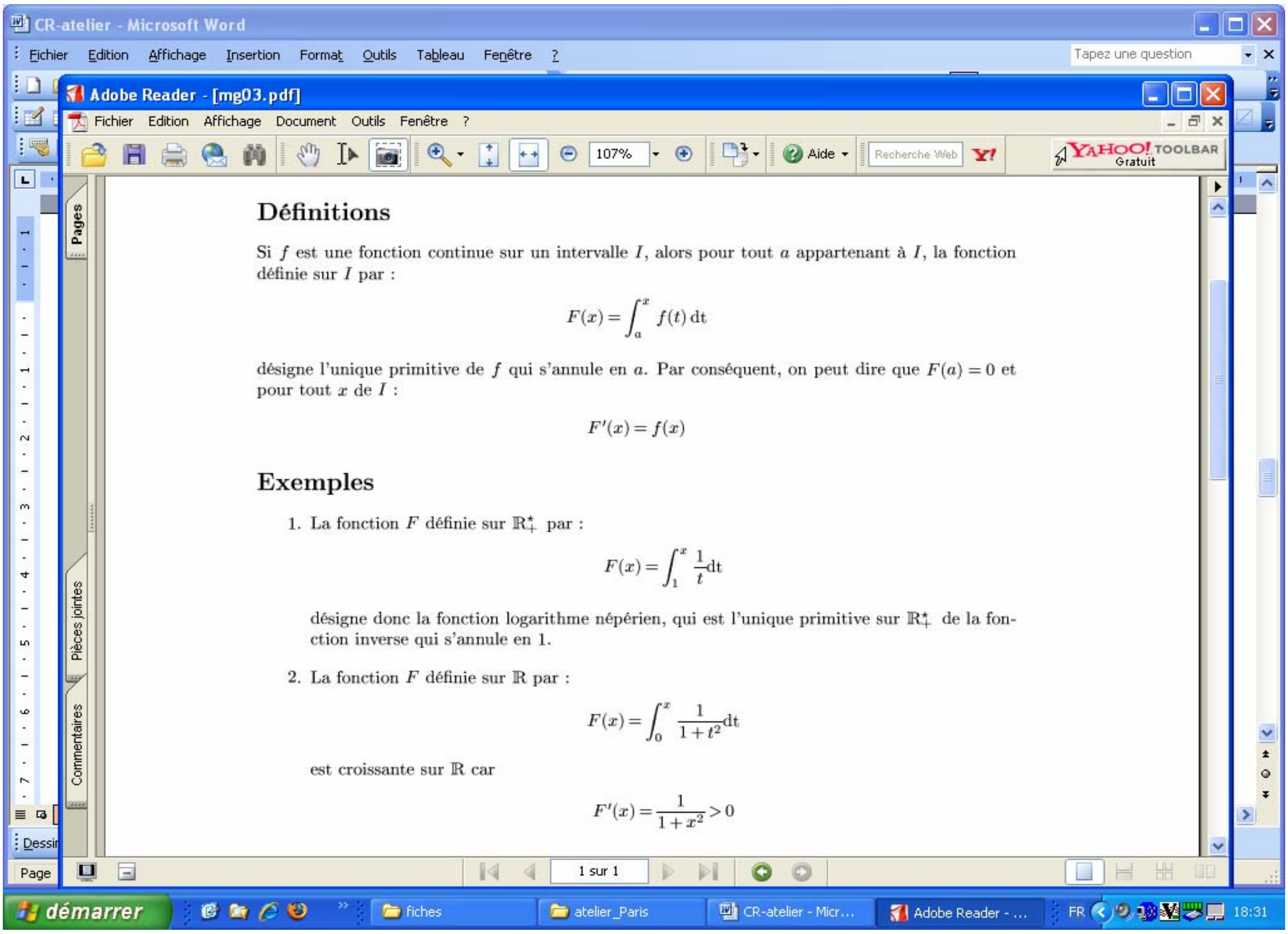
Un partenariat a été mis en place avec la région Poitou-Charentes en 2002, pour produire des fiches de cours qui peuvent être insérées dans une réponse à une question d'élèves.

Voici deux exemples de fiche :

- *Niveau troisième, « rendre rationnel un dénominateur »*



- *Niveau terminale S : « fonction définie par une intégrale »*



Définitions

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors pour tout a appartenant à I, la fonction définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

désigne l'unique primitive de f qui s'annule en a. Par conséquent, on peut dire que $F(a) = 0$ et pour tout x de I :

$$F'(x) = f(x)$$

Exemples

1. La fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

désigne donc la fonction logarithme népérien, qui est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse qui s'annule en 1.

2. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

est croissante sur $\mathbb{R}$ car

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

Quelques questions abordées dans le débat

Une première question de fond est posée : *quelle est la pertinence de ce dispositif ? Et s'il en a, quel est le niveau le plus approprié pour la mise en œuvre ?*

Le succès du dispositif, conjugué à la floraison d'aides de toutes sortes proposées par des opérateurs organisés dans un marché concurrentiel en dehors de la classe est une preuve même de la pertinence de ce type de dispositif.

Cela nous amène à nous poser des questions sur le vécu des élèves dans la classe, sur la pertinence pédagogique de certains modèles d'apprentissage en mathématiques. Le succès de tels dispositifs montre qu'un certain nombre d'élèves ne trouvent pas ou ne savent pas trouver les ressources nécessaires dans l'apport de leur professeur pour être autonomes dans la réalisation des travaux mathématiques à faire en dehors de la classe. Quand on sait l'importance du travail à la maison dans les stratégies pédagogiques prônées dans la discipline, il y a de quoi avoir quelques inquiétudes.

La gratuité du dispositif est importante aux yeux de tous, l'aide doit être inscrite dans les obligations du service public. La discussion va ensuite porter sur le niveau le plus pertinent d'implantation d'un tel dispositif. L'idée d'étendre un tel dispositif à l'échelon national a ses partisans ; les besoins dans ce domaine ne relèvent pas des particularismes locaux ; toutes les académies sont concernées. Mais d'autres voix viendront compléter ce panorama pour dire que c'est au niveau de l'établissement scolaire que cette aide prendrait le plus de sens et qu'elle est de la responsabilité même des acteurs pédagogiques locaux. Un certain nombre d'établissements s'organisent actuellement dans ce sens, et développent des forums d'aide aux devoirs, à travers des intranets et des environnements numériques de travail. Un consensus s'établit alors dans l'atelier pour avancer dans le sens de la complémentarité des deux niveaux, le niveau de l'aide à distance pouvant, grâce à l'anonymat, libérer de certaines inhibitions, en particulier de la peur d'avouer ses manques, ses erreurs.

On a pu aussi s'interroger sur la pertinence des fiches de cours puisque les élèves disposent d'un ouvrage scolaire, d'un cours rédigé apporté par leur professeur. Ces fiches de cours ne sont pas systématiquement envoyées aux élèves. C'est le professeur accompagnateur qui juge de l'opportunité de le faire et les fiches ne sont pas accessibles directement aux élèves. L'emploi de ces fiches se justifie par le fait que le professeur accompagnateur n'a pas accès au cours que l'élève a recopié en classe et qui peut ne pas être exact.
Une remarque de l'assistance interpelle aussi sur la place pédagogique accordée au cours dans la séance d'apprentissage en classe. Il n'est pas rare qu'un exercice d'application soit donné dans une classe après avoir entendu « Fermez vos cahiers de cours, prenez vos cahiers d'exercices ». Le lien entre ces deux aspects de l'activité mathématique est quelquefois distendu et l'élève n'arrive pas à établir de lui-même la cohérence de la formation.

SoS-Math a un public assez large qui va du collège au début de l'enseignement supérieur. *Est-il possible de penser à une adaptation à l'enseignement primaire ?* Plusieurs réserves sont émises quant à cette perspective, qui sont en résonance avec la place qu'occupent les TICE au niveau de l'enseignement primaire. D'abord, cette pratique repose sur une autonomie d'accès à l'outil informatique, ce qui n'est pas du tout garanti pour des élèves du primaire. De plus, les usages décrits lors de certaines interventions concernant les usages des TICE au primaire montrent des pratiques assez éloignées de l'utilisation qui est faite dans le secondaire.

Quelques repères supplémentaires sur SoS-Math

- **Bibliographie et webographie**

– Coquin, J.-L., (2002), Un forum pour l'aide en Math, revue Ac-Tice, n° 25, mars, http://ciel5.ac-nancy-metz.fr/ac-tice/article.php3?id_article=60
– Roser, E., (2003), SoS-Math un service d'aide en ligne de l'académie de Poitiers, Les Dossiers de l'ingénierie éducative, n° 45, décembre, page 42.
– Coquin, J.-L., (2006), SoS-Math, Les Dossiers de l'ingénierie éducative, n° 54, avril, pages 60 et 61.

- **Recherche**

Les archives de SoS-Math sont actuellement l'objet d'une recherche au sein de l'université de Poitiers, LMDC, UMR CNRS 6215.

Série C : Ressources et usages

Atelier C1

TI Navigator : un réseau de calculatrices dans la classe

Groupe CROME - TICE - Lycée de l'IREM d'Orléans
Manuel Péan, professeur de mathématiques, académie d'Orléans-Tours
Laurent Hivon, professeur de mathématiques, académie d'Orléans-Tours
Yves Olivier, IA-IPR de mathématiques de l'académie d'Orléans-Tours

1. Présentation

a. L'équipe et ses travaux en cours

L'équipe de recherche travaille dans deux cadres et sous deux identités distinctes : TICE-Lycée au sein de l'lREM d'Orléans et CROME[31] au sein de l'INRP. Notre action est soutenue par la SDTICE**.**

Notre travail se situe selon deux axes :

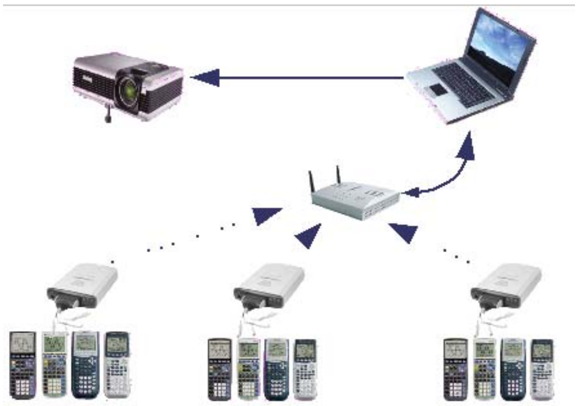
- *e-cureuil* qui illustre le cours de mathématiques du lycée par des animations interactives et disponibles en ligne et sous forme d'un cédérom envoyé à l'ensemble des lycées de l'académie d'Orléans-Tours ;

- *Tl Navigator* : depuis septembre 2005, nous travaillons dans le cadre d'un partenariat avec I'lNRP autour des deux thèmes suivants : comment l'intégration de ce nouveau dispositif dans la classe suppose un *renouvellement* profond des *situations mathématiques* et des *orchestrations* et comment la mise en œuvre raisonnée de ce dispositif pourrait favoriser une modification du rapport entre *l'élève* et le *groupe-classe,* facilitant l'émergence d'un *débat entre pairs*.

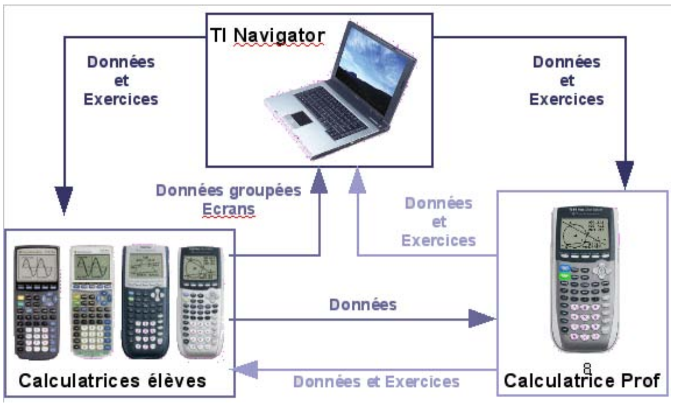
[31] Calculatrices en Réseau : Orchestrations et mutualisation dans un nouvel environnement

b. Le dispositif Tl Navigator

Le matériel



Les flux de données dans le réseau



c. Exemples de situations de classe

Plusieurs situations de classes ont été présentées durant l'atelier. En voici trois, décrites succinctement, en attendant la rédaction d'une brochure en cours de réalisation :

- TI Navigator permet l'élaboration d'exercices de type *Hot-Potatoes* : questionnaires à choix multiples, réponses à ordonner, textes à trous, questions ouvertes... Les élèves peuvent donc répondre à ces questions directement depuis leur calculatrice. De plus, il est possible d'afficher publiquement – anonymement ou non – l'ensemble des réponses proposées par la classe ou encore la réponse d'un élève en particulier. L'affichage peut alors faire l'objet d'un débat ;

- Le professeur propose à des élèves de seconde un travail de fenêtrage afin de résoudre des équations de la forme $f(x) = 0$. Les écrans des élèves sont affichés publiquement dans la classe. Cela permet de confronter les stratégies de recherche de fenêtre en temps réel ;

- TI Navigator permet de partager un même plan repéré entre toutes les calculatrices connectées. Les élèves peuvent y construire directement depuis leur calculatrice des points, nuages de points, courbes, graphiques statistiques dans un espace commun. Cet espace commun est public.

d. Une classe en action

Des extraits commentés d'une vidéo tournée dans une classe dans le cadre de la participation de l'équipe au *Panel Connectivity* organisé par l'ICME a été présentée durant l'atelier et a permis d'illustrer certains des points théoriques exposés ci-après.

2. L'expérience dans son cadre théorique

a. Les processus de genèse instrumentale

L'étude autour de TI Navigator a pour cadre les processus de genèse instrumentale développés par Luc Trouche (INRP). Ce cadre théorique a été introduit lors de l'exposé.

b. D’une recherche technocentrée vers une recherche anthropocentrée

L’évolution de la recherche depuis septembre 2005 est issue *d’une première approche technocentrée* (étude du dispositif et intégration dans le système scolaire français, installation et découverte du dispositif, premières activités spécifiques au Tl Navigator) pour évoluer vers un point de vue *anthropocentré* (problématique des ENT, étude d’un système multi-agents dans la classe).

Cette évolution s’est faite sous l’influence grandissante des systèmes dits multi-agents tels que les ENT. Il nous ait apparu que TI Navigator permettait d’étudier un tel système dans un micro-milieu : la classe.

c. Tl Navigator : une communauté de pratique dans la classe

TI Navigator permet de concevoir la classe comme une Communauté de Pratique et dont on peut distinguer les trois aspects fondamentaux : participation, réification, existence d’un répertoire partagé :

- *la participation :* les situations mathématiques, la construction collective d’objets mathématiques et enfin le débat mathématique sont les éléments les plus visibles de cet aspect ;

- *la réification :* l’exemple de la construction collective de la notion de courbe représentative d’une fonction qui devient progressivement un objet concrètement identifiable illustre un processus collectif de réification ;

- *Le répertoire partagé :* l’espace public où s’exprime l’ensemble des productions-élèves joue pleinement le rôle de répertoire partagé même si, dans cette expérience, son existence est de courte durée en se limitant à la durée de la séance.

d. Tl Navigator et travail collaboratif

Rappelons la différence entre travail coopératif et travail collaboratif telle qu’elle est communément définie : dans le cas de l’apprentissage coopératif, il y a une division et un partage des tâches, alors que dans le travail collaboratif, il y a confrontation et débat pour réaliser une tâche commune.

Par ailleurs, le travail collaboratif nécessite un regard réflexif sur ses propres pratiques et une relation avec les autres apprenants.

Tl Navigator et la réflexivité sur ses pratiques

Un facteur d’apprentissage est l’analyse de son action, la prise de distance par rapport à sa propre activité. Tl Navigator permet à chaque élève d’être confronté à la production et à la participation de ses camarades dans l’élaboration de son propre savoir grâce à l’utilisation d’un espace public de production.

Dans un dispositif plus « traditionnel », le vecteur d’expression de l’élève est essentiellement la parole (ou l’écrit quand il passe au tableau). Ici, l’élève semble détaché de sa production qui est portée sur la place publique par le dispositif : il y a une distanciation entre l’acteur et l’expression de sa production. Ici, l’élève s’engage différemment : l’outil lui permet de garder une certaine distance avec les résultats qu’il propose à la classe, et avec le professeur.

II semble s’établir une nouvelle forme d’interactivité entre l’artefact et l’utilisateur due à la modification d’environnement : l’élève instrumentalise l’artefact en le faisant passeur de son message tandis que l’artefact agit sur l’utilisateur en lui permettant de s’extraire de sa production et de s’inclure plus facilement dans un échange entre pairs.

Tl Navigator dans la relation entre les apprenants

Les échanges se déroulent essentiellement dans un espace commun de production ce qui facilite une interaction forte entre les élèves. Chacun prend part à la construction du savoir commun et donc à celui de chacun de ses camarades.

L’espace commun est, de plus, objet de débats et d’échanges qui tendent à l’élaboration d’une vérité mathématique sociale (cf. Marc Legrand).

3. Conclusions provisoires

Les premières conclusions quant à l’utilisation du dispositif Tl Navigator semblent faire état d’un renouvellement complet des relations et échanges dans la classe.

Toutefois, d’autres éléments doivent être pris en compte :

- les moments d’utilisation sont encore trop rares mais marquent la mémoire collective de la classe ;

- la relative lourdeur matérielle du dispositif en freine l’utilisation quotidienne ;

- ses conséquences sur les orchestrations modifient en profondeur la gestion de la classe ;

- la mise en place du projet a profondément renouvelé les relations entre les enseignants participant au travail de recherche.

Il est toutefois important de souligner que ce type de dispositif permet d’étudier une première approche des bouleversements que ne manqueront pas d’introduire les systèmes multi-agents de type ENT par exemple.

4. Le débat

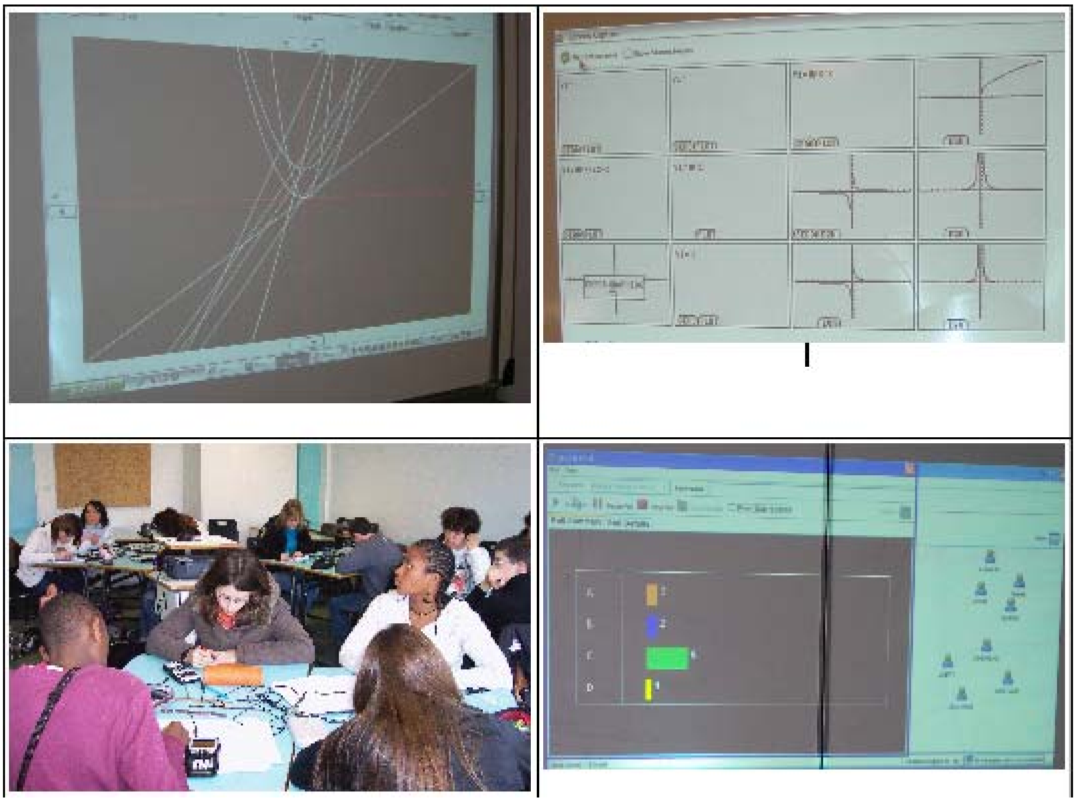
Un très court débat s’est engagé sur l’expérience. Les questions ont porté sur :

Les types de classe dans lesquelles se sont faites les expérimentations.
Réponse : Cela a concerné une terminale ES en classe entière et une classe de seconde durant des séances de module. Il y a peu de réexploitation des « données calculatrices » hors la classe. On peut signaler une orchestration nécessaire de la classe en trois temps : travail individuel, puis en groupe de quatre et enfin en grand groupe.

Les calculatrices compatibles avec le dispositif.
Réponse : Seules les calculatrices TI le sont.

Les difficultés à expérimenter
Réponse : le plus difficile est de mesurer l’évolution et les progrès des élèves.

5. Quelques exemples de productions



6 Quelques références

Diffusion et suivi de notre activité :

- le site de I'e-cureuil : http://piero.perso.cegetel.net/index.htm;
- site SPIP de suivi des travaux autour de Tl Navigator http://euler-perso.nuxit.net/;
- site INRP Educmath http://educmath.inrp.fr/Educmath.

Travail collaboratif et coopératif :

Les communautés de pratique : travaux de Luc Trouche et de Michèle Artigue

Le débat mathématique : revue Repères IREM n° 10 : un article de Marc Legrand .

Atelier C2

Les usages pédagogiques d’un tableau blanc interactif (TBI) en mathématiques

Intervenants :
Roselyne Halbert, professeure de mathématiques, académie de Rennes
Loïc Le Gouzouguec , professeur de mathématiques, académie de Rennes
Éliane Deguen, IA-IPR de mathématiques de l’académie de Rennes

1. Introduction

La présentation s’appuie sur les travaux réalisés par une équipe d’enseignants de mathématiques dans le cadre d’un groupe de recherche de l’IREM de Rennes, avec le soutien de l’INRP et de la SDTICE.
Différents tableaux existent, de marque différente :

- des formats d’enregistrement de fichiers construits avec le TBI sont incompatibles d’une marque à l’autre mais des exportations dans des formats plus standards sont possibles ;
- les fonctions principales sont, pour la plupart, identiques avec des fonctions supplémentaires parfois.

Quelques exemples présentés par les deux enseignants

Les exemples choisis :

Constructions géométriques dans les classes de *collège* : utilisation dynamique des outils (rapporteur et compas, seulement sur TBI Promothéan) en temps réel, conception et utilisation d’un imagiciel réalisant une figure pas à pas.

Mise en œuvre et exploitation de graphiques en classe de *seconde* : résolution dynamique d’un système de deux équations en utilisant d’abord les outils graphiques proposés par le logiciel du tableau, puis une calculatrice virtuelle pour affiner la lecture et enfin un logiciel de géométrie (GeoGebra) pour multiplier les situations.

Élaboration interactive d’une séance de cours en classe de *première S* : analyse, première mise en place de la méthode d’Euler pour approcher la solution *f* sur [0 , 4] de l’équation différentielle $y' = \frac{1}{1+x^2}$ avec $f(0)=0$, représentation graphique de cette solution (utilisation du logiciel GeoGebra).
La séance s’appuie sur un fichier préparé, en partie, au préalable par l’enseignant (représentation graphique de la fonction *f* ‘, construction d’une solution approchée avec un pas donné, avec différents pas).

Le problème est présenté à la classe de manière ouverte et la résolution se construit à partir des propositions des élèves qui sont notées, puis annotées au tableau à la suite d’échanges dans la classe : traduction des données en termes de point « de départ », tangente en ce point, sens de variation, tracés par les élèves de courbes « possibles » au voisinage du point O)…

La trace écrite est conservée ce qui permet de revenir à tout moment sur ce qui a été dit et écrit auparavant (prise en compte des questions des élèves, approfondissement d'un aspect…).

La méthode est peu à peu dégagée : choix d'un pas, mise en place de la construction de la solution pour les premiers intervalles. L'enseignant peut alors compléter la construction sur l'intervalle donné, présenter de meilleures approximations correspondant à des pas plus petits et proposer aux élèves de mettre en œuvre l'algorithme sur leur calculatrice en testant les propositions sur la calculatrice virtuelle.

Exploitation de travaux numérisés d'élèves et traitement des erreurs, vers des usages d'ENT : *première STG* :

l'enseignante a demandé aux élèves de produire un fichier tableur (travail réalisé en salle informatique) et de le déposer dans un répertoire précis du serveur de l'établissement (ceci peut être fait de l'extérieur du lycée dans le cadre d'un ENT). Le lycée est en réseau global et la salle de classe reliée à ce réseau. L'enseignante peut donc accéder à ce fichier, l'exploiter en classe collectivement ou individuellement, l'annoter, enregistrer le résultat pour ensuite l'imprimer.

Échanges avec l'auditoire relatifs principalement aux scénarios de cours, aux formats des documents affichés sur le TBI (images ou fichiers Excel, Geoplan…), à la prise de note élève.

Conclusion

Le TBI est un outil intéressant et, si son utilisation n'est pas une fin en soi, il peut constituer une entrée motivante dans les usages des TICE et dans l'utilisation de logiciels en classe pour les enseignants. Sa prise en main nécessite un accompagnement mais l'utilisation en classe peut se faire de manière progressive, ce qui permet aux enseignants de prendre rapidement de l'assurance.

Son intégration suppose une utilisation régulière (exploitation d'un cours à l'autre) ce qui pose la question de l'accès aux matériels, avec le souci d'avoir dans l'établissement une seule marque de tableaux.

Atelier C3

Des communautés d'« auteurs-utilisateurs » : Sésamath

Intervenants :
Jean-Pierre Archambault, CNDP-CRDP de Paris
Benjamin Clerc, professeur de mathématiques, président de Sésamath
Sébastien Hache, professeur de mathématiques, fondateur de Sésamath

De plus en plus nombreux, des enseignants « auteurs-utilisateurs » de ressources pédagogiques mettent leurs réalisations sur le web à disposition de leurs collègues, librement et gratuitement. Des communautés professionnelles et associatives se constituent, qui s'appuient pleinement sur les potentialités d'interaction d'Internet dans leurs démarches collaboratives. Au premier rang de ces communautés, figure Sésamath (1).

Fabriquer des documents pédagogiques : de l'ancien au nouveau

Certes, leur métier a toujours amené les enseignants à réaliser de nombreux documents dans le cadre de la préparation de leurs cours. Les associations de spécialistes ont toujours joué un rôle éminent et reconnu dans la mise en oeuvre des programmes et dans la pédagogie quotidienne de la classe. Mais la fabrication matérielle et la diffusion n'ont effectivement pas toujours été simples. Que l'on songe aux temps héroïques de la ronéo... Jusqu'à l'arrivée de l'ordinateur et d'Internet, une élaboration coopérative avec des collègues et la visibilité des ressources produites ne pouvait aller au-delà d'un cercle restreint et rapproché. Modifier un document écrit à la main était (et demeure) une opération lourde, qui plus est, quand il circule et que chacun y met sa griffe. Les photocopieuses étaient rarissimes, les machines à alcool fastidieuses à utiliser. Des échanges sur une plus grande échelle supposaient de mettre en forme des notes manuscrites. Or, la machine à écrire manquait de souplesse, ne tolérant pas vraiment les fautes de frappe et ne connaissant pas les formules mathématiques ! Il était donc difficile de coopérer sur des documents communs au-delà d'une petite communauté, de diffuser à grande échelle ce que l'on avait fait. Le manuel scolaire était alors la seule perspective pour une diffusion élargie, l'éditeur, le passage obligé, et on lui accordait d'autant plus facilement des droits sur la fabrication des ouvrages que l'on ne pouvait pas le faire soi-même !

Avec la banalisation des outils informatiques (traitement de texte, logiciels de PAO...) et le développement d'Internet, la situation a radicalement changé. Une situation nouvelle s'est installée, qui réside donc dans cette possible et aisée production-circulation à grande échelle de « manuscrits électroniques ». Elle est irréversible. Elle met sur le devant de la scène des problématiques intéressantes.

Des enjeux pédagogiques, économiques et sociétaux

Sésamath et ces communautés d'enseignants, « intellectuels collectifs », fonctionnent à la manière des communautés de développeurs de logiciels libres. Le paradigme du libre est celui de la recherche scientifique.

Le fonctionnement présente des potentialités en matière de formation. Derrière un scénario de cours, une fiche d'exercices faits avec l'ordinateur, un document décrivant le détournement d'un logiciel dans un contexte donné, il y a toujours une pratique professionnelle. Les échanges auxquels les ressources créées donnent lieu, les dialogues, les confrontations et les débats sont autant d'occasions pour asseoir des modalités particulières de formation continue. Produire une ressource, écrire sur des pratiques, « mettre à plat » un scénario pédagogique en favorisant la réflexion, sont donc en eux-mêmes des actes formatifs (2).

Les synergies regroupant le service public d'éducation et les associations d'enseignants sont bénéfiques pour les uns et les autres (« gagnant-gagnant »), et donc d'abord pour les élèves et la pédagogie. Elles respectent l'autonomie de chacun, ses formes d'organisation.

L'on sait que le numérique est à l'origine de turbulences dans le monde de l'édition scolaire (3). L'émergence forte des enseignants « auteurs-utilisateurs » modifie le paysage traditionnel de l'édition scolaire et ses équilibres. D'un côté, Sésamath met librement et gratuitement ses réalisations pédagogiques sur le web. De l'autre, elle procède à des coéditions, à des prix « raisonnables » de logiciels, de documents d'accompagnement, de produits dérivés sur support papier avec des éditeurs, public (CRDP de Paris) et privé (Génération 5) à partir des ressources mises sur le web. Le succès commercial est au rendez-vous. La question est posée de savoir si l'on assiste à la mise en place d'un nouveau modèle économique de l'édition scolaire.

L'édition scolaire n'est pas le seul secteur économique en proie à des turbulences de par l'irruption de l'informatique et des réseaux. Les débats « passionnés » qui ont accompagné la transposition de la directive européenne DADVSI (Droits d'auteurs et droits voisins dans la société de l'information) par le Parlement sont encore dans les mémoires et ils témoignent qu'il s'agit là de questions de société de premier plan (4, 5). Des réponses de type « Creative Commons » favorisent le « travailler ensemble » (6).

L'association Sésamath regroupe 61 professeurs de mathématiques de collège. Environ 400 contributeurs-auteurs utilisent régulièrement les outils de travail coopératif mis en place par Sésamath, Wiki, Spip, forums, gestionnaire de fichiers et listes de diffusion ; une plate-forme de travail collaboratif a été créée pour répondre aux besoins des projets soutenus par l'association. Avec toujours le même souci de gratuité, renforcé par une volonté forte de production de ressources sous licence libre, et si possible format ouvert, Sésamath ne soutient que des projets collaboratifs (7). L'association s'occupe essentiellement des relations avec les institutions et les partenaires, favorise et encourage les synergies entre projets existants. En 2006, ce sont plus de 500 000 visites par mois en moyenne qui ont été comptabilisées sur l'ensemble des sites de Sésamath (832 000 en janvier 2007).

Parmi les projets soutenus, nous mentionnerons **MathEnPoche** (8), **MathémaTICE** (9) revue en ligne sur l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques, née en septembre 2006, et les manuels scolaires libres **Sésamath 5ème**, paru en septembre 2006 et **Sésamath 4ème**, paru à la rentrée 2007 (10).

(1) www.sesamath.net

(2) *Des enseignants auto-producteurs*, Jean-Pierre Archambault et Michèle Drechsler, Médialog n°52 http://www.ac-creteil.fr/medialog/ARCHIVE52/autproduct52.pdf

(3) *Les turbulences de l'édition scolaire*, Jean-Pierre Archambault, colloque SIF « Les institutions éducatives face au numérique », organisé par la Maison des Sciences de l'Homme de Paris-Nord, Paris les 12 et 13 décembre 2005.

http://sif2005.mshparisnord.net/pdf/Archambault.pdf

(4)*Téléchargement sur Internet : quelle légitimité ?*, Jean-Pierre Archambault, Médialog n°57

http://www.ac-creteil.fr/medialog/ARCHIVE57/dadvsi57.pdf

(5) *Innover ou protéger ? Un cyber-dilemme*, Jean-Pierre Archambault, Médialog n°58

http://www.ac-creteil.fr/medialog/ARCHIVE58/dadvsi58.pdf

(6) *Naissance d'un droit d'auteur en kit ?* Jean-Pierre Archambault, Médialog n°55

http://www.ac-creteil.fr/medialog/ARCHIVE55/jpa55.pdf

(7) *Sésamath, de la mutualisation au travail collaboratif*, Yann Pozzar et Benjamin Clerc, Les dossiers de l'ingénierie éducative n°54

http://cii.sesamath.net/articles/ClercPozzar.pdf

(8) http://mathenpoche.sesamath.net/ http://cii.sesamath.net/articles/articles.html http://mathenpoche.net/index.php?page=320 http://www.citic74.fr

(9) http://revue.sesamath.net/

(10) http://manuel.sesamath.net/.

Interview de Noël Debarle à Framasoft, http://www.framasoft.net/article339.html
Manuel du futur... proche ?? Sébastien Hache, http://revue.sesamath.net/spip.php?article34

Atelier C4
Élaboration de ressources par les enseignants sur la base d'un modèle partagé, trajectoires d'usages et constitution d'une mémoire commune

Intervenants
Luc Trouche, INRP et LIRDHIST[32]*, Université Lyon 1* (luc.trouche@inrp.fr)
Marie-Claire Combes et Jacques Salles, IREM, Université Montpellier 2

Un constat et une hypothèse forte

L'atelier avait pour objectif de présenter une expérience originale, qui s'est développée de 2000 à 2006 dans l'académie de Montpellier, le SFoDEM : Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques (Guin et al 2007).

Partant d'un double constat (la *complexité* de l'intégration des TICE dans la classe de mathématiques et *l'inadéquation* des dispositifs usuels de formation pour aider les enseignants à faire face à cette complexité), l'IREM de Montpellier a conçu le SFoDEM à partir d'une première hypothèse forte : c'est en mettant les enseignants en position de *concevoir*, *collaborativement*, des ressources pédagogiques, puis de les *expérimenter* dans leurs classes, et enfin de les *réviser* à la lumière de ces expérimentations, que l'on facilitera au mieux l'évolution des pratiques professionnelles rendue nécessaire par les nouveaux environnements technologiques.

L'architecture du SFoDEM

Pour valider cette hypothèse, le dispositif suivant a été mis en place (Figure 1), appuyé sur une plate-forme d'échange à distance qui permet des échanges sur le long terme :

- quatre groupes de formation sur des thèmes différents ;
- une cellule de formation regroupant les pilotes du dispositif (enseignants-chercheurs), une cellule technique pour l'administration de la plate-forme et aider à la médiatisation des ressources, un coordonnateur des thèmes et les formateurs intervenant dans chacun des quatre groupes.

---

[32] LIRDHIST : Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et des Techniques

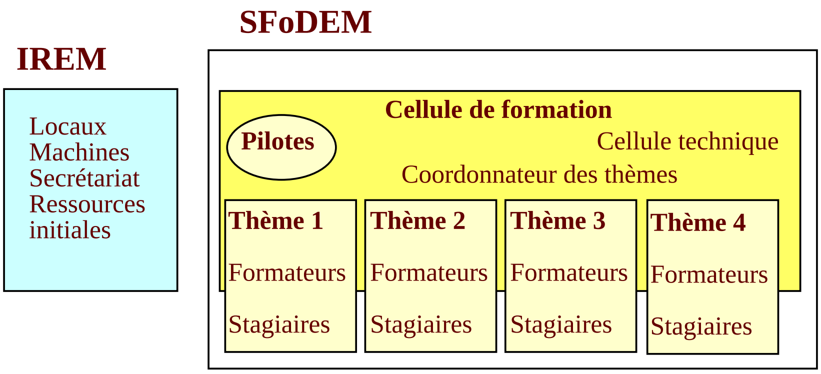


Figure 1. L'architecture du SFoDEM

La variété des thèmes de formation (variété de technologies, variété de domaines mathématiques, variété de dispositif d'intégration des TICE) était liée à un objectif de recherche précis : trouver des éléments communs, des *invariants* pour la structure des ressources qui pourraient être *mutualisées* dans les groupes d'enseignants impliqués. La deuxième hypothèse de ce projet était en effet que la mutualisation de ressources pédagogiques suppose l'émergence d'un *modèle* partagé pour ces ressources.

Deux histoires convergentes

L'atelier a présenté, pour illustrer cette émergence d'un modèle, les histoires de deux des quatre groupes du SFoDEM : le groupe qui a travaillé sur l'utilisation dans la classe de figures animées (à partir de fichiers de géométrie dynamique) vidéo projetées (Ravier et al 2006) et le groupe qui a travaillé autour de la résolution collaborative de problèmes ouverts (Combes et Sauter 2006).

Ces histoires ont bien mis en évidence les évolutions *en interaction* du dispositif lui-même et du modèle des ressources. Ni le dispositif, ni le modèle de ressources n'étaient prévisibles à l'avance. Ils sont apparus comme des nécessités pour l'ensemble des acteurs, comme des produits des histoires individuelles et collectives. Ils ont été conçus et réfléchis dans la cellule de formation :

- pour favoriser le processus de conception et d'expérimentation de ressources, des petits *groupes de projets* (3 ou 4 personnes) se sont constitués dans chaque thème de formation. Ils ont commencé à travailler non pas sur des ressources très ambitieuses, mais sur des *germes de ressources* (une animation, une idée de situation mathématique), en essayant, petit à petit, de construire une ressource plus complète, puis de l'expérimenter dans une classe, de la réviser, avant de la proposer au groupe associé au thème. Des *chartes* ont été conçues, précisant les engagements de chacun des acteurs du dispositif. Les *mémoires de travail* collectives ont été construites au fur et à mesure du développement du dispositif, favorisant un travail réflexif de tous les acteurs ;

- un modèle de ressources a émergé progressivement. Composé, au début de l'expérience du SFoDEM, pour certains groupes, d'une fiche élève, d'une fiche pour le professeur et d'un fichier informatique, il s'est enrichi tout au long de l'histoire des différents groupes. Très rapidement la nécessité d'un *scénario d'usage*, proposé par le groupe vidéoprojection, s'est imposée, pour proposer au professeur une organisation du temps et de l'espace de la classe permettant de mettre en œuvre cette ressource. Un *compte-rendu d'expérimentation* a été ajouté aussi, permettant à tous les utilisateurs de la ressource d'inscrire leur propre expérience et d'en faire profiter tout le groupe (permettant des évolutions ultérieures du scénario, ou de la fiche élève, ou…). Une *fiche d'identification* est apparue très vite nécessaire pour pouvoir situer une ressource dans un ensemble plus vaste : identifier la ressource a imposé alors de mieux situer ses objectifs pédagogiques, de mieux situer la pertinence de l'emploi des TICE sollicitées. Le groupe travaillant sur la résolution collaborative de problèmes ouverts a souhaité aussi garder les traces des narrations de recherche produites par les élèves. Cette idée est apparue fructueuse à tous les groupes et a débouché sur une nouvelle pièce - *traces* - dans le modèle. Cette nouvelle pièce a permis de renouveler la réflexion didactique : quelle trace est-il pertinente de conserver ? Quels sont les moments critiques du travail des élèves qu'il est utile, pour d'autres utilisateurs de cette ressource, de mémoriser ? En 2006, le modèle de ressource (Figure 2) fait ainsi consensus dans le SFoDEM : la dernière pièce ajoutée est un curriculum vitae, qui permet de conserver les principaux moments de construction et d'évolution de la ressource. Chaque enseignant apparaît ainsi comme un maillon d'une chaîne d'utilisateurs, qui, tous, contribuent au développement d'un *vivier* commun de ressources.

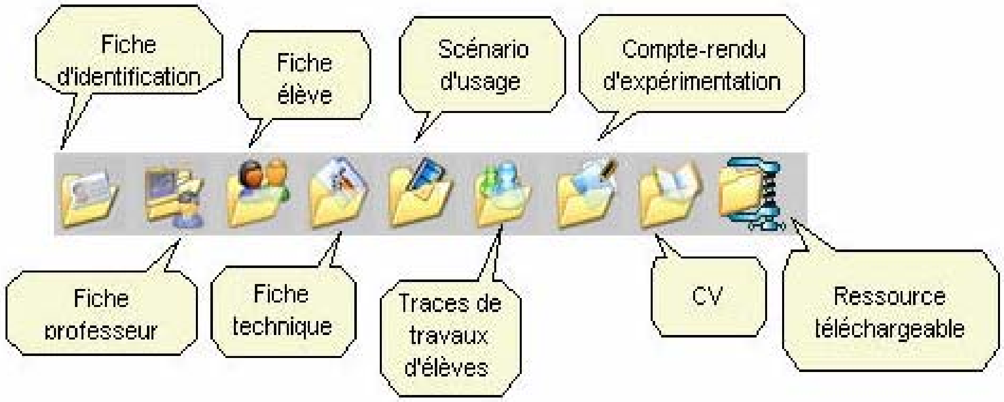


Figure 2. Le modèle 2006 de ressources pédagogiques du SFoDEM

Quel bilan et quelle suite ?

Il est difficile de donner en quelques lignes un bilan de 6 ans d'expérience. Trois éléments ressortent plus clairement :

- il a fallu du *temps* pour que le dispositif se construise, et qu'émerge un modèle de ressources qui soit une aide, aussi bien pour les auteurs de ressources que pour les utilisateurs ;

- il y a eu tout au long de cette histoire une *interaction forte entre formation et recherche* (Aldon et al 2006) ;

- l'intégration des TICE a progressé pour les professeurs stagiaires impliqués dans le SFoDEM, cette intégration s'est accompagnée d'un approfondissement de la réflexion didactique pour tous les acteurs, formateurs et stagiaires.

La dernière étape de la vie du SFoDEM a eu pour objectif à la fois d'approfondir ce bilan et d'extraire de cette expérience ce qui pourrait être utile à d'autres communautés d'enseignants désireux de concevoir collaborativement des ressources. Cette réflexion a débouché sur un cédérom (Guin et al 2007). Ce cédérom (Figure 3) propose deux grands « chapitres » :

- une médiathèque, qui donne à voir les produits de l'expérience du SFoDEM (les ressources pédagogiques, des documents de référence conçus par les acteurs du dispositif, des témoignages et des *outils* – pour aider à l'indexation des ressources par exemple –) ;

- un parcours, qui essaie d'abstraire de la genèse du dispositif les différentes étapes de son développement et indique quels ont été les choix du SFoDEM à chacune de ces étapes (par exemple *définir* un dispositif suppose de définir quels éléments, pour quels acteurs, dans quel contexte, pour répondre à quelles questions, à quels besoins ?).

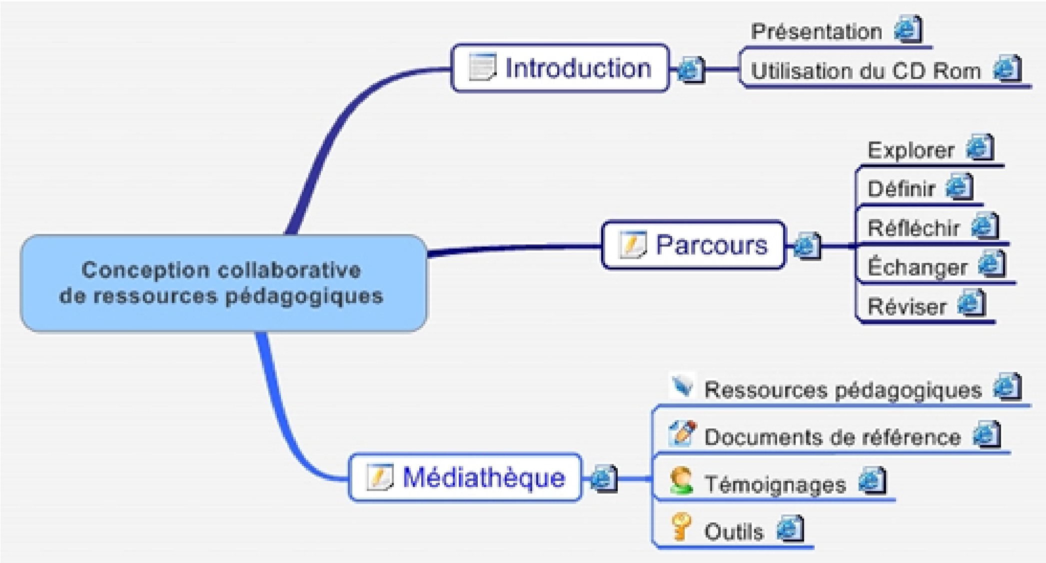


Figure 3. La structure du cédérom (Guin et al 2007)

Le bilan du SFoDEM, au-delà de ce qui s'est passé dans les classes des acteurs impliqués, ce sera finalement l'appropriation, ou non, par d'autres communautés d'enseignants, des résultats proposés par ce cédérom et les nouvelles histoires qui se développeront à partir de cette appropriation. C'est donc une affaire à suivre !

Bibliographie

Aldon G., Trgalova J., Trouche L. (2006), Les interactions entre la recherche et les acteurs des TICE dans les classes de maths, *Les cahiers de l'ingénierie éducative* 56, 82-85

Combes M.-C., Sauter M. (2006), Vers une communauté de pratique d'enseignants autour de la résolution de problèmes, *Colloque Espace Mathématique Francophone*, 27-31 mai 2006, Sherbrooke (Québec)

Guin D., Joab M., Trouche L. (dir.) (2007), *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006)*, cédérom, INRP et IREM (Université Montpellier 2)

Ravier J.-M., Roux F., Salles J. (2006), Exploiter les logiciels de géométrie dynamique. Apprendre avec la vidéoprojection, *Les Dossiers de l'ingénierie éducative* 54, 32-35.

Clôture des travaux

Jacques Moisan,
doyen de l'inspection générale, groupe mathématiques

Chers collègues,

Juste quelques petits mots de conclusion. Il y a douze ans, je participais à Grenoble à un colloque organisé par le CRDP sur le thème « Les nouvelles technologies et l'enseignement ». Et déjà, dans ce colloque, je participais à une table ronde, j'avais dit – et j'ai retrouvé tout à l'heure à peu près la même expression prononcée par Guy Ménant – qu'il était temps de passer de l'action d'un certain nombre de passionnés qui passaient leurs nuits sur leurs ordinateurs à inventer des séquences pour les élèves à une généralisation et à une mutualisation des ressources. Bien entendu, je ne dis pas que les choses depuis douze ans n'ont pas avancé, loin de là. Je sais qu'elles ont avancé.

Au cours de cette table ronde, j'ajoutai aussi que la solution me semblait, eu égard aux difficultés et qui étaient illustrées justement par le travail de ces passionnés qui passaient leurs nuits, qui passaient leurs week-ends, qu'une des solutions, c'était la mutualisation, c'était le partage entre les enseignants, c'était d'essayer de travailler en commun dans les établissements et aussi en dehors des établissements. Je crois que ce message est toujours d'actualité et que s'il y a une chose qu'il faut faire remonter, c'est bien celle-là.

J'ai toujours défendu l'idée, pour ce qui est de l'introduction de la généralisation des TICE dans l'enseignement des mathématiques, qu'il y avait trois bonnes conditions, qui devaient se réaliser en même temps : équiper un établissement sur un projet ; former dans un établissement, sur les ordinateurs et les logiciels de l'établissement l'équipe des mathématiques ; avoir – cela peut être avant, c'est mieux –, dans l'établissement, un référent, un professeur de mathématiques référent pour animer et pour coordonner. Je crois que c'est la condition de la réussite et, dans les établissements que je connais, pour lesquels cette introduction des TICE en mathématiques est une réussite, c'est ainsi que cela s'est passé.

En ce qui concerne le présent séminaire, des conversations que j'ai pu avoir dans les couloirs avec les uns et les autres, j'ai l'impression qu'il a répondu aux attentes qu'on pouvait avoir au départ. En tout cas, nous avons eu, je crois, des ateliers qui ont été passionnants ; nous avons eu une conférence d'introduction qui a ravi tout le monde. Je le dis d'autant plus volontiers que Michèle Artigue n'est pas parmi nous. Nous avons eu aussi des débats riches, nous avons eu des tables rondes riches, comme celle que nous venons d'avoir. C'est évidemment un motif de satisfaction pour moi et pour toute l'équipe d'organisation mais il y a la suite.

La suite, ce sont essentiellement les actes de ce colloque dont nous attendons beaucoup, puisque bien entendu ici nous sommes essentiellement des inspecteurs, quelques formateurs. Ensuite, il va falloir diffuser, il va falloir entraîner tous les enseignants de mathématiques.

Cette année, comme je l'ai dit dans mon allocution d'ouverture, est une année un petit peu décisive pour nous. Xavier Sorbe a parlé tout à l'heure de la méthode d'investigation. Effectivement, c'est un concept que nous cherchons à faire entrer dans l'enseignement des mathématiques et nous pensons, avec le socle, avec l'épreuve pratique et son expérimentation au baccalauréat, que le moment est venu. Les actes vont être largement diffusés et je compte sur eux pour diffuser ce qui a pu être fait et dit au cours de ce colloque.

Annexes

Calcul formel

Contenus et usages au lycée général et technologique
Jean-Louis Bonnafet, Christian Brucker, Philippe Fortin

Les outils de calcul formel

– Logiciels commerciaux : Derive, Maple, Mathematica…
– Logiciels libres : Maxima, Xcas…
– Calculatrices : TI-92, TI-89, Voyage 200, Classpad, Graph 100, HP…
– Outils en ligne : Euler, Giac, Wims

Quels usages ?

- **Une aide pour la mise en pratique de nouvelles méthodes**

– Un système de calcul formel permet de se concentrer sur l'acquisition des méthodes.

```
> eq1:=2*x+3*y=4;
                eq1 := 2 x + 3 y = 4
> eq2:=3*x-2*y=10;
                eq2 := 3 x - 2 y = 10
>
```

– Une erreur sera automatiquement détectée (dans l'exemple ci-dessous l'élimination a échoué)

```
> eq1:=2*x+3*y=4;
                eq1 := 2 x + 3 y = 4
> eq2:=3*x-2*y=10;
                eq2 := 3 x - 2 y = 10
> 2*eq1-3*eq2;
                -5 x + 12 y = -22
>
```

– L'élève peut alors corriger son erreur, ce qui lui permet de poursuivre la résolution de manière correcte.

```
> eq1:=2*x+3*y=4;
                eq1 := 2 x + 3 y = 4
> eq2:=3*x-2*y=10;
                eq2 := 3 x - 2 y = 10
> 2*eq1-3*eq2;
                -5 x + 12 y = -22
> 2*eq1+3*eq2;
                13 x = 38
```

$eq1:=2\cdot x+3\cdot y=4$	$2\cdot x+3\cdot y=4$
$eq2:=3\cdot x-2\cdot y=10$	$3\cdot x-2\cdot y=10$
$2\cdot eq1+3\cdot eq2$	$13\cdot x=38$
$\text{solve}(13\cdot x=38,x)$	$x=\frac{38}{13}$
$\text{solve}(eq1,y)\vert x=\frac{38}{13}$	$y=\frac{-8}{13}$
	5/99

- **Une aide à l'introduction de nouveaux concepts**

La notion de fonction dérivée…

```
> f:=x->x^3-5*x^2+1;
```

$$f := x \to x^3 - 5\,x^2 + 1$$

```
> f(1+h);
```

$$(1+h)^3 - 5\,(1+h)^2 + 1$$

```
> collect(",h);
```

$$h^3 - 2\,h^2 - 7\,h - 3$$

```
> f(1);
```

$$-3$$

```
> f(1.01);
```

$$-3.070199$$

```
> collect(f(a+h),h);
```

$$h^3 + (3\,a - 5)\,h^2 + \underline{(3\,a^2 - 10\,a)}\,h + a^3 + 1 - 5\,a^2$$

```
> f:=x->x^3-5*x^2+1;
```

$$f := x \to x^3 - 5\,x^2 + 1$$

```
> (f(a+h)-f(a))/h;
```

$$\frac{(a+h)^3 - 5\,(a+h)^2 - a^3 + 5\,a^2}{h}$$

```
> simplify(");
```

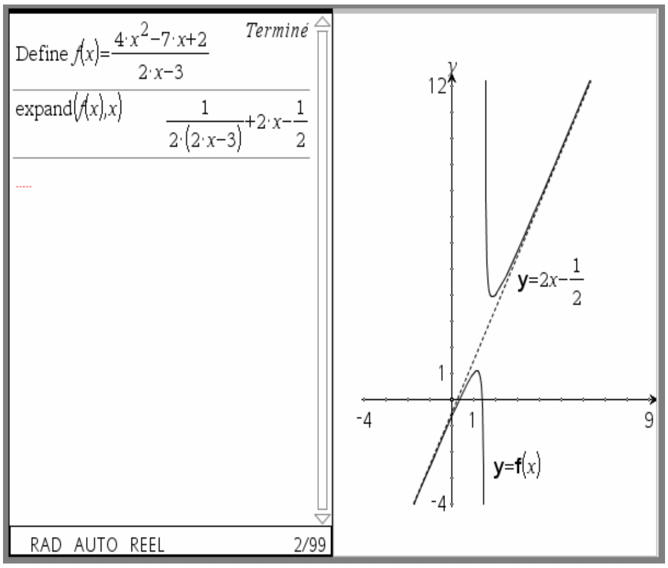
$$3\,a^2 + 3\,a\,h + h^2 - 10\,a - 5\,h$$

```
> limit(",h=0);
```

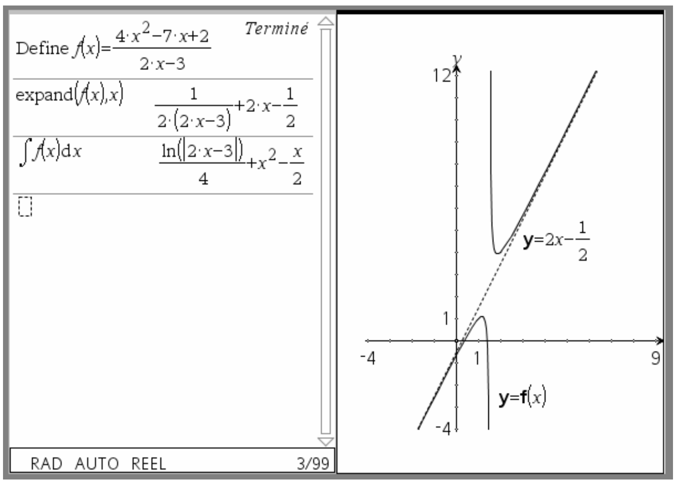
$$3\,a^2 - 10\,a$$

- **Un assistant pour les calculs annexes…**

– Recherche d'une asymptote

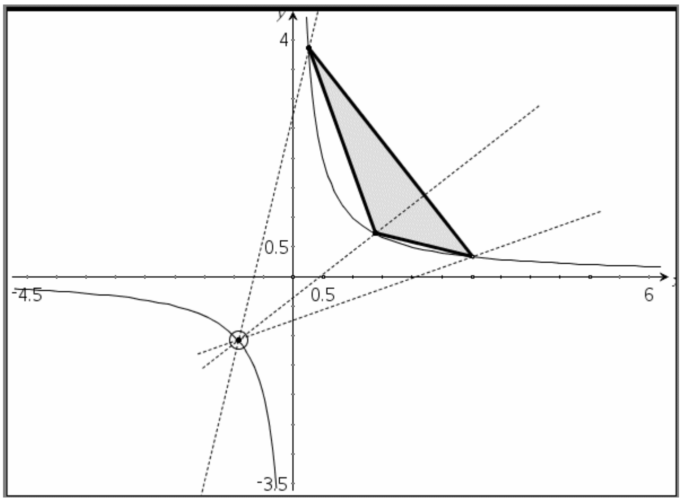


– Aide au calcul d'une primitive



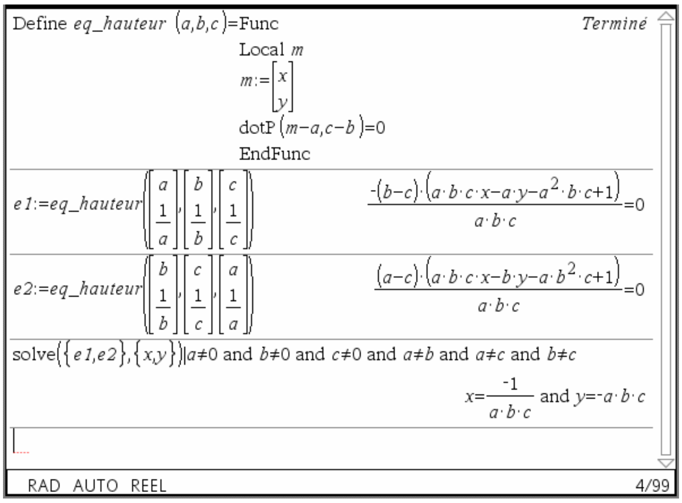
- **Des problèmes plus riches…**

  Exploration graphique (animation)



TNS

– Démonstration analytique complète



Un logiciel de calcul formel permet de travailler sur des nombres entiers de très grande taille, cela peut naturellement être très utile en arithmétique (clé de contrôle, cryptage, nombre de 0 à la fin de n!…)

- **Étude expérimentale formelle de la méthode des rectangles…**

```
> f:=x->x^2:
> S1:=n->1/n*sum(f(k/n),k=0..n-1);
```

$$S1 := n \to \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{f}\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$$

```
> S1(n);
```

$$\frac{\frac{1}{3}n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n}}{n}$$

```
> Delta1:=n->S1(n)-int(f(x),x=0..1);
```

$$\Delta 1 := n \to \mathrm{S1}(n) - \int_0^1 \mathrm{f}(x)\,dx$$

```
> expand(Delta1(n));
```

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}$$

Utilisons à présent la valeur de *f* au centre de l'intervalle, et non au bord de celui-ci.

```
> S2:=n->1/n*sum(f(k/n+1/(2*n)),k=0..n-1);
```

$$S2 := n \to \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{f}\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n}\right)}{n}$$

```
> Delta2:=n->S2(n)-int(f(x),x=0..1);
```

$$\Delta 2 := n \to \mathrm{S2}(n) - \int_0^1 \mathrm{f}(x)\,dx$$

```
> expand(Delta2(n));
```

$$-\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$$

A un niveau plus élevé, on peut envisager une étude similaire sur des fonctions plus évoluées, en utilisant un développement asymptotique.

```
> f:=x->exp(x);
```

$$f := \exp$$

```
> asympt(Delta1(n),n,3);
```

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}}{n} + \frac{-\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\mathbf{e}}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

```
> asympt(Delta2(n),n,3);
```

$$\frac{-\frac{1}{24}\mathbf{e} + \frac{1}{24}}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

- **Utilisation pour la démonstration d'une conjecture…**

PDF

TNS

Recherche de l'expression du terme général de la suite définie par les relations de récurrence :

$u_0=0$

$u_{n+1}=u_n+2n-11$

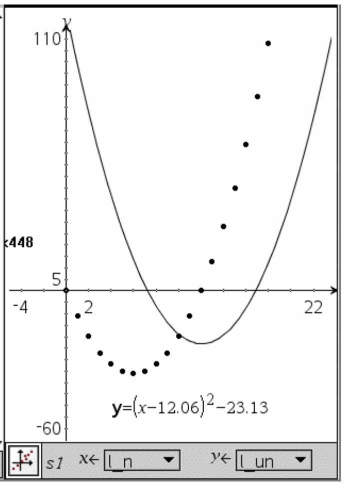
On demande de déterminer la valeur des 20 premiers termes dans un tableur, puis de représenter graphiquement le nuage de points associés.

On demande ensuite de reconnaître la forme de ce nuage de points, et de déterminer l'équation d'une courbe contenant tous les points de ce nuage.

On peut ainsi conjecturer une expression de u_n valable pour les premiers termes de la suite. On demande ensuite de démontrer cette propriété.

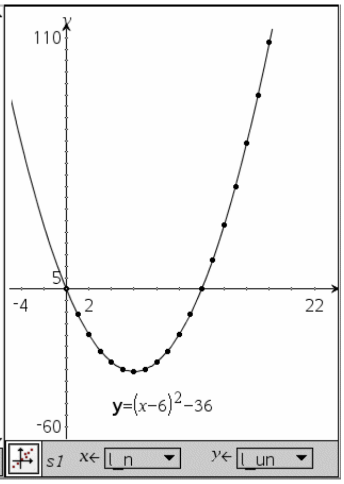
	A l_n	B l_un	C	D
◆				
1	0	0		
2	1	-11		
3	2	-20		
4	3	-27		
5	4	-32		
6	5	-35		
7	6	-36		
8	7	-35		
9	8	-32		
10	9	-27		
11	10	-20		
12	11	-11		
13	12	0		

B2 | $=b1+2\cdot a1-11$



	A l_n	B l_un	C	D
◆				
1	0	0		
2	1	-11		
3	2	-20		
4	3	-27		
5	4	-32		
6	5	-35		
7	6	-36		
8	7	-35		
9	8	-32		
10	9	-27		
11	10	-20		
12	11	-11		
13	12	0		

B | **l_un**



Define $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ *Terminé*

$\text{solve}\left(\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=-11 \\ f(2)=-20 \end{cases},\{a,b,c\}\right)$

$a=1$ and $b=-12$ and $c=0$

$f(x)|a=1$ and $b=-12$ and $c=0$ $\quad x^2-12\cdot x$

Define $u(n)=n^2-12\cdot n$ *Terminé*

$u(0)$ $\quad 0$

$u(n+1)-(u(n)+2\cdot n-11)$ $\quad 0$

RAD AUTO REEL 6/99

La recherche du polynôme d'interpolation peut se faire par résolution d'un système 3x3, dont la résolution est facilement assurée par le système de calcul formel.

On obtient ainsi l'expression :

$u_n=n^2-12n$

On peut ensuite vérifier que la suite définie par cette expression vérifie bien la condition intiale et la relation de récurrence utilisée pour définir la suite au début de l'exercice.

- **Étude expérimentale formelle de la méthode des rectangles…**

```
> f:=x->x^2:
> S1:=n->1/n*sum(f(k/n),k=0..n-1);
```

$$S1 := n \to \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$$

```
> S1(n);
```

$$\frac{\frac{1}{3}n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n}}{n}$$

```
> Delta1:=n->S1(n)-int(f(x),x=0..1);
```

$$\Delta 1 := n \to \mathrm{S1}(n) - \int_0^1 f(x)\,dx$$

```
> expand(Delta1(n));
```

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}$$

Utilisons à présent la valeur de *f* au centre de l'intervalle, et non au bord de celui-ci.

```
> S2:=n->1/n*sum(f(k/n+1/(2*n)),k=0..n-1);
```

$$S2 := n \to \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n}\right)}{n}$$

```
> Delta2:=n->S2(n)-int(f(x),x=0..1);
```

$$\Delta 2 := n \to \mathrm{S2}(n) - \int_0^1 f(x)\,dx$$

```
> expand(Delta2(n));
```

$$-\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$$

A un niveau plus élevé, on peut envisager une étude similaire sur des fonctions plus évoluées, en utilisant un développement asymptotique.

```
> f:=x->exp(x);
```

$$f := \exp$$

```
> asympt(Delta1(n),n,3);
```

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}}{n} + \frac{-\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\mathbf{e}}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

```
> asympt(Delta2(n),n,3);
```

$$\frac{-\frac{1}{24}\mathbf{e} + \frac{1}{24}}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Une formation indispensable

- **La formation**

Un apprentissage bien spécifique est nécessaire pour anticiper les problèmes que l'on peut rencontrer avec un logiciel de calcul formel.
Cette formation est nécessaire pour les élèves, comme pour leurs professeurs.

- **Quel domaine ?**

Les logiciels de calcul formel travaillent souvent dans C, au lycée il doit être possible de choisir de travailler dans R.

```
> solve(x^2+x+1=0,x);
```

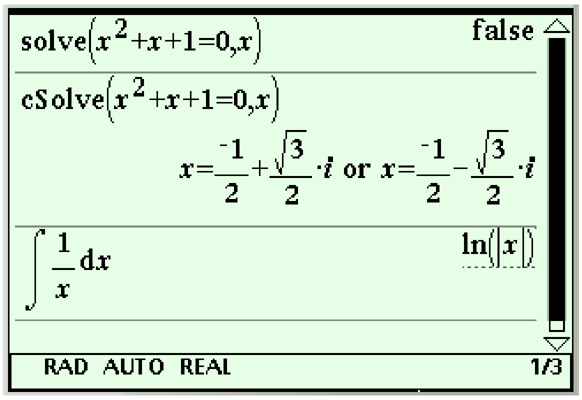
$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3},-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

```
> Int(1/x,x);
```

$$\int \frac{1}{x}\,dx$$

```
> value(");
```

$$\ln(x)$$



- **Des limitations à connaître**

Les logiciels de calcul formel peuvent fournir des résultats discutables en cas de présence de paramètres.

```
> eq1;
```

$$m\,x+y=1$$

```
> eq2;
```

$$x+m\,y=1$$

```
> solve({eq1,eq2},{x,y});
```

$$\{y=\frac{1}{m+1},x=\frac{1}{m+1}\}$$

Le résultat donné par un logiciel de calcul formel peut être distinct de celui obtenu à la main par un élève, tout en étant équivalent à ce dernier.

```
> simplify(diff(exp(x)+exp(-x),x));
```

$$(\mathbf{e}^{(2\,x)}-1)\,\mathbf{e}^{(-x)}$$

```
> simplify(cos(x)^2-sin(x)^2);
```

$$2\cos(x)^2-1$$

Les résultats obtenus peuvent varier d'un système de calcul formel à l'autre.

#1: $\mathrm{LN}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$

#2: $\mathrm{LN}(\sqrt{2}+1)$

#3: $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{COS}(x)}\,dx$

#4: $\mathrm{LN}\left(\mathrm{TAN}\left(\dfrac{2\cdot x+\pi}{4}\right)\right)$

```
> a:=1/(sqrt(2)-1);
```

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

```
> ln(a);
```

$$-\ln(\sqrt{2}-1)$$

```
> Int(1/cos(x),x);
```

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$$

```
> value(");
```

$$\ln(\sec(x)+\tan(x))$$

1.1 RAD AUTO REAL

$\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$ $\ln(\sqrt{2}+1)$

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$ $\ln\left(\dfrac{|\cos(x)|}{|\sin(x)-1|}\right)$

RAD AUTO REAL 2/99

Une « simple » comparaison peut mettre un système de calcul formel performant en échec.

```
> f:=proc(x)
  if x>2 then 1 else 0 fi
  end;
```

$f :=$ **proc**(x) **if** $2 < x$ **then** 1 **else** 0 **fi end**

```
> f(1),f(3);
```

0, 1

```
> f(sqrt(2));
Error, (in f) cannot evaluate boolean
```

```
> f:=proc(x)
  if x>2 then 1 else 0 fi
  end;
```

$f :=$ **proc**(x) **if** $2 < x$ **then** 1 **else** 0 **fi end**

```
> f(1),f(3);
```

0, 1

```
> f(sqrt(2));
Error, (in f) cannot evaluate boolean
```

```
> f(evalf(sqrt(2)));
```

0

Une compréhension minimale du fonctionnement interne du logiciel est souvent indispensable.

PDF

```
#1:    a := (x^2 - 1)/(x^2 + x - 2)

#2:    NUMERATOR(a)

#3:                        x + 1
```

```
> a:=(x^2-1)/(x^2+x-2);
```

$$a := \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

```
> numer(a);
```

$$x^2 - 1$$

Un véritable apprentissage est nécessaire pour utiliser correctement ces outils, et il semblerait indispensable de l'inclure dans les futurs programmes de mathématiques.

Il deviendra alors possible d'utiliser de manière satisfaisante les outils dont nous pouvons disposer et d'enrichir ainsi de manière significative l'approche de certaines notions du programme, tout comme les activités effectuées par les élèves.

Statistique et TICE : fluctuations d'une fréquence selon les échantillons

Philippe Dutarte,
académie de Créteil – IREM de Paris-Nord

Un apprentissage précoce, puis régulier, de la statistique et de l'aléatoire est une nécessité, tant pour harmoniser notre enseignement avec celui des autres pays développés, que pour répondre à un besoin social de plus en plus prononcé (notions de risque, sondages, modélisations...). Les programmes de mathématiques prennent en compte ces enjeux. En classe de seconde générale figurent la simulation et la fluctuation d'échantillonnage ; ceci permet, dans les classes du cycle terminal, d'adopter une approche fréquentiste pour le calcul des probabilités en première et la compréhension de la notion d'adéquation d'un modèle à des données observées en terminales S, ES et L. Il est envisagé, dans un avenir proche, de placer ce premier contact avec l'aléatoire dès le collège (rentrée 2008) ; il sera poursuivi ensuite, y compris dans les classes de lycée professionnel (rentrée 2009).

L'attitude de la communauté mathématique française à l'égard de la statistique et des probabilités n'a pas toujours été favorable. On peut, par exemple, citer les propos diamétralement opposés d'André Weil et d'Émile Borel. Alors que le premier ironisait (vers 1940) sur le fait que « la statistique moderne paraît avoir enfin résolu le problème légendaire qui consistait, connaissant la longueur du navire et la durée de la traversée (du temps de la navigation à voiles on y ajoutait la hauteur du grand mât) à calculer l'âge du capitaine… », le second affirmait (vers 1910) que « si la notion de *vérité statistique* devenait familière à tous ceux qui parlent ou écrivent au sujet de questions où la vérité statistique est la seule vérité, bien des sophismes et bien des paradoxes seraient évités. »

L'utilisation des TICE favorise grandement l'apprentissage de l'aléatoire (l'expérimentation de la loi des grands nombres nécessite l'usage d'une calculatrice ou d'un ordinateur) et inversement, l'étude de l'aléatoire motive parfaitement une approche plus expérimentale des mathématiques fondée sur l'utilisation des TICE. C'est donc une dynamique réciproque que nous voudrions illustrer ici.

Les exemples présentés ont été expérimentés dans le cadre du lycée mais ils pourront s'interpréter au collège dans l'esprit des « thèmes de convergence » et participer à une initiation à l'aléatoire. Comme on le constatera, on fait de « vraies maths » dans ces activités et on y acquiert des connaissances en informatique. Au-delà du traitement statistique, sont sollicitées des compétences de calcul, d'interprétation graphique, de raisonnement scientifique, inscrites dans les programmes officiels.

Les activités présentées s'appuient sur une pratique des mathématiques « par l'expérience », facilitée par les moyens informatiques. Les mathématiques ont aussi un aspect pratique et expérimental, en particulier pour leur enseignement, pour conjecturer bien sûr, mais aussi pour comprendre et parfois pour emporter la conviction. Voir un théorème à l'œuvre peut être plus convainquant et plus éclairant que de lire sa démonstration, au moins dans un premier temps.

Le choix d'exemples réalistes, en prise avec le monde et les questions de société, motive indéniablement les élèves, en particulier les « non matheux », permettant de mettre en évidence les implications de notre enseignement. Ce n'est pas que les exemples ludiques, comme les jets de pièces et de dés, soient sans intérêt ; bien au contraire, ils constituent un outil pédagogique essentiel à l'étude de l'aléatoire, mais ils ne peuvent, à eux seuls, en justifier les enjeux. Les études statistiques développées ici suscitent des interrogations, en décelant des « tendances » qui, sans trancher sur la causalité des phénomènes, suggèrent des lieux où aller regarder « ce qui a pu se passer ». Elles débouchent donc sur un dialogue qui, dans la classe, entre élèves et professeurs de mathématiques ou d'autres disciplines, et avec l'appui de sources documentaires telles qu'Internet, peut être analogue à celui que doivent mener de vrais utilisateurs de la statistique.

Les exemples qui suivent permettront d'envisager une réponse aux questions suivantes :

- Dans deux hôpitaux comparables, sur les 100 dernières hospitalisations, le premier a connu 3 cas de maladies nosocomiales et le second 8 cas. Doit-on suspecter cet hôpital de négligence ? Prend-on un risque en y étant admis ?

- Le magazine *Le Point* du 13/09/2002 écrit : « Une crue de la Seine comparable à celle de 1910 se produit en moyenne tous les cent ans et la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année ». Que faut-il en penser ?

- Une petite ville des États-Unis a connu 9 cas de leucémies chez de jeunes garçons en l'espace de 10 années. Doit-on en accuser le hasard ?

- Dans un village du Canada, entre 1999 et 2003, sur 132 naissances, il n'y a eu que 46 garçons. Est-ce très étonnant ? Est-ce inquiétant (sachant que de nombreuses usines chimiques se trouvent à proximité) ?

- Comment aux États-Unis, la statistique a-t-elle permis de mettre en évidence une discrimination conduisant à casser un jugement ?

- Le dernier sondage de 2002 ne prévoyait pas la présence de Jean-Marie Le Pen au second tour. Peut-on croire un sondage ?

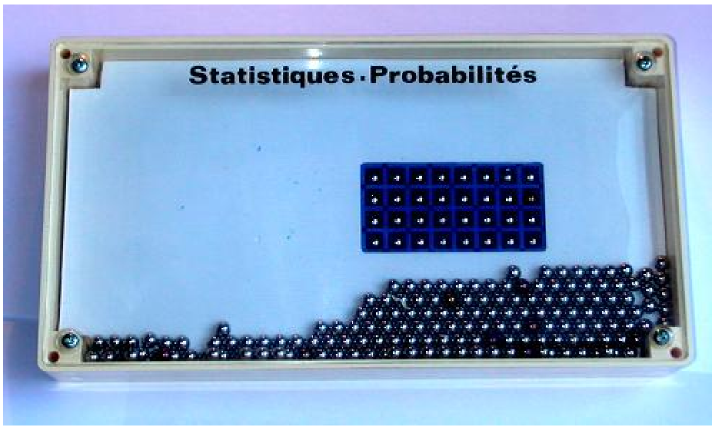
- Comment la loi des grands nombres permet-elle d'estimer une probabilité ?

1. Fluctuations à taille d'échantillon fixée : étude de la « variabilité naturelle »

Nous nous intéressons ici à une urne « bicolore » : l'urne de Bernoulli.

Expérimentation physique

L'expérimentation physique du hasard est un préalable important avant d'effectuer des simulations avec des élèves. Elle permet de donner un sens concret aux expériences aléatoires et de voir le « véritable » hasard en action. Elle paraît donc incontournable avant de passer sur la calculatrice ou le tableur.



La « machine à billes » permet de réaliser physiquement des échantillons et d'étudier la distribution des fréquences observées sur les échantillons. Elle contient 200 billes dont 10 billes « dorées ».
On a donc une proportion $p = 0{,}05$ de billes dorées dans la boîte. En secouant, on vient remplir les $n = 32$ alvéoles qui matérialisent un échantillon. On observe alors une fréquence f de billes dorées dans l'échantillon. En renouvelant l'expérience, on obtient une série de valeurs pour f, ce qui permet d'observer les fluctuations des fréquences des échantillons autour de la valeur $p = 0{,}05$. Il est d'ailleurs impossible d'observer $f = 0{,}05$ puisqu'il faudrait avoir 1,6 bille noire dans les alvéoles.

On peut également très simplement constituer son propre dispositif avec une bouteille et des perles de deux couleurs. On a utilisé ici une bouteille de jus de fruit dont les parois ont été peintes. Seul le fond de la bouteille laisse apparaître cinq perles (il faut choisir la taille des perles de sorte que l'échantillon soit facilement dénombrable, avec un nombre constant de perles. Si les perles sont trop petites, on distingue parfois deux rangs de perles). En secouant soigneusement la bouteille, on produit un autre échantillon.

Notre bouteille contient des perles rouges et des jaunes. La proportion de perles jaunes est 2/7. On peut observer fluctuer la proportion des perles jaunes dans les échantillons autour de cette valeur, la moyenne d'un grand nombre d'échantillons étant proche de 2/7.

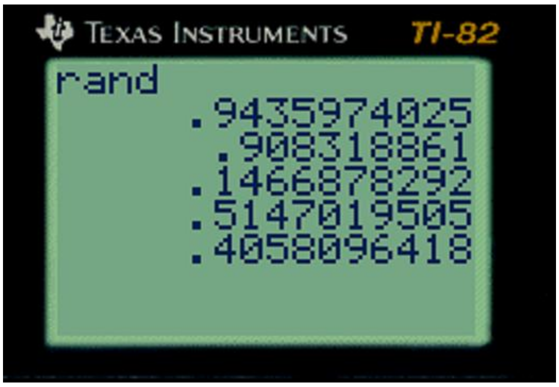
Le gros avantage de cette expérimentation physique est de montrer directement les échantillons ce qui constitue une bonne image mentale.

Simulation avec les TICE

On atteint vite les limites de l'expérimentation physique. Si l'on veut étudier les lois du hasard, pour connaître la « variabilité naturelle » des échantillons de taille *n*, il faudrait un très grand nombre d'expériences. Historiquement, Karl Pearson, qui ne disposait pas de moyens informatiques, réquisitionna tout son entourage pour multiplier les lancers de pièces et de dés.
Un autre objectif sera d'augmenter la taille des échantillons pour estimer des probabilités. La loi des grands nombres nécessite d'être expérimentée à l'aide des TICE.

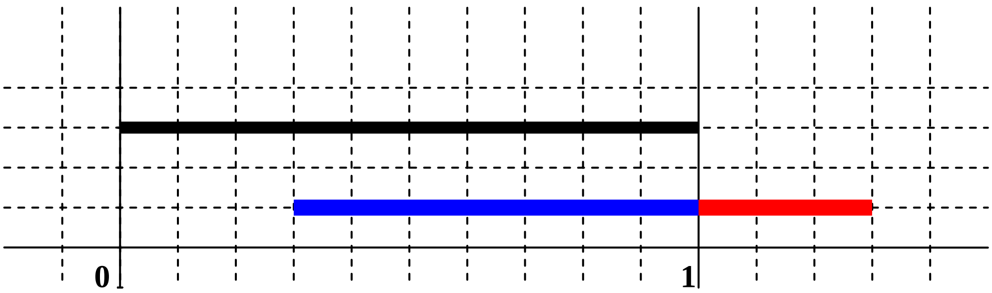
Avec une calculatrice

Le générateur de nombres pseudo-aléatoires de la calculatrice, la fonction « random », simule le tirage d'un nombre décimal au hasard dans l'intervalle [0, 1[.



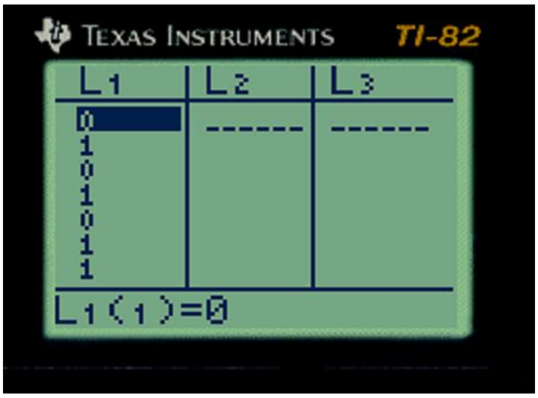
À partir de ce générateur de nombres aléatoires, on peut facilement faire comprendre comment on simule un tirage au hasard dans une urne bicolore.
Supposons que la proportion des boules dont la couleur nous intéresse soit dans l'urne de 30 %.

L'instruction rand + 0.30 correspond au tirage au hasard d'un nombre de l'intervalle [0,30 ; 1,30[. En prenant la partie entière, le résultat vaut 0 si le nombre appartient à [0,30 ; 1] et 1 si le nombre appartient à [1 ; 1,30[. Compte-tenu des longueurs respectives de ces intervalles, on a 70 % de chances d'avoir 0 et 30 % de chances d'avoir 1.



En appuyant plusieurs fois sur « Entrée », on simule de nouveaux tirages. A la différence des expérimentations physiques précédentes, il s'agit ici de tirages avec remise. Dans les exemples qui suivront, ceci n'aura pas d'importance. La taille des échantillons étant généralement très faible face à celle de la population, on peut considérer tous les tirages comme étant effectués avec remise (même sans remise la proportion dans l'urne n'est pas modifiée par les tirages).

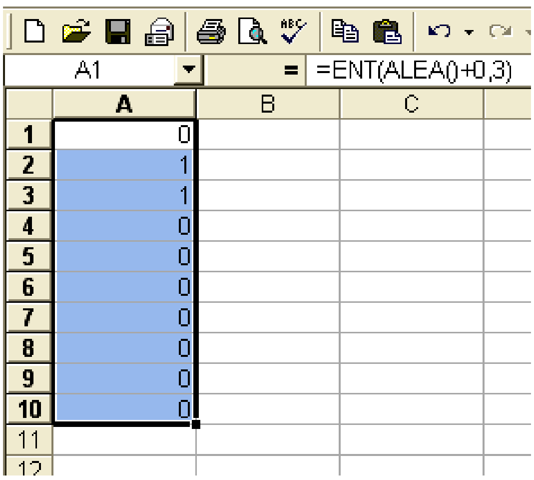
Avec une calculatrice, il est possible, en utilisant les listes, de simuler un échantillon de taille 20 par exemple et d'en calculer la fréquence (sans programmation).



Sur l'image d'écran ci-dessus, on a simulé un échantillon de taille 20 prélevé avec remise dans une urne où la proportion considérée est 30 %. La fréquence sur cet échantillon est 25 %.

La manipulation du tableur est plus confortable ; la puissance de calcul et d'illustration est supérieure. Cependant, la manipulation des calculatrices en classe favorise sans doute davantage les échanges.

Avec un tableur



Il est très facile de simuler un échantillon aléatoire extrait avec remise d'une urne bicolore où la proportion étudiée est 30 %.
Il suffit d'entrer dans une cellule la formule =ENT(ALEA()+0,3)
puis d'approcher le pointeur de la souris du coin inférieur droit de la cellule.
Lorsque le pointeur prend la forme d'une croix noire, on enfonce le bouton gauche de la souris puis on « glisse » vers le bas pour constituer l'échantillon (on nomme « recopie » cette manipulation).

On peut ensuite sélectionner l'échantillon (on glisse avec le pointeur en forme de croix blanche) puis le recopier vers la droite pour constituer plusieurs échantillons.

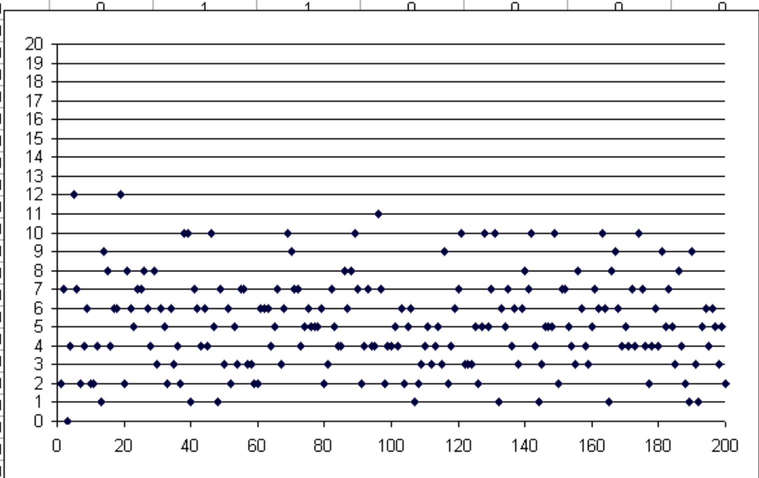
Une première illustration : les maladies nosocomiales

Dans deux hôpitaux comparables, sur les 100 dernières hospitalisations, le premier a connu 3 cas de maladies nosocomiales et le second 8 cas. Doit-on suspecter cet hôpital de négligence ? Prend-on un risque en y étant admis ?

La proportion des personnes hospitalisées concernées en 2006 par une infection nosocomiale était de 5 %.
Ce pourcentage, obtenu sur la quasi-totalité des hospitalisations (95 % des lits) peut-être considéré comme la proportion « normale » d'infections, comme le risque normal (toutes catégories de malades confondues).
L'idée est d'étudier la variabilité « naturelle » (due au hasard) sur 100 hospitalisations avec une probabilité de 5 % d'avoir une maladie nosocomiale.
Il s'agit de simuler 100 tirages avec remise dans une urne où la proportion du caractère étudié est $p = 0,05$.
Sur l'image de tableur ci-dessous, on a simulé 200 échantillons de taille 100. Le nombre de malades infectés sur chaque échantillon est représenté par « un nuage de points ».
On constate qu'il n'est pas rare d'observer 8 cas d'infections nosocomiales sur un échantillon de taille 100, dans des conditions « normales » (on peut faire F9 pour avoir instantanément de nouvelles simulations). Il n'y a donc pas de raison suffisamment sérieuse pour suspecter le second hôpital.
En revanche, l'étude des fluctuations d'échantillonnage permet de fixer un seuil au-delà duquel une enquête pourrait être menée, du fait de sa rareté de dépassement quand les conditions sont « normales ». Ce seuil pourrait par exemple être ici fixé à environ 11 cas.

A70 = =ENT(ALEA()+0,05)

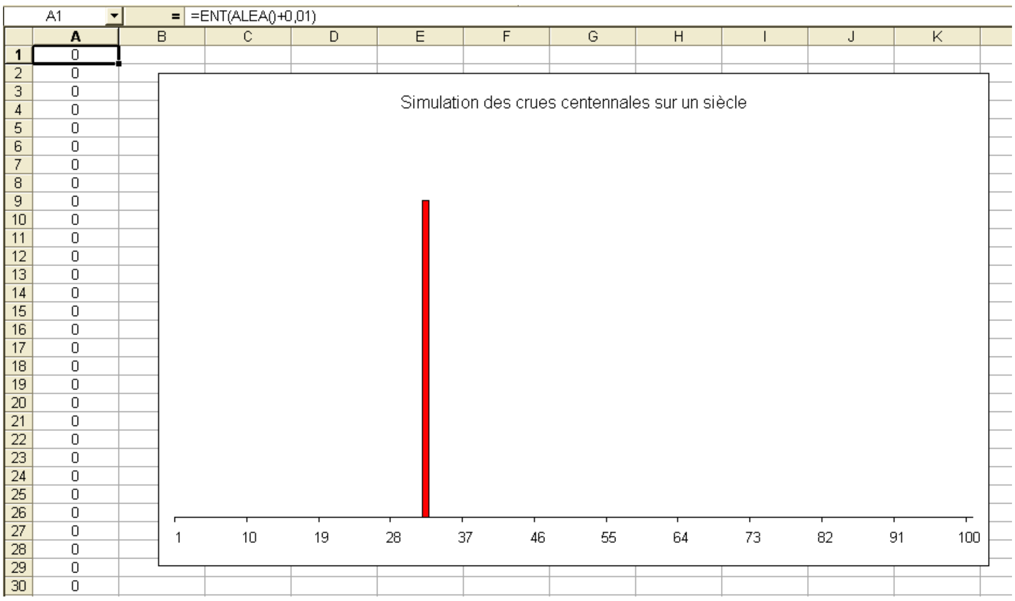
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
69	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
70	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
71	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
73	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
76	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
77	0	0	0							
78	0	0	0							
79	0	1	0							
80	0	0	0							
81	0	0	0							
82	0	0	0							
83	0	0	0							
84	0	0	0							
85	0	0	0							
86	0	0	0							
87	0	0	0							
88	0	0	0							
89	0	0	0							
90	0	0	0							
91	0	0	0							
92	0	0	0							
93	0	0	0							
94	0	0	0							
95	0	0	0							
96	0	0	0							
97	0	1	0							
98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101	**2**	**7**	**0**	**4**	**12**	**7**	**2**	**4**	**6**	**2**

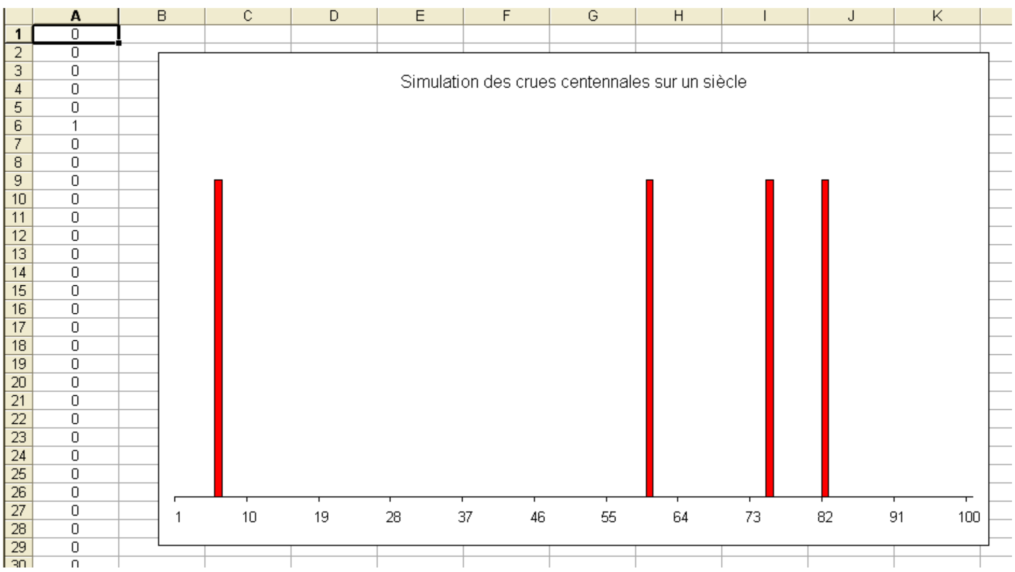


Crues centennales

Le magazine Le Point du 13/09/2002 écrit : « Une crue de la Seine comparable à celle de 1910 se produit en moyenne tous les cent ans et la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année ». Que faut-il en penser ?

Dans une revue technique de juin 2003[1], des « spécialistes », ingénieurs et hydrologues, insistent sur le fait « qu'informer les citoyens sur les risques d'inondation par des messages clairs et compréhensibles est un enjeu social et économique fort mais complexe ». Lorsqu'on parle de crue centennale, cela signifie que chaque année elle a (indépendamment des années précédentes) une chance sur 100 de se produire. Il faut se rendre compte que, sur l'échelle d'un siècle, cela peut donner des situations très variables.
Il est utile au citoyen d'expérimenter les fluctuations d'échantillons de taille 100 (un siècle), ce qui est très facile sur le tableur (ou une calculatrice).
On peut ensuite reconsidérer la déclaration du journaliste du *Point*.





[1] Revue *Ingénieries – eau, agriculture, territoires* n°34 juin 2003, article intitulé *Risque d'inondation : une notion probabiliste complexe pour le citoyen* de N. Gendreau, F. Grelot, R. Garçon et D. Duband.

Santé et environnement : leucémies à Woburn

Une petite ville des États-Unis a connu 9 cas de leucémies chez de jeunes garçons en l’espace de 10 années. Doit-on en accuser le hasard ?

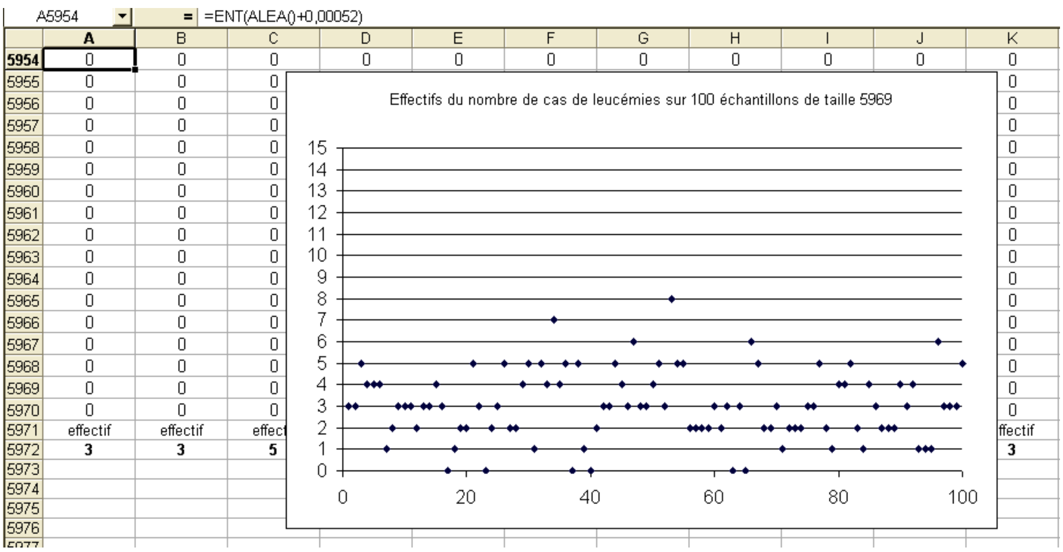
Plus encore que les exemples précédents, celui-ci montre les enjeux de la méthode statistique. Woburn est une petite ville industrielle du Massachusetts, au Nord-Est des Etats-Unis. Du milieu à la fin des années 1970, la communauté locale s’émeut d’un grand nombre de leucémies infantiles survenant dans certains quartiers de la ville. Les familles se lancent alors dans l’exploration des causes et constatent la présence de décharges et de friches industrielles ainsi que l’existence de polluants. Dans un premier temps, les experts gouvernementaux concluent qu’il n’y a rien d’étrange. Mais les familles s’obstinent et saisissent leurs propres experts. Une étude statistique montre qu’il se passe sans doute quelque chose « d’étrange ».

Le tableau suivant résume les données statistiques concernant les garçons de moins de 15 ans, pour la période 1969-1979 (Source : *Massachusetts Department of Public Health*).

Population des garçons de moins de 15 ans à Woburn selon le recensement de 1970 : n	Nombre de cas de leucémie infantile observés à Woburn entre 1969 et 1979	Fréquence des leucémies aux Etats-Unis : p
5969	9	0,00052

La question statistique qui se pose est de savoir si le hasard seul peut raisonnablement expliquer le nombre de leucémies observées chez les jeunes garçons de Woburn, considérés comme résultant d’un échantillon prélevé dans la population américaine.
La population des Etats-Unis étant très grande par rapport à celle de Woburn, on peut considérer que l’échantillon résulte d’un tirage avec remise et simuler des tirages de taille n avec le tableur. On peut aisément simuler sur le tableur 100 échantillons de taille n = 5969 prélevés au hasard dans une population où p = 0,00052 en utilisant l’instruction :
=ENT(ALEA()+0,00052) .

Sur chaque échantillon, en faisant la somme, on obtient le nombre de cas observés.
On peut représenter sur un graphique les 100 résultats observés sur les échantillons simulés.



Les simulations montrent que le nombre de cas observés à Woburn (9 cas) est extrêmement rare (moins de 1 % des simulations), si l'on ne considère que le hasard comme explication.
On ne peut donc pas raisonnablement attribuer au seul hasard le niveau très « significativement » élevé des leucémies infantiles observées chez les garçons de Woburn. Ce taux anormalement élevé de leucémies est officiellement confirmé par le Département de Santé Publique du Massachusetts en avril 1980. Les soupçons se portent alors sur la qualité de l'eau de la nappe phréatique qui, par des forages, alimente la ville. On découvre ainsi le syndrome du trichloréthylène.

Pollution et sex-ratio

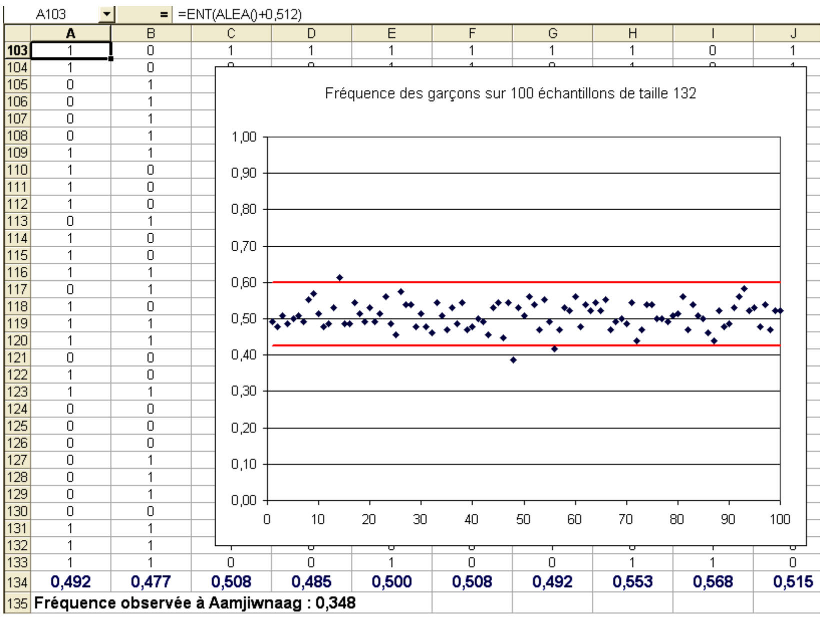
Dans un village du Canada, entre 1999 et 2003, sur 132 naissances, il n'y a eu que 46 garçons. Est-ce très étonnant ? Est-ce inquiétant (sachant que de nombreuses usines chimiques se trouvent à proximité) ?

Le « sex-ratio » est le rapport du nombre de garçons à celui des filles à la naissance. Sa remarquable stabilité est une des premières découvertes de la statistique. Il est habituellement de 105 garçons pour 100 filles, soit une fréquence de garçons de

$p = \dfrac{105}{105+100} \approx 0{,}512.$

Dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au Canada, 132 enfants dont 46 garçons sont nés entre 1999 et 2003 (Sources : *Science et Vie* février 2006 – *Environnemental Health Perspectives* octobre 2005 – article en ligne). Cela donne une fréquence observée des garçons valant

$f = \dfrac{46}{132} \approx 0{,}348$. C'est bien peu mais dans l'absolu cela ne veut rien dire si l'on n'a pas étudié les fluctuations des échantillons de taille 132 sous l'hypothèse d'une fréquence « normale » valant $p = 0{,}512$.



Cette étude sur le tableur sera l'occasion d'expérimenter la « loi » selon laquelle, si la taille des échantillons n'est pas trop petite et la fréquence p pas trop faible (voir paragraphe suivant), plus de 95 % des échantillons fournissent une fréquence comprise dans l'intervalle $[0{,}512 - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; 0{,}512 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ c'est-à-dire [0,424 ; 0,599], qui correspond, en quelque sorte, à l'intervalle de « variabilité naturelle » des échantillons de taille $n = 132$.
On constate que la fréquence des garçons observée, soit 0,348, n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation de plus de 95 % des échantillons sous l'hypothèse $p = 0{,}512$. On dit que la fréquence observée présente une « différence significative » au niveau 0,95.

À la question « Que peut-on tirer comme conclusion ? », on peut seulement ici répondre que « cette étude pose question ». La statistique donne l'alerte, ce qui est déjà beaucoup. Le fait que la réserve soit située au cœur d'industries chimiques devient un élément troublant sur lequel on doit enquêter. De façon générale, c'est la notion de « preuve statistique » qui est ici en jeu. Il ne s'agit pas d'une « preuve » au sens habituel mais d'un élément probant, d'une présomption. D'autres explications possibles du déséquilibre du sex-ratio pourraient être liées au mode de vie de ces indiens ou à leur patrimoine génétique. Une étude statistique comparative a été menée sur des indiens de la même tribu vivant dans un autre environnement et a (dé)montré que ce n'était (sans doute) pas le cas. En revanche l'influence de certains produits chimiques sur le sex-ratio a été établie « statistiquement » par d'autres études. Une recherche sur Internet permettra d'avoir d'autres éléments sur ce dossier (qui a fait polémique au Canada).

Une page de « théorie »

On considère la situation dite de « l'urne de Bernoulli » comprenant deux sortes de boules, noires et blanches, et où la proportion des boules noires est p.

On effectue n tirages au hasard et avec remise dans cette urne. Le résultat est nommé échantillon aléatoire de taille n.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires dans un échantillon aléatoire de taille n. Cette variable suit la loi binomiale de paramètres n et p dont l'espérance est $E(X) = np$ et l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$.
De manière à pouvoir comparer des tirages de tailles différentes, il est préférable, plutôt que de considérer le nombre de boules noires, d'en considérer la fréquence. On introduit donc la variable aléatoire $F = \frac{1}{n} X$.
Pour cette variable aléatoire F, on a comme espérance $E(F) = \frac{1}{n} \times E(X) = \frac{1}{n} \times np = p$ et comme écart type $\sigma(F) = \frac{1}{n}\,\sigma(X) = \frac{1}{n} \times \sqrt{n\,p\,(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.
L'interprétation de ces résultats est que si l'on prélève un grand nombre d'échantillons aléatoires de taille n et que l'on considère la distribution des fréquences observées, ces fréquences ont pour moyenne p (la fréquence dans l'urne) et pour écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.
C'est bien sûr cet indicateur de dispersion qui rend compte de la qualité d'un échantillon de taille n pour témoigner de la fréquence p dans l'urne. Plus n est grand, plus l'information est précise, mais, ce qui est important, c'est que le gain en qualité d'information est en « un sur racine de n ».

Pour préciser ceci, on peut recourir à la loi normale. En effet, pour n « assez grand » (dans la pratique, on prend $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$), la loi binomiale donne des résultats proches de ceux d'une loi normale. On peut donc considérer que la variable aléatoire F suit approximativement une loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

On sait que la loi normale a comme propriété qu'environ 95 % des observations se situent dans un intervalle de rayon deux écarts types autour de la moyenne. On pourra donc vérifier qu'environ
95 % des échantillons aléatoires de taille n fournissent une fréquence comprise dans l'intervalle
$\left[p - 2 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \,,\; p + 2 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \right]$.

Ce résultat est très important car il mesure la variabilité « naturelle » des phénomènes aléatoires.

On peut donner une version simplifiée de cet intervalle, en le majorant.

La fonction $p \mapsto p(1-p)$ atteint son maximum pour $p = \dfrac{1}{2}$ donc, pour tout p, on a :

$p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$. On en déduit que $2 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, l'intervalle

$\left[p - 2 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \,,\; p + 2 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \right]$ est inclus dans $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,,\; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

On peut expérimenter à l'aide des TICE qu'environ plus de 95 % des échantillons de taille n fournissent une fréquence comprise dans l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,,\; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

Jurys et discrimination

Comment aux États-Unis, la statistique a-t-elle permis de mettre en évidence une discrimination conduisant à casser un jugement ?

En fin de chapitre de statistique, la situation suivante a été proposée à des élèves de seconde. Après une recherche en salle informatique (50 minutes), un travail d'argumentation est demandé sous forme de devoir à la maison.

La grande liberté donnée dans les consignes (voir l'énoncé ci-dessous) a quelque peu déstabilisé les élèves (« Qu'est-ce qu'on doit faire ? ») mais a favorisé une grande diversité des réponses et l'utilisation d'un langage personnel. La correction a associé la professeure de français qui, après avoir visé le travail des élèves, a pu faire le parallèle avec les techniques d'argumentation en littérature (la seule différence véritable étant qu'ici les exemples sont des graphiques et des calculs au lieu de citations d'un texte).

Énoncé distribué aux élèves

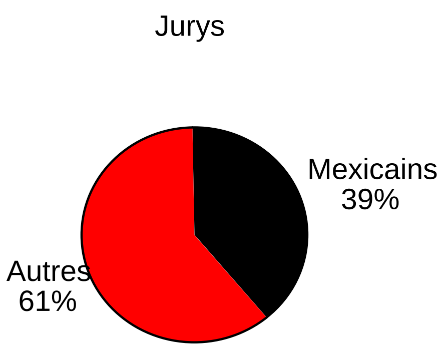
- L’affaire Castaneda contre Partida

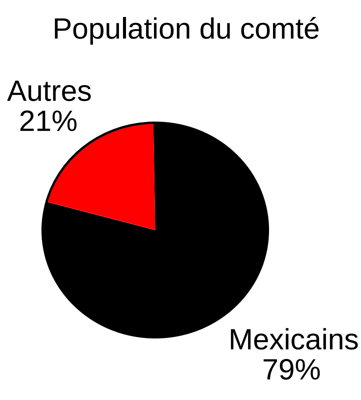
En novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison pour cambriolage d’une résidence et tentative de viol.
Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l’égard des Américains d’origine mexicaine. Alors que 79,1% de la population du comté était d’origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors des 11 années précédentes, il n’y eut que 339 personnes d’origine mexicaine.

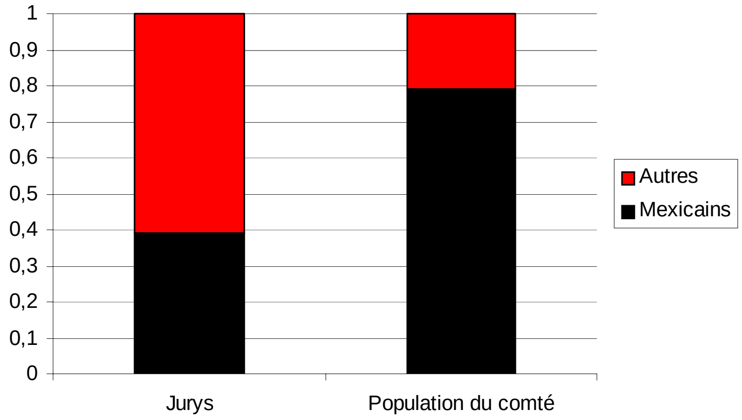
- Produisez votre expertise statistique

Devant la Cour Suprême, un expert statisticien produisit des arguments pour convaincre du bien fondé de la requête de l’accusé (les juges votèrent à 5 contre 4 en faveur de la requête).
En vous situant dans le rôle de cet expert, produisez à votre tour des calculs, des raisonnements, des graphiques... pour montrer que le hasard ne peut pas « raisonnablement » expliquer à lui seul la sous-représentation des américains d’origine mexicaine dans les jurys de ce comté.
– Vous commencez ce travail en binômes en utilisant les documents disponibles, la calculatrice, le tableur.
– Vous terminez la rédaction (arguments en français, calculs, graphiques...) en devoir individuel, à la maison.

Une première partie du travail sur tableur a consisté en une analyse descriptive des données conduisant les uns ou les autres à produire des tableaux croisés, des histogrammes ou des camemberts.

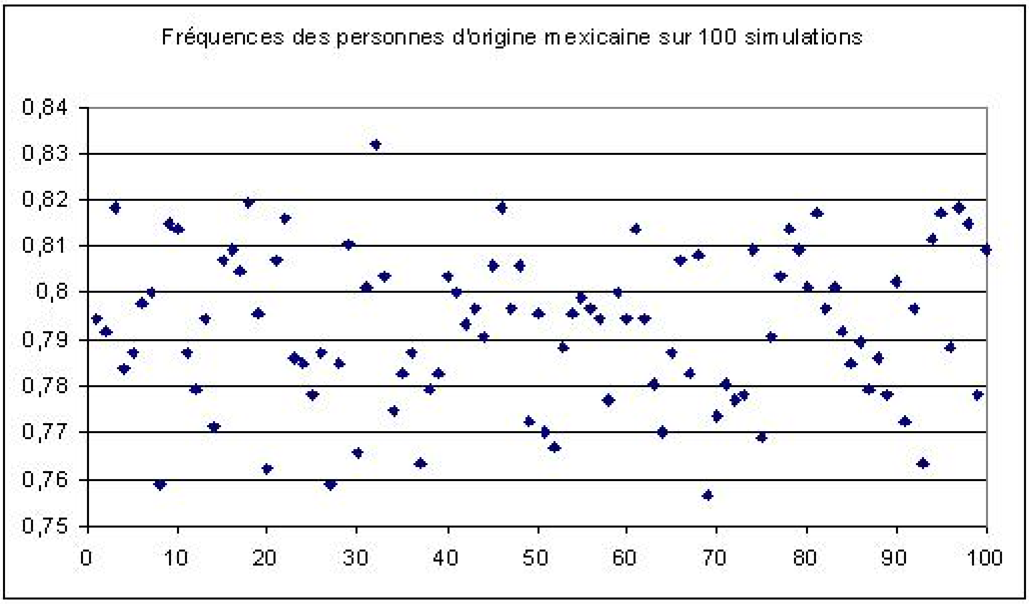






La seconde partie du travail devait consister à utiliser les moyens informatiques pour montrer que l'écart (important) observé ne peut raisonnablement pas s'expliquer par le seul hasard.
Pour cela, on peut simuler 870 tirages au sort dans la population du comté en utilisant la formule =ENT(ALEA()+0,791).
Certains ont ensuite raisonné en effectifs et d'autres en fréquences de personnes d'origine mexicaine.
On peut vérifier que plus de 95 % des simulations fournissent une fréquence de personnes d'origine mexicaine comprise dans l'intervalle :
$[\, p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,,\ p + \frac{1}{\sqrt{n}} \,]$ c'est-à-dire $[0{,}791 - \frac{1}{\sqrt{870}}\ ;\ 0{,}791 + \frac{1}{\sqrt{870}}\,]$
c'est-à-dire environ [0,76 ; 0,82].

Voici un exemple de 100 simulations en fréquences des personnes d'origine mexicaine sur les échantillons de taille 870 :



La fréquence observée des personnes d'origine mexicaine dans les jurys est 0,39 ce qui est très éloigné de l'intervalle [0,76 ; 0,82]. Jamais les simulations n'ont permis d'observer un résultat aussi bas. Ceci permet de dire que le hasard n'est sans doute pas responsable de la sous- représentation des personnes d'origine mexicaine dans les jurys.
Reste à rechercher les causes de cette sous-représentation (l'une des raisons est la nécessité d'une bonne connaissance de l'anglais écrit et parlé).

2. Estimation d'une fréquence

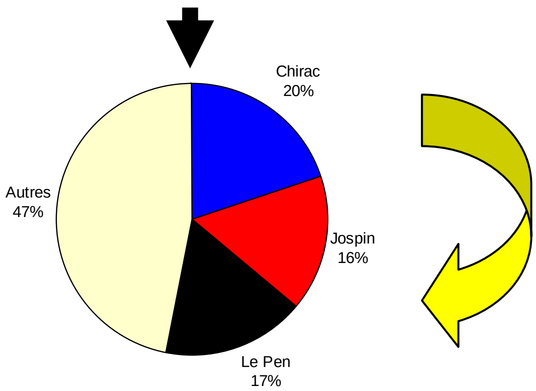
Peut-on croire un sondage ?

Le dernier sondage de 2002 ne prévoyait pas la présence de Jean-Marie Le Pen au second tour. Peut-on croire un sondage ?

L'attitude de l'opinion vis à vis des sondages est souvent sans nuance : on leur prête des pouvoirs de prédiction qu'ils n'ont pas (en omettant souvent de fournir les « fourchettes ») et (ou) on déclare qu'ils se trompent 9 fois sur 10.
On peut mettre en parallèle le dernier sondage publié par BVA et effectué sur 1000 électeurs : Jacques Chirac 19 %, Lionel Jospin 18 %, Jean-Marie Le Pen 14 %, avec le résultat du premier tour : Jacques Chirac 19,88 %, Lionel Jospin 16,18 %, Jean-Marie Le Pen 16,86 % et poser la question « le sondage est-il faux ? ».

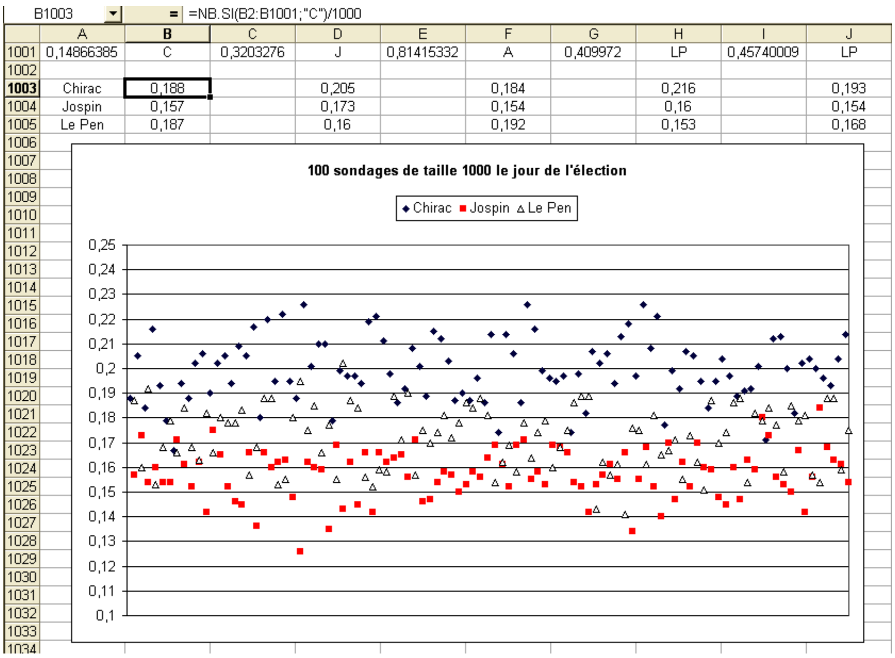
Échantillonnage le jour de l'élection

L'objectif est ici d'expérimenter les incertitudes d'un sondage, même s'il est effectué dans des conditions optimales (et même rêvées) à savoir :
– on tire 1000 personnes au hasard (en pratique, cela coûte trop cher et la méthode des quotas permet tout juste une qualité équivalente à celle de l'aléatoire) ;
– les personnes ne changent pas d'avis entre le vendredi et le dimanche (l'instabilité de l'opinion semble de plus en plus importante) et disent ce qu'elles pensent (on sait que les sondeurs usent de toute une alchimie de corrections), c'est-à-dire qu'on utilise pour simuler les sondages les proportions des résultats du premier tour.
On peut donc dire que simuler un sondage consiste à faire tourner 1000 fois une roue de loterie partagée en quatre secteurs de 20 % (Jacques Chirac), 16 % (Lionel Jospin), 17 % (Jean-Marie Le Pen) et 47 % (autres candidats).



La simulation d'une telle roue de loterie est assez facile à mettre en place avec un tableur.
Le générateur de nombres aléatoires fournit un nombre « au hasard » dans l'intervalle [0, 1[.
Il suffit alors de partager cet intervalle proportionnellement aux pourcentages des secteurs de la roue de loterie.
Ainsi, l'instruction =ALEA() est entrée en cellule A1 et l'instruction
=SI(A1<=0,2;"Chirac";SI(A1<=0,36;"Jospin";SI(A1<=0,53;"LePen";"Autre")))
entrée en cellule B1 simule le sondage d'un électeur.
Il suffit de recopier ces instructions 1000 fois vers le bas pour simuler un sondage de 1000 personnes puis 100 fois vers la droite pour simuler 100 sondages.
Le pourcentage obtenu par chaque candidat peut s'obtenir par une instruction du type

=NB.SI(plage de cellules ; "Chirac") / 1000 .



D'une certaine façon tous ces sondages sont « corrects » et l'observation du nuage de points correspondant aux fréquences des trois candidats sur 100 sondages suffit à prendre conscience des fluctuations dues au hasard.
On peut faire examiner la proportion des sondages plaçant, à tort, Lionel Jospin devant Jean-Marie Le Pen, ou faire étudier l'amplitude des fluctuations de chaque candidat pour aller vers la notion d'intervalle de confiance.
Comme on l'a vu, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation est $2 \times \frac{1}{\sqrt{1000}}$, c'est-à-dire environ 6 %, ce qui est énorme lorsque les candidats sont si proches.

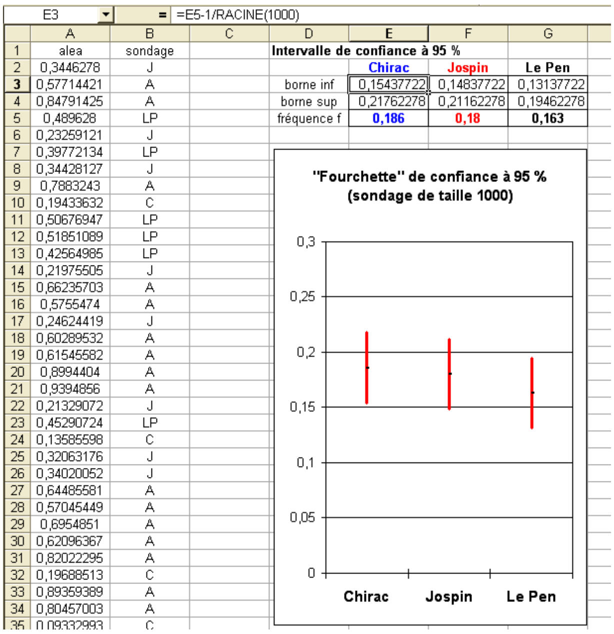
Fourchettes de sondage

On a vu que si la fréquence dans la population est p, plus de 95 % des échantillons aléatoires de taille n fournissent une fréquence dans l'intervalle $[\, p - \frac{1}{\sqrt{n}} ,\ p + \frac{1}{\sqrt{n}} \,]$.

Quand on effectue un sondage, on ne connaît bien sûr pas la valeur de la fréquence p sur la population, on ne connaît que la fréquence f obtenue sur l'échantillon. On peut alors calculer la fourchette $[\, f - \frac{1}{\sqrt{n}} ,\ f + \frac{1}{\sqrt{n}} \,]$ et affirmer que ce procédé est fiable à plus de 95 % c'est-à-dire que plus de 95 % des fourchettes ainsi calculées recouvrent effectivement la valeur p que l'on veut estimer.
Il est fort instructif d'expérimenter ces fourchettes dans la situation du premier tour de l'élection de 2002.
On peut représenter les fourchettes des trois candidats en utilisant le « diagramme boursier » du tableur. Il faut pour cela avoir, dans cet ordre, la borne inférieure, la borne supérieure et le centre de la fourchette.
Sur l'image d'écran suivante, on a d'abord entré en E5 la formule

=NB.SI(B2:B1001;"C")/1000 puis en E3 la formule

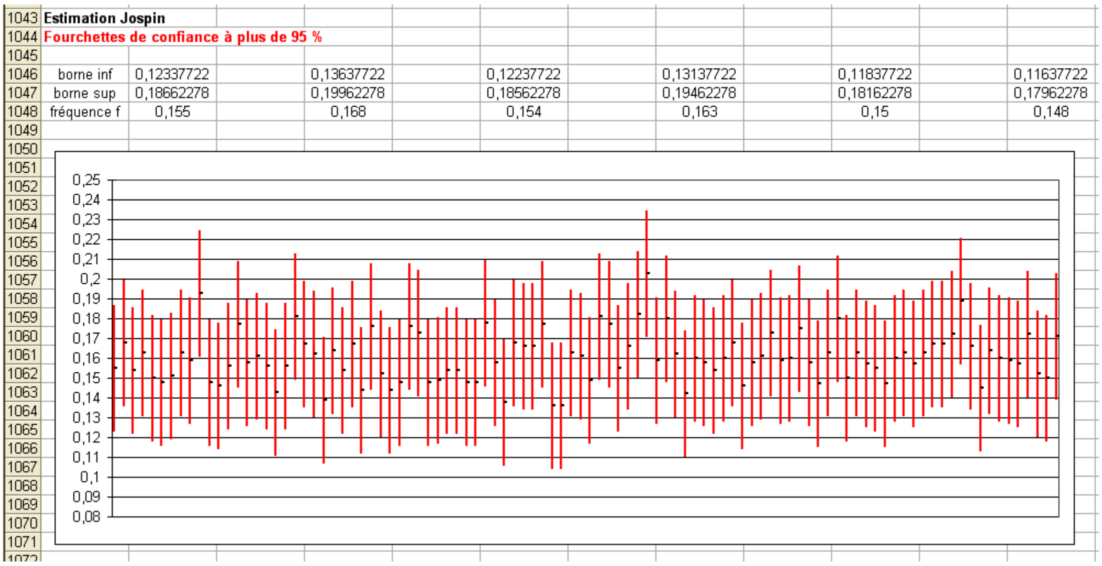
=E5-1/RACINE(1000) et en E4 la formule =E5+1/RACINE(1000).



E3 = =E5-1/RACINE(1000)

	A	B	C	D	E	F	G
1	alea	sondage		Intervalle de confiance à 95 %			
2	0,3446278	J			Chirac	Jospin	Le Pen
3	0,57714421	A		borne inf	0,15437722	0,14837722	0,13137722
4	0,84791425	A		borne sup	0,21762278	0,21162278	0,19462278
5	0,489628	LP		fréquence f	0,186	0,18	0,163
6	0,23259121	J					
7	0,39772134	LP					
8	0,34428127	J					
9	0,7883243	A					
10	0,19433632	C					
11	0,50676947	LP					
12	0,51851089	LP					
13	0,42564985	LP					
14	0,21975505	J					
15	0,66235703	A					
16	0,5755474	A					
17	0,24624419	J					
18	0,60289532	A					
19	0,61545582	A					
20	0,8994404	A					
21	0,9394856	A					
22	0,21329072	J					
23	0,45290724	LP					
24	0,13585598	C					
25	0,32063176	J					
26	0,34020052	J					
27	0,64485581	A					
28	0,57045449	A					
29	0,6954851	A					
30	0,62096367	A					
31	0,82022295	A					
32	0,19688513	C					
33	0,89359389	A					
34	0,80457003	A					
35	0,09332993	C					

On peut également, pour un seul candidat, représenter simultanément les fourchettes calculées sur 100 sondages, ci-dessous dans le cas de Lionel Jospin.
On constate alors que plus de 95 % de ces fourchettes recouvrent la valeur obtenue par le candidat le jour de l'élection c'est-à-dire, pour Lionel Jospin, coupent la droite d'équation $y = 0{,}16$.



1043	Estimation Jospin						
1044	Fourchettes de confiance à plus de 95 %						
1045							
1046	borne inf	0,12337722	0,13637722	0,12237722	0,13137722	0,11837722	0,11637722
1047	borne sup	0,18662278	0,19962278	0,18562278	0,19462278	0,18162278	0,17962278
1048	fréquence f	0,155	0,168	0,154	0,163	0,15	0,148

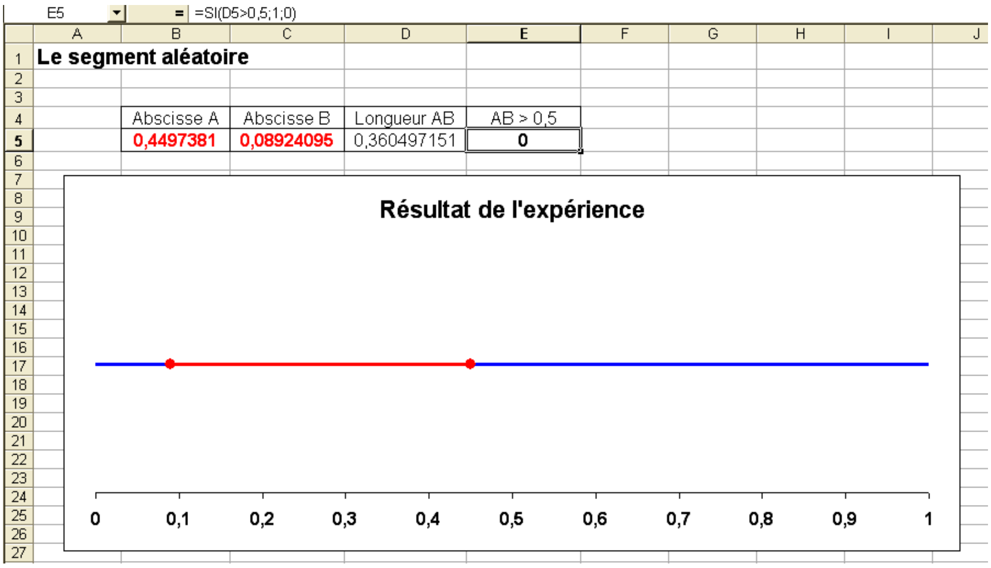
3. Augmentation de la taille de l'échantillon : approche d'une probabilité inconnue

Comment la loi des grands nombres permet-elle d'estimer une probabilité ?

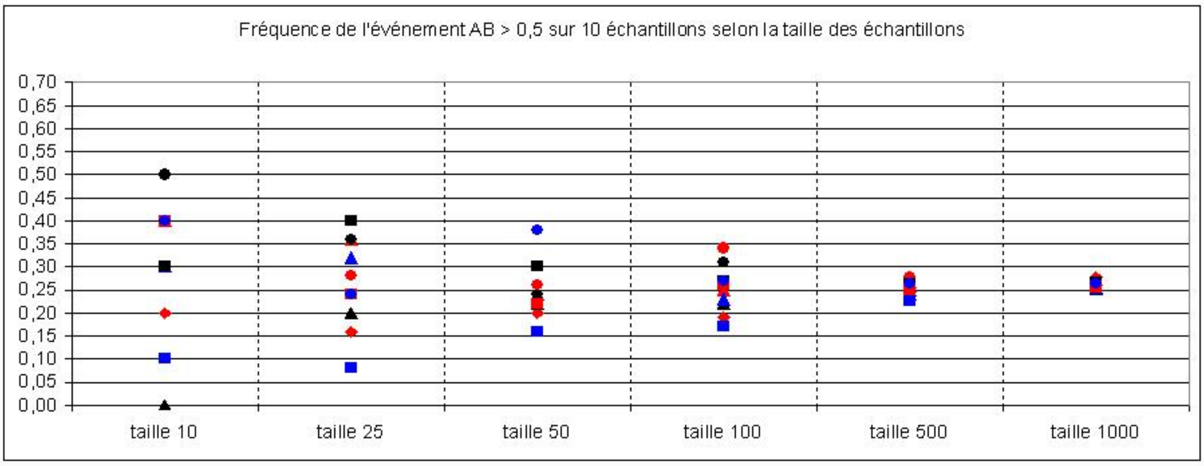
L'approche fréquentiste de la notion de probabilité (loi des grands nombres) est privilégiée par les programmes. Le tableur permet de l'expérimenter par simulation.

Le segment aléatoire

On considère l'expérience aléatoire consistant à prendre deux points A et B « au hasard » sur un segment de longueur 1.
On s'intéresse à l'événement « $AB > 0,5$ » dont la probabilité n'est pas intuitive.
La simulation de cette expérience est simple à mettre en place : sur l'image d'écran ci-dessous, on a entré en B5 et en C5 la formule =ALEA() puis en D5 la formule =ABS(B5-C5) fournit la distance AB.
En entrant en E5 la formule =SI(D5>0,5;1;0) on obtient 1 lorsque l'événement « $AB > 0,5$ » est réalisé et 0 lorsqu'il ne l'est pas.



Par recopie, on peut répéter l'expérience simulée et constituer des échantillons des résultats de cette expérience.



Sur l'image suivante, on peut observer les fluctuations de 10 échantillons de l'expérience, pour des tailles d'échantillons différentes. On constate que les fréquences, lorsque la taille de l'échantillon augmente, se rapprochent de 0,25. Cette valeur pourra être attribuée à la probabilité de l'événement.

Annexes – Atelier A5

Triplets pythagoriciens

Un exemple algorithme, tableur et calculatrice

L'algorithme consiste à déterminer systématiquement les triplets (a, b, c) d'entiers tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
Il s'appuie sur un résultat algébrique connu :
quels que soient les réels x et y,

$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$.

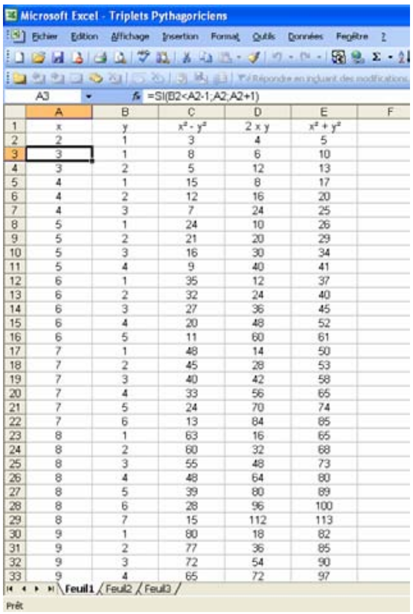
Alors, pour chaque entier x et y,

$a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$ et $c = x^2 + y^2$ donne un triplet pythagoricien.
On peut montrer que l'on obtient tous les triplets pythagoriciens en donnant à x les valeurs entières successives à partir de 2 et, pour chaque x, à y toutes les valeurs entières comprises entre 1 et $x - 1$.
D'où l'algorithme ci contre si on veut avoir les n premiers triplets pythagoriciens.

```
entrée n
x :=2
pour i=1 jusqu'à n
début
        pour y=1 jusqu'à x-1
        début
                a :=x*x-y*y
                b :=2*x*y
                c := x*x + y*y
                afficher a, b et c
        fin pour
        x :=x+1
fin pour
fin
```

Sur un tableur, la colonne A contiendra les valeurs de x, la colonne B celle de y, la colonne C celle de a, la colonne D celle de b et la colonne E celle de c.
On initialise
la cellule A2 à =2, la cellule B2 à =1,
puis en C2 on met la formule =A2*A2-B2*B2,
en D2 la formule =2*A2*B2
et en E2 la formule =A2*A2+B2*B2.
Sur la ligne 3, on met dans A3 la formule =SI(B2<A2-1 ;A2 ;A2+1) qui garde la valeur de x si y est strictement inférieur à x-1 sinon augmente x de 1
et dans B3 la formule =SI(A3=A2 ;B2+1 ;1) qui si x est le même augmente y de 1 sinon donne la valeur 1 à y car on recommence avec un nouveau x.
On recopie toutes ces cellules vers le bas colonne par colonne jusqu'à la ligne n+1.

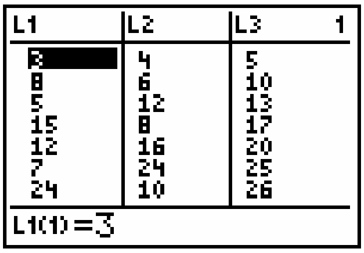
On obtient la feuille de calcul ci-contre :



	A	B	C	D	E	F
1	x	y	$x^2 - y^2$	2 x y	$x^2 + y^2$	
2	2	1	3	4	5	
3	3	1	8	6	10	
4	3	2	5	12	13	
5	4	1	15	8	17	
6	4	2	12	16	20	
7	4	3	7	24	25	
8	5	1	24	10	26	
9	5	2	21	20	29	
10	5	3	16	30	34	
11	5	4	9	40	41	
12	6	1	35	12	37	
13	6	2	32	24	40	
14	6	3	27	36	45	
15	6	4	20	48	52	
16	6	5	11	60	61	
17	7	1	48	14	50	
18	7	2	45	28	53	
19	7	3	40	42	58	
20	7	4	33	56	65	
21	7	5	24	70	74	
22	7	6	13	84	85	
23	8	1	63	16	65	
24	8	2	60	32	68	
25	8	3	55	48	73	
26	8	4	48	64	80	
27	8	5	39	80	89	
28	8	6	28	96	100	
29	8	7	15	112	113	
30	9	1	80	18	82	
31	9	2	77	36	85	
32	9	3	72	54	90	
33	9	4	65	72	97	

Sur une calculatrice TI84, on peut utiliser les listes et ranger au fur et à mesure les nombres puis afficher les listes. On est amené à ajouter une variable K qui gère l'avancement dans les listes. Attention les variables *x* et *y* sont devenus A et B
Cela donne le programme ci-contre avec l'exemple d'écran obtenu ci-dessous après affichage des listes :

```
ClrList L ,L,,Lƒ
Prompt N
2üA:1üK
For(I,1,N)
For(B,1,A-1)
AÜ-BÜüL (K)
2A*BüL,(K)
AÜ+BÜüLƒ(K)
K+1üK
End
A+1üA
End
```



L1	L2	L3
3	4	5
8	6	10
5	12	13
15	8	17
12	16	20
7	24	25
24	10	26

L1(1)=3

Variante
Dans le cas où N est la valeur maximale de A, on peut modifier algorithme et programme de la manière suivante afin de bien voir les deux boucles imbriquées sur A et B, la variable K jouant un rôle uniquement pour l'avancement dans les listes.

```
entrée n
pour x=2 jusqu'à n
début
        pour y=1 jusqu'à x-1
        début
                a :=x*x-y*y
                b :=2*x*y
                c := x*x + y*y
                afficher a, b et c
        fin pour
fin pour
fin
```

```
ClrList L ,L,,Lƒ
Prompt N
1üK
For(A,2,N)
For(B,1,A-1)
AÜ-BÜüL (K)
2A*BüL,(K)
AÜ+BÜüLƒ(K)
K+1üK
End
End
```

En "langage naturel" cela pourrait donner :
Lire un nombre N
Pour A allant de 2 à N :
Pour B allant de 1 à A-1 :
Afficher $A^2 - B^2$; 2*A*B ; $A^2 + B^2$
Fin de la boucle sur B
Fin de la boucle sur A

On peut remarquer que l'algorithme en langage naturel ne parle ni de K ni des listes qui sont liés à l'implémentation...

Version execalgo équivalente :

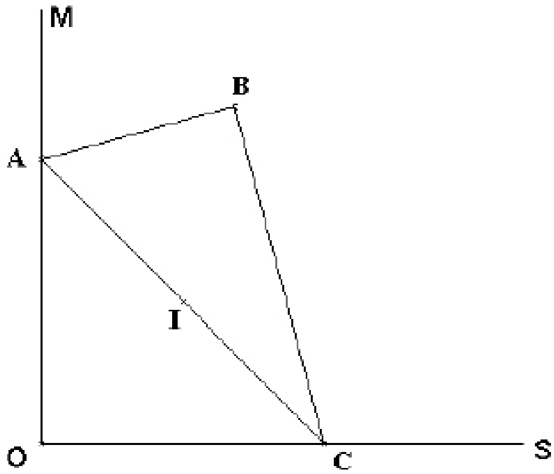
```
Entier A ; B ; N
Donner à  N la valeur 10 # par exemple
Donner à A la valeur 2
[Début de la boucle sur A]
  Donner à B la valeur 1
  [Début de la boucle sur B]
    Afficher A²-B²;" ";2*A*B;" ";A²+B²
    Donner à B la valeur B + 1
  Aller à  [Début de la boucle sur B] si B < A
  Donner à A la valeur A + 1
Aller à  [Début de la boucle sur A] si A <= N
```

Expérimentation de l'épreuve pratique en terminale S : trois sujets et quelques commentaires

Sujet 12 : Étude de lieux géométriques

Descriptif
Le triangle ABC représente une équerre.
On s'intéresse à l'étude du lieu de certains points de l'équerre lorsque les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires [OM) et[OS).

Sujet
Le triangle ABC représente une équerre telle que AB = 3, AC = 6 et l'angle en B est droit.
Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires [OM) et [OS).
Le point I est le milieu du segment [AC].
On s'intéresse aux lieux des points I et B.



Descriptif
Compétences évaluées
Compétences TICE
– Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
– Visualiser un lieu ;
– Tester les conjectures émises.
Compétences mathématiques
– Exploiter les propriétés du triangle rectangle ;
– Utiliser les lignes trigonométriques dans un triangle.

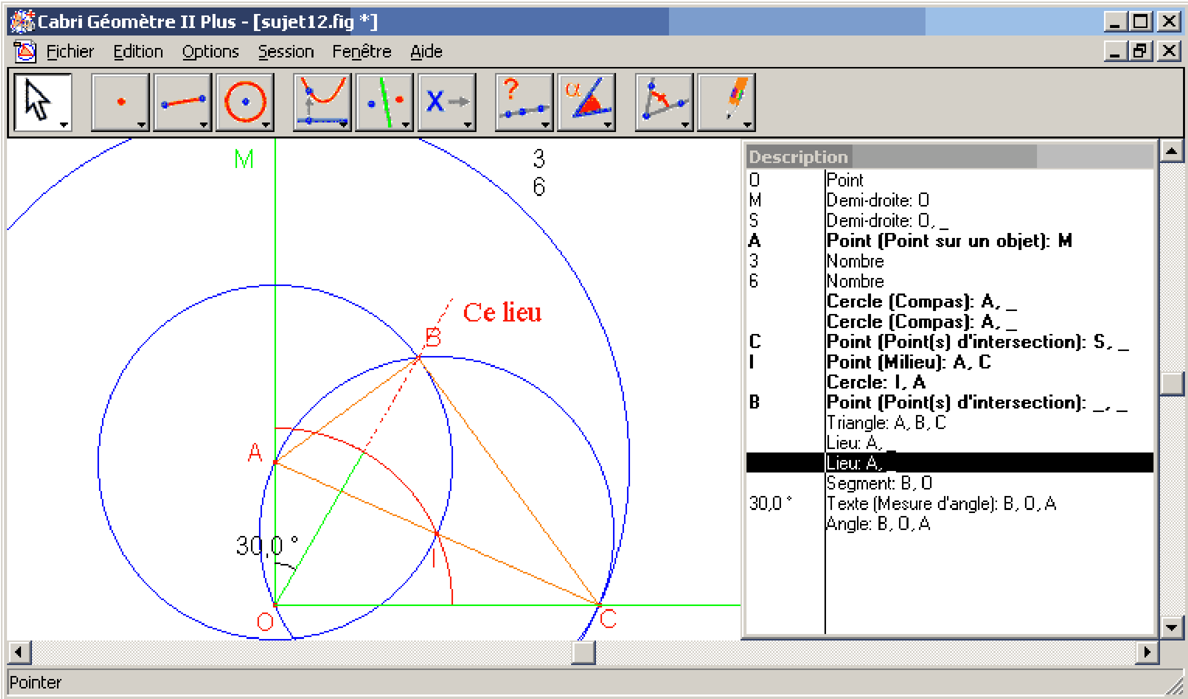
Sujet
1. Observer les propriétés géométriques de la figure. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.
2. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand C décrit la demi-droite [OS). Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?
3. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point B quand C décrit la demi-droite [OS). Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?
4. - Donner les mesures des angles de l'équerre, puis celle de $\widehat{AOB}$ (A distinct de O).
– En déduire que le lieu de B est inclus dans une courbe simple dont on précisera la nature.
– Démontrer que OB = 6 sin ($\widehat{AOB}$).
– En déduire le lieu de B.

NB : Pour les questions 1, 2, 3 appels de l'examinateur.
Pour la question 4, production écrite demandée.

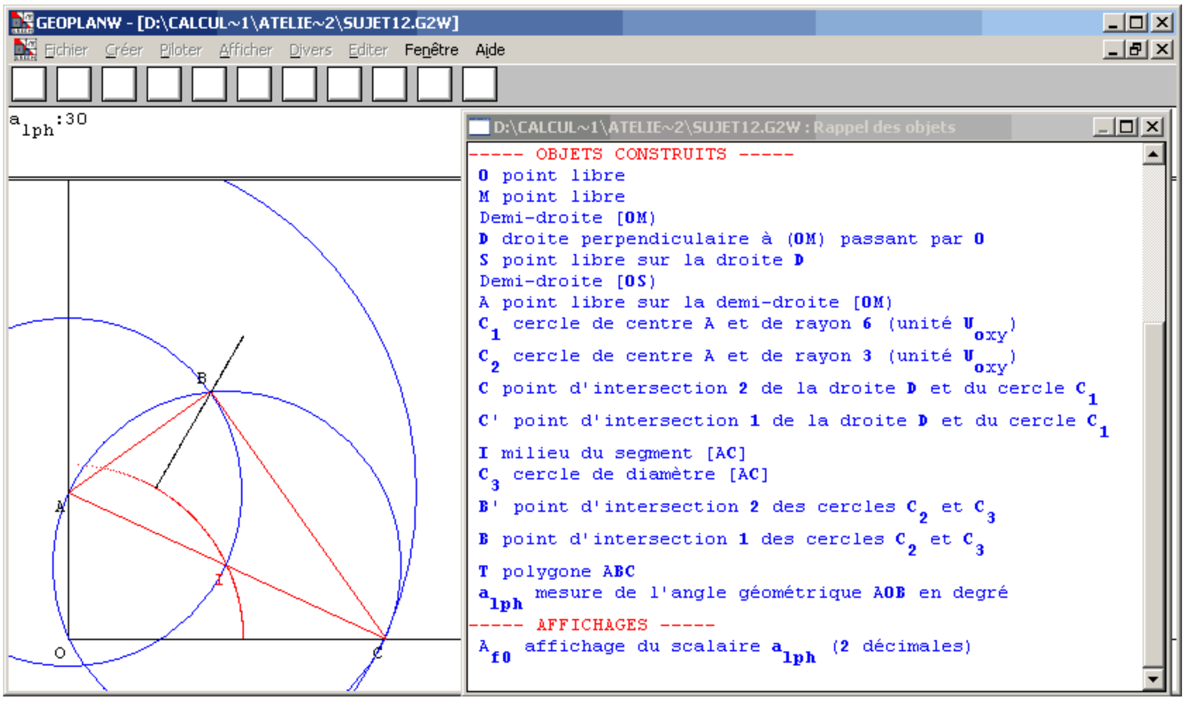
La fiche professeur *(cf. la fiche professeur)* donne des indications précises sur :
- les attendus ;
- les aides possibles ;
- quelques « repères » en termes d'évaluation.

Les constructions posent quelques problèmes, elles dépendent assez peu du logiciel utilisé.

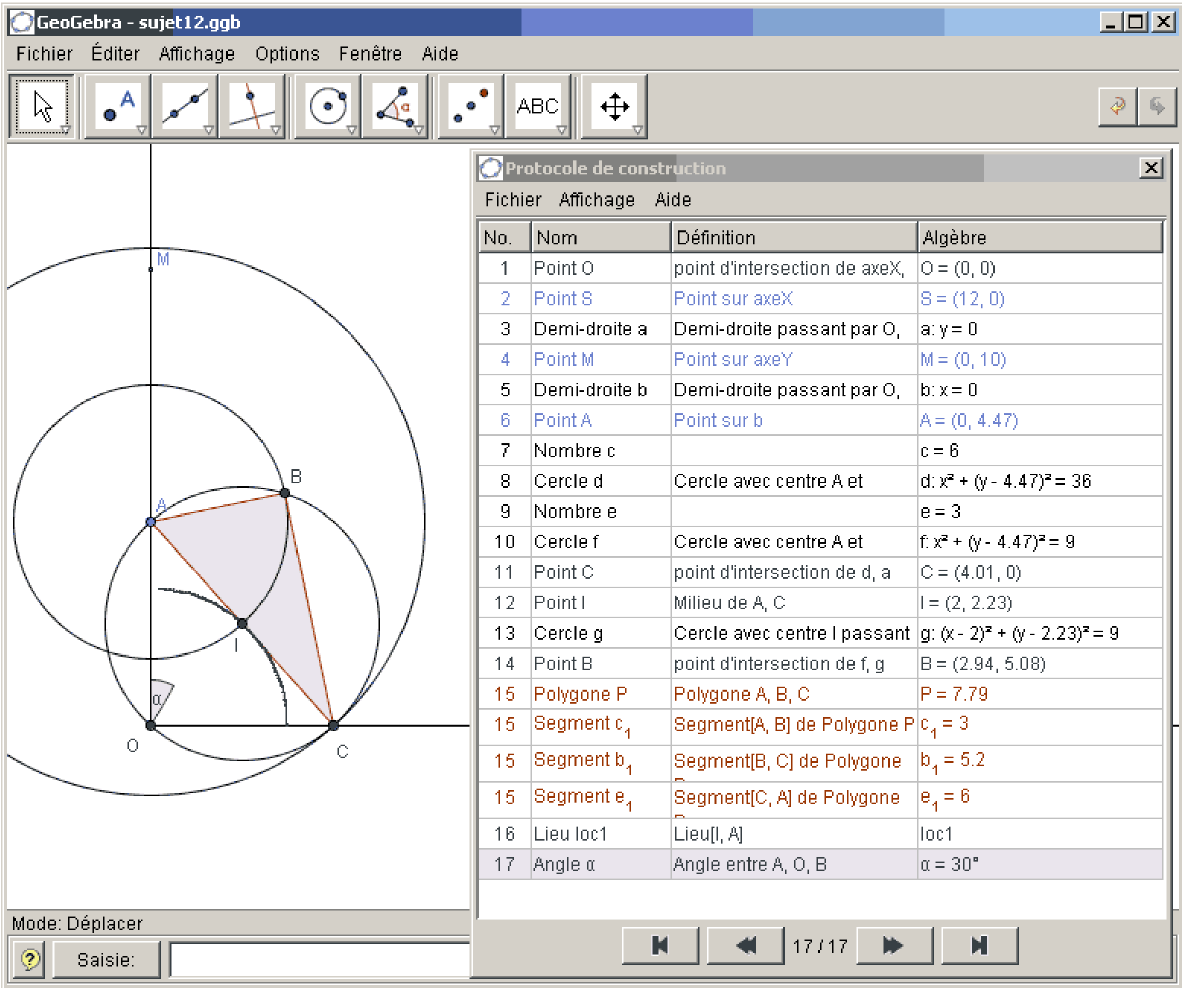
Les copies d’écran suivantes donnent une idée de construction possible.



Une construction avec CABRI



Une construction avec GEOPLAN



No.	Nom	Définition	Algèbre
1	Point O	point d'intersection de axeX,	O = (0, 0)
2	Point S	Point sur axeX	S = (12, 0)
3	Demi-droite a	Demi-droite passant par O,	a: y = 0
4	Point M	Point sur axeY	M = (0, 10)
5	Demi-droite b	Demi-droite passant par O,	b: x = 0
6	Point A	Point sur b	A = (0, 4.47)
7	Nombre c		c = 6
8	Cercle d	Cercle avec centre A et	d: x² + (y - 4.47)² = 36
9	Nombre e		e = 3
10	Cercle f	Cercle avec centre A et	f: x² + (y - 4.47)² = 9
11	Point C	point d'intersection de d, a	C = (4.01, 0)
12	Point I	Milieu de A, C	I = (2, 2.23)
13	Cercle g	Cercle avec centre I passant	g: (x - 2)² + (y - 2.23)² = 9
14	Point B	point d'intersection de f, g	B = (2.94, 5.08)
15	Polygone P	Polygone A, B, C	P = 7.79
15	Segment c_1	Segment[A, B] de Polygone P	c_1 = 3
15	Segment b_1	Segment[B, C] de Polygone	b_1 = 5.2
15	Segment e_1	Segment[C, A] de Polygone	e_1 = 6
16	Lieu loc1	Lieu[I, A]	loc1
17	Angle α	Angle entre A, O, B	α = 30°

Une construction avec GEOGEBRA

La réalisation est souvent faite (avec un peu d'aide) et les lieux sont rapidement visualisés.
La question sur les angles de l'équerre désarçonne plusieurs candidats. Lorsqu'on essaye d'évoquer la trigonométrie élémentaire de troisième cela leur semble très loin et souvent inefficace. La mesure de l'angle est, elle aussi, problématique. Il est fréquent que le candidat ne fasse pas apparaître cet angle sur sa figure. Il est très rare qu'il utilise le logiciel pour avoir une idée de sa mesure.
Ceci fait que la réalisation de la partie « justification » reste assez embryonnaire.

Dans le premier lycée observé, ce sujet a été tiré quatorze fois. Les notes proposées vont de 8 à 17, avec une moyenne de 13.

Au cours de l'expérimentation, ce sujet a été tiré 35 fois (5 lycées). Les notes proposées vont de 5 à 17, avec une moyenne de 12,9.

Sujet 27 : Triangle d'aire maximale

Descriptif
On considère un triangle ABC isocèle en A de périmètre fixé. Il s'agit de déterminer parmi tous les triangles possibles celui dont l'aire est maximale.

Sujet
On considère un triangle isocèle de périmètre fixé, égal à 15.
Le but de cet exercice est de déterminer parmi tous les triangles possibles celui dont l'aire est maximale.

Descriptif
Compétences évaluées
Compétences TICE
- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

Compétences mathématiques
- Calculs de longueur et d'aire ;
- Etude des variations d'une fonction.

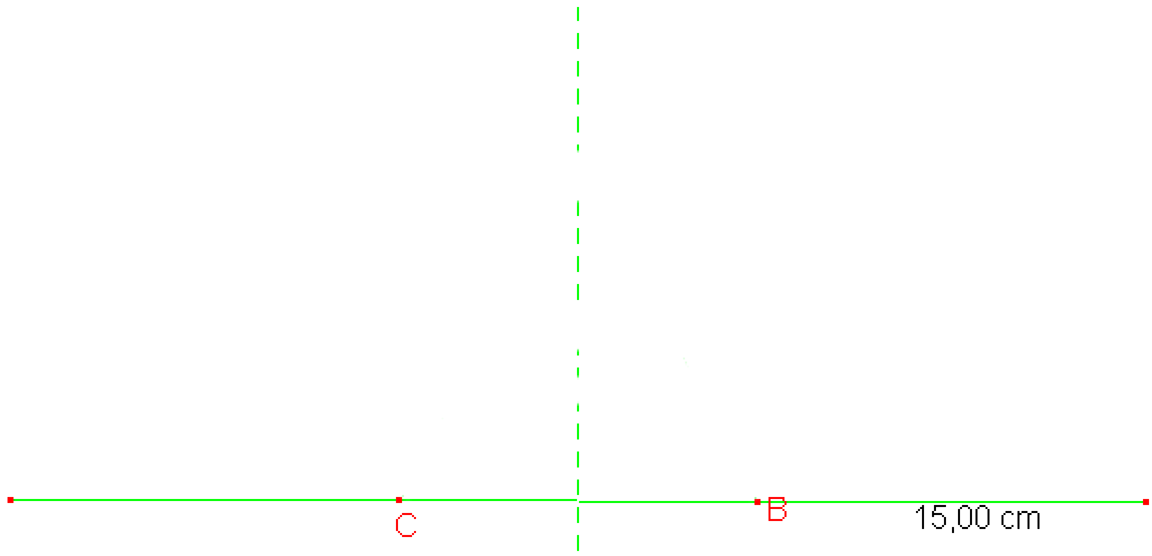
Sujet
1. Expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie :
   (a) A l'aide d'un logiciel de géométrie, construire un triangle ABC isocèle en A, dont le périmètre est fixé et exactement égal à 15.
   (b) Parmi tous les triangles possibles, quelle semble être la nature du triangle d'aire maximale ?
2. Démonstration :
On note x la longueur BC et A(x) l'aire de ABC.
   (a) Dans quel intervalle le réel x peut il prendre ses valeurs ?
   (b) Soit H le milieu de [BC], exprimer AH en fonction de x et en déduire que
$$A(x) = \frac{x}{4}\sqrt{225 - 30x}$$
   (c) Résoudre le problème posé.

NB : Pour les questions 1(a) et 1(b), appels de l'examinateur.
Pour les questions 1(b) et 2, production écrite demandée.

La fiche professeur précise :
- L'examinateur doit contrôler à l'écran la figure obtenue.
- On ne laissera pas un élève bloqué par des difficultés techniques plus de 10 min.
- La construction à réaliser n'étant pas évidente, on pourra proposer au candidat en difficulté des étapes de construction sans que cela ne le pénalise.
- Les méthodes sont diverses et dépendent du logiciel utilisé.
- Si l'élève n'a toujours pas la figure au bout de 25 min, on lui donnera celle-ci.

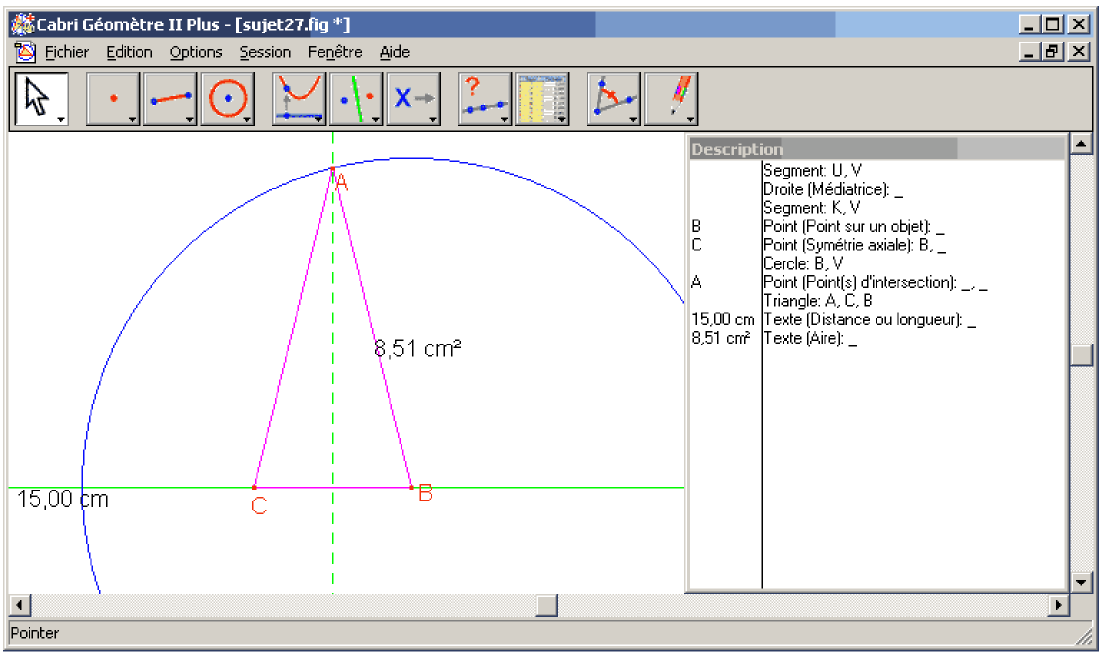
Puis :
L'examinateur doit vérifier la cohérence de la conjecture proposée avec les manipulations de l'élève.
Si la conjecture n'est pas celle attendue ou est incohérente, on lui donnera des indications et, en cas d'échec, au bout de 10 min de recherche, on lui proposera la conjecture correcte :
le triangle d'aire maximale est le triangle équilatéral.

La construction pose quelques problèmes, elle dépend assez fortement du logiciel utilisé. On peut imaginer des pistes différentes pour la réaliser, par exemple une approche géométrique

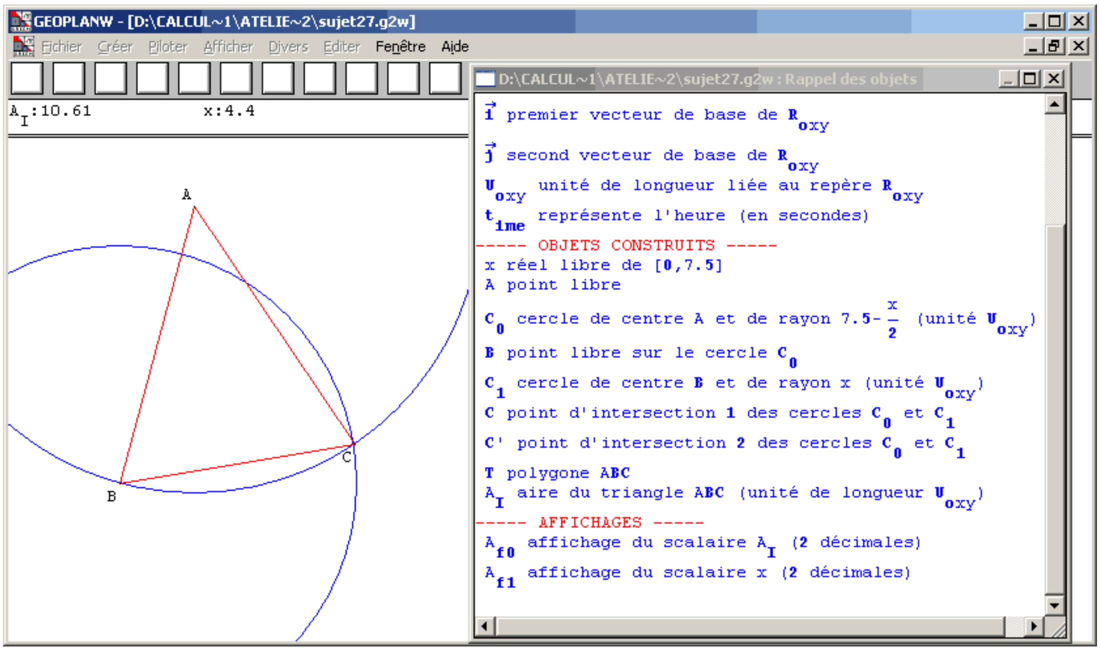


ou une approche plus basée sur les mesures (si on pose BC = x, alors AB = …..

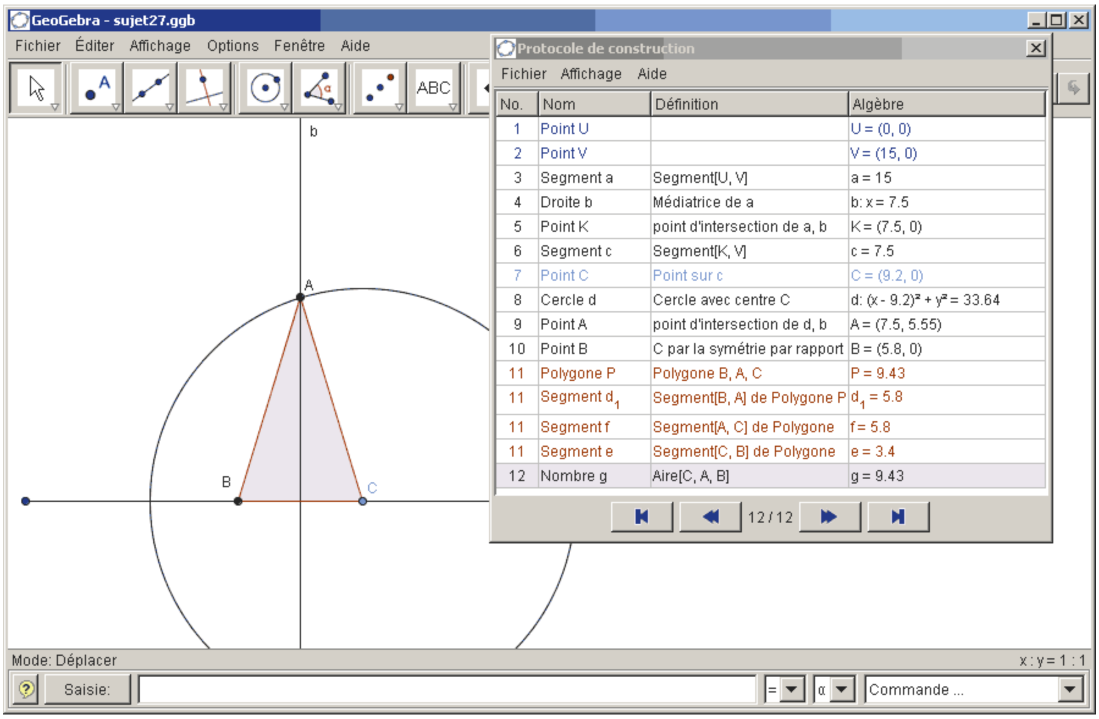
ou ….



Une construction avec CABRI



Une construction avec GEOPLAN



Une construction avec GEOGEBRA

En cas de problème de construction, il est difficile pour les examinateurs d'aider les candidats sans « tout » dire. Plusieurs examinateurs auraient aimé que l'énoncé guide le candidat. Ceci se comprend mais pose véritablement la question de la recherche expérimentale. Certains candidats n'ont pas hésité à faire du tâtonnement à partir d'une figure qui ne prend en compte qu'une partie des contraintes (on règle à vue le fait que le périmètre vaut 15). Ceci ne les empêche pas de conjecturer la solution.
Les examinateurs ont beaucoup discuté chez sur ce que l'on va exiger dans la dernière partie. Le calcul algébrique pose d'énormes problèmes à de nombreux candidats (sans doute sous le coup du stress $(15\text{-}x)^2$ se transforme aussi bien en $30–2x$ qu'en $225–x^2$).

Dans le premier lycée observé ce sujet a été tiré vingt-cinq fois. Les notes proposées vont de 2 à 19 avec une moyenne de 14.
Au cours de l'expérimentation ce sujet a été tiré 47 fois (3 lycées). Les notes proposées vont de 2 à 19 avec une moyenne de 13,2.

Sujet 44 : Sommes de termes d'une suite

Descriptif
Le but est de calculer la somme des cubes des *n* premiers entiers. Il s'agit d'abord de conjecturer la formule à l'aide d'un outil de calcul, puis de démontrer la formule trouvée.

Sujet
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n entier naturel par $u_n = n^3$ et la somme de ses premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

Descriptif
Compétences évaluées
Compétences TICE
- Mettre en place un processus itératif ;
- Émettre une conjecture par comparaison de deux listes de nombres.

Compétences mathématiques
- Somme des termes d'une suite arithmétique ;
- Démonstration par récurrence d'une formule explicite.

Sujet
1. Donner la somme V_n des n+1 premiers termes de la suite arithmétique des entiers naturels soit
$V_n = 0 + 1 + \cdots + n$.
2. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de S_n pour n allant de 1 à 30.
3. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de V_n^2 dans les mêmes cas particuliers. Que constate-t-on ?
4. À partir du constat ci-dessus, conjecturer une formule donnant la valeur de S_n en fonction de n, puis la démontrer.
On suggère une démonstration par récurrence.

NB : Pour les questions 2 et 3, appels de l'examinateur.
Pour les questions 1, 2, 3 et 4, production écrite demandée.

La fiche professeur précise :
- Vérifier que l'élève connaît les commandes de base du tableur : entrer une formule, la recopier, prendre la somme d'une plage de valeurs.
- S'il ignore la formule donnant la somme des premiers entiers, lui donner l'indication.

Puis :
Vérifier que l'élève a obtenu la bonne formule et que la méthode envisagée est productive, sinon, « vendre la mèche » et lui donner l'indication de démontrer par récurrence sur n que :

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

C’est un sujet bien classique qui rassure examinateurs (et certains candidats). Il permet de voir des différences très marquées entre des candidats. Il y a ceux qui obtiennent sans difficultés les termes de la suite sur le tableur. Il y a ceux pour qui c’est très laborieux et, dans ce cas, c’est souvent révélateur d’une difficulté à donner du sens à l’écriture :

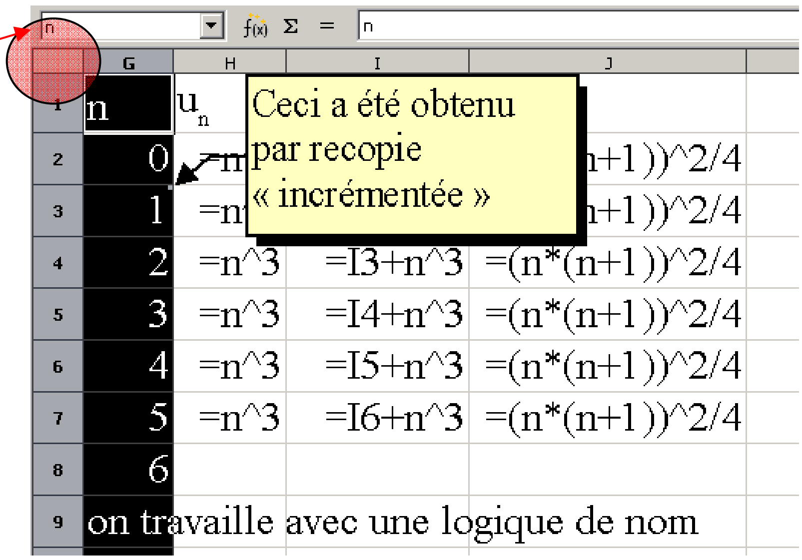
$$\sum_{k=0}^{n} k^3$$

Il est bien difficile, pour certains, de trouver la relation $S_n = S_{n-1} + n^3$ qui peut faciliter le calcul dans le tableur.

Dans le lycée observé, ce sujet a été tiré quatorze fois. Les notes proposées vont de 6 à 18, avec une moyenne de 13,8.
Au cours de l’expérimentation, ce sujet a été tiré 101 fois (9 lycées). Les notes proposées vont de 3 à 20, avec une moyenne de 14,1.

n	u_n	S_n	V_n^2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	8	9	9
3	27	36	36
4	64	100	100
5	125	225	225
6	216	441	

	A	B	C	D
1	n	u_n	S_n	V_n^2
2	0	=A2^3	=SOMME(B$2:B2)	=(A2*A3)^2/4
3	=A2+1	=A3^3	=SOMME(B$2:B3)	=(A3*A4)^2/4
4	=A3+1	=A4^3	=SOMME(B$2:B4)	=(A4*A5)^2/4
5	=A4+1	=A5^3	=SOMME(B$2:B5)	=(A5*A6)^2/4
6	=A5+1	=A6^3	=SOMME(B$2:B6)	=(A6*A7)^2/4
7	=A6+1	=A7^3	=SOMME(B$2:B7)	=(A7*A8)^2/4
8	=A7+1	=A8^3	=SOMME(B$2:B8)	
9	On travaille avec une logique d'adresse			



On nomme n la colonne contenant les valeurs des indices, obtenue « sans formules ».
On réutilise ce nom pour les calculs suivants.