ministère Éducation nationale

EAE MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2010

AGREGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Objectif et notations

Dans ce problème, nous allons nous intéresser aux niveaux d'énergie de l'oscillateur classique et de l'oscillateur harmonique quantique.

Les différentes parties du problème peuvent être, dans une assez large mesure, traitées de manière indépendante.

- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes, $\mathbf{N}$ celui des entiers naturels, et $\mathbf{N}^*$ celui des entiers naturels non nuls.
- Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.
- Pour $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ et $d \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{C}^n(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$.
- On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.
- On note $L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (respectivement $L^2(\mathbf{R})$) l'ensemble des classes de fonctions intégrables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ (respectivement de classes de fonctions réelles de carré intégrable) au sens de Lebesgue.
- Étant donnée une mesure μ sur une tribu d'un ensemble X, on note $L^2(\mu)$ l'ensemble des (classes de) fonctions de X dans $\mathbf{R}$ de carré intégrable pour la mesure μ.
- Étant donnée $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, on note $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-iy\xi}\, \mathrm{d}y.$$
- Étant donnée une matrice M, on note M^T sa transposée.
- La notation $M_n(\mathbf{R})$ recouvre l'ensemble des matrices carrées à n lignes et à coefficients réels.
- Le gradient d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^{2d})$ est défini comme la fonction à valeurs vectorielles
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{2d}} \end{pmatrix}.$$
- Étant donnés un ouvert U de $\mathbf{R}^{2d}$ et une fonction $g : U \to \mathbf{R}^{2d}$ de classe $\mathcal{C}^1$ s'écrivant $g(y) = \big(g_1(y), \ldots, g_{2d}(y)\big)$, on définit la jacobienne de g en $y \in U$ comme
$$\nabla g(y) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2d} \in M_{2d}(\mathbf{R}).$$

I. Polynômes de Hermite

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction H_n sur $\mathbf{R}$ par

$$H_n(y) = (-1)^n \, \mathrm{e}^{y^2/2} \, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}(\mathrm{e}^{-y^2/2}).$$

1. Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \mathrm{d}y$.
2. Calculer H_0, H_1 et H_2.
3. Pour $n \in \mathbf{N}$, montrer que H_n est une fonction polynomiale et en préciser le degré et le coefficient dominant.
4. On considère la mesure μ sur $\mathbf{R}$ définie à partir de la mesure de Lebesgue grâce à la fonction de poids $y \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. On définit $L^2(\mu)$ avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbf{R}} f(y) \, g(y) \, \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} f g \, \mathrm{d}\mu.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est dans $L^2(\mu)$.

   (b) Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de l'espace $L^2(\mu)$.

   (c) Calculer la norme de H_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

II. Oscillateur harmonique classique

On considère une particule de masse m. On note $x(t)$ la position de la particule à l'instant t. La fonction x est ainsi à valeurs dans $\mathbf{R}$. L'équation du mouvement de cette particule s'écrit

$$m \, \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k \, x. \tag{1}$$

On suppose que k est une constante réelle positive et on définit le potentiel V par

$$V(x) = \frac{1}{2} \, k \, x^2.$$

On pose

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

1. Soient x_0 et y_0 deux réels donnés.
   Résoudre l'équation différentielle (1) avec les conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x'(0) = y_0. \tag{2}$$

2. Soient T un réel non nul et x_0, x_T deux réels.
   Suivant les paramètres T et x_T, donner, lorsqu'il n'est pas vide, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) avec les conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x(T) = x_T.$$

3. Soit x une solution de l'équation (1) satisfaisant les conditions (2). On définit l'impulsion de la particule $p = m\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $Y = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$.
Donner un système différentiel du premier ordre vérifié par Y.
4. On note $E_c = \dfrac{p^2}{2m}$ l'énergie cinétique de la particule et $\mathcal{E}(t) = E_c(t)+V(t)$ l'énergie totale à l'instant t.
Montrer que la fonction $\mathcal{E}$ est constante, calculer sa valeur en fonction de (x_0, y_0) et déterminer l'ensemble formé par ces valeurs lorsqu'on fait varier la condition initiale (x_0, y_0).

III. Oscillateur harmonique quantique

L'objet de cette partie et de la suivante est de montrer qu'en mécanique quantique, les niveaux d'énergie d'une particule dans un puits de potentiel sont quantifiés. On cherche donc à déterminer des réels E_n et des fonctions Ψ_n à valeurs réelles tels que Ψ_n soient de classe $\mathcal{C}^2$, de carré intégrable ainsi que ses dérivées première et seconde et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\,\omega^2 x^2\right]\Psi_n(x) = E_n\,\Psi_n(x), \tag{3}$$

où les constantes $\hbar$, m et ω sont strictement positives.

1. Soient Ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et E un réel tels que (Ψ, E) vérifie l'équation (3). Pour $y \in \mathbf{R}$, on pose $x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\,\omega}}\,y$ et $\Phi(y) = \Psi(x)$.
Montrer que Φ satisfait une équation différentielle de la forme
$$-\Phi'' + y^2\Phi = e\,\Phi, \tag{4}$$
où e est une constante que l'on exprimera en fonction de E.
2. Soit φ une fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ vérifiant
$$\forall y \in \mathbf{R},\ \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y\right)\varphi(y)\right] = 0. \tag{5}$$
   (a) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre :
   $$-f'(y) + y\,f(y) = 0.$$
   (b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (5).
   (c) Montrer que
   $$\varphi_0 : y \mapsto \frac{1}{\pi^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}$$
   est l'unique solution de (5) vérifiant les conditions $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \varphi_0(y)^2\mathrm{d}y = 1$ et $\varphi_0(0) > 0$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$\varphi_n : y \mapsto C_n \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y\right)^n \varphi_0(y),$$

où C_n est la constante positive telle que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(y)^2 \mathrm{d}y = 1$.

La notation $\left(-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y\right)^n \varphi_0(y)$ désigne la fonction obtenue à partir de φ_0 en appliquant n fois l'opérateur $\left(-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y\right)$.

   (a) Expliciter φ_1 et φ_2.

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe une constante e_n telle que

   $$\forall y \in \mathbf{R},\ -\varphi_n''(y) + y^2 \varphi_n(y) = e_n\, \varphi_n(y).$$

   Que vaut e_n ?

   (c) Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale $P_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de degré n et de coefficient dominant positif telle que

   $$\forall y \in \mathbf{R},\ \varphi_n(y) = P_n(y)\, \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

   (d) Pour $n \in \mathbf{N}$, exprimer P_n en fonction du polynôme H_n de la partie I.

4. Déterminer une suite de réels E_n pour lesquels l'équation différentielle (3) admet une solution non identiquement nulle Ψ_n et telle que Ψ_n, Ψ_n' et Ψ_n'' soient toutes de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.

5. On se donne ici un réel E, une fonction Ψ non identiquement nulle et de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ avec $\Psi \in L^2(\mathbf{R})$, $\Psi' \in L^2(\mathbf{R})$ et $\Psi'' \in L^2(\mathbf{R})$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2\right] \Psi(x) = E\,\Psi(x). \tag{6}$$

En considérant $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} E\,\Psi(x)^2 dx$, montrer que $E > 0$.

IV. Équation d'Hermite

Dans cette section, on fixe un réel λ et on s'intéresse à l'équation différentielle d'Hermite :

$$H''(y) - 2\,y\,H'(y) + \lambda\,H(y) = 0, \tag{A_λ}$$

dont on cherche les solutions définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1. Soit $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Montrer que $\Phi : y \mapsto H(y)\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$ est solution de l'équation différentielle (4) si et seulement si H est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (A_λ) ?

3. Soit une série *formelle* $F(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ à coefficients dans $\mathbf{R}$.
   Montrer que F vérifie la relation
$$F''(X) - 2\,X\,F'(X) + \lambda\,F(X) = 0 \tag{7}$$
   si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfait à une relation de récurrence linéaire que l'on précisera.

4. Montrer que lorsque la série formelle F vérifie la relation (7), la série entière $\sum a_n\, z^n$ a un rayon de convergence infini.

5. On note respectivement a^+ et a^- les suites vérifiant la relation de récurrence obtenue en IV.3 avec les conditions initiales respectives
$$a_0^+ = 1 \quad \text{et} \quad a_1^+ = 0 \quad ; \quad a_0^- = 0 \quad \text{et} \quad a_1^- = 1.$$
   On définit deux fonctions H^+ et H^- par :
$$\forall y \in \mathbf{R},\ H^+(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+\, y^n \quad \text{et} \quad H^-(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-\, y^n.$$
   Montrer que (H^+, H^-) est une base de l'espace des solutions de (A_λ).

6. Déterminer les réels λ pour lesquels (A_λ) admet une solution polynomiale non nulle.

7. On suppose que $\lambda = 2n$ pour un certain entier naturel n.
   (a) Comparer la fonction φ_n de la partie III aux solutions polynomiales de (A_λ).
   (b) En déduire l'expression de chacun des coefficients du polynôme de Hermite H_n.

8. On suppose dans cette question que $\lambda \neq 2n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. On définit $g_\alpha : y \mapsto \mathrm{e}^{\alpha y^2/2}$ sur $\mathbf{R}$.
   Déterminer l'expression des coefficients b_n du développement en série entière de g_α autour de 0 en précisant le rayon de convergence de la série entière obtenue.
   (b) On suppose maintenant $\alpha < 2$.
   Montrer qu'il existe un entier $N > 0$ tel que $\dfrac{a_{2n+2}^+}{a_{2n}^+} \geqslant \dfrac{b_{2n+2}}{b_{2n}}$ pour tout $n \geqslant N$.
   (c) En déduire que $g_\alpha(y) = O\big(H^+(y)\big)$ quand $|y| \to +\infty$.
   (d) Montrer qu'aucune solution non identiquement nulle de (A_λ) n'est bornée.

V. Fonctions propres non tempérées

On définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telle que, pour tout $(k, \ell) \in \mathbf{N}^2$, la fonction $x \mapsto x^k f^{(\ell)}(x)$ soit bornée sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que pour tout polynôme P, la fonction $y \mapsto P(y)\,\mathrm{e}^{-y^2/2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.
2. Montrer, pour tout $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ intégrable sur $\mathbf{R}$, l'équivalence
$$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \iff \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}).$$
3. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.
Montrer que f est solution de (4) si et seulement si $\widehat{f}$ est solution de (4).
4. Suivant la valeur de e, déterminer les solutions de (4) définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$ et appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.
5. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Montrer sans calcul que la fonction $\widehat{\varphi_n}$ est colinéaire à φ_n.
   (b) Exprimer plus précisément $\widehat{\varphi_n}$ à l'aide de φ_n.
6. Pour cette question, on revient sur les polynômes H_n de la partie I. On rappelle que μ désigne la mesure sur $\mathbf{R}$ définie à partir de la mesure de Lebesgue avec la fonction de poids $y \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot$ On se propose d'étudier l'adhérence dans l'espace préhilbertien réel $L^2(\mu)$ du sous-$\mathbf{R}$-espace vectoriel V engendré par la famille $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   (a) On fixe $f \in L^2(\mu)$ et on pose $g : x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
   Montrer que $\widehat{g}$ est définie et se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.
   (b) En déduire l'adhérence de V dans $L^2(\mu)$ puis décrire une base hilbertienne de $L^2(\mu)$.

VI. Systèmes hamiltoniens

Soit $\mathcal{H}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur $\mathbf{R}^{2d}$ à valeurs réelles. On se fixe un point $(p_1^0, \ldots, p_d^0, q_1^0, \ldots, q_d^0) \in \mathbf{R}^{2d}$. On considère le système différentiel *hamiltonien*

$$\forall j \in [\![1, d]\!], \quad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(p, q) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(p, q), \tag{8}$$

avec conditions initiales

$$\forall j \in [\![1, d]\!], \; p_j(0) = p_j^0 \quad \text{et} \quad q_j(0) = q_j^0, \tag{9}$$

d'inconnues $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_d \end{pmatrix}$ et $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_d \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on considère l'Hamiltonien de la mécanique classique

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \frac{p_j^2}{m_j} + V(q),$$

où V désigne une fonction de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que le système (8) se réécrit

$$\forall j \in [\![1, d]\!], \; m_j \frac{d^2 q_j}{dt^2} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_j},$$

avec des conditions initiales à préciser.

2. Montrer que le système régissant le mouvement d'une particule (équation (1) avec conditions initiales (2)) peut s'écrire sous la forme d'un système hamiltonien.

Pour étudier le système (8) en toute généralité, on introduit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} \in M_{2d}(\mathbf{R}).$$

On dit qu'une application g définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^{2d}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{2d}$ est **symplectique** si elle est différentiable et si, pour tout $(p, q) \in U$,

$$(\nabla g(p, q))^T \, J \, \nabla g(p, q) = J.$$

3. Montrer que J est inversible et relier les matrices J^{-1}, J^T et J les unes aux autres.

On définit $y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2d}$ si bien que le système (8) se réécrit

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = J \, \nabla \mathcal{H}(y), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} p^0 \\ q^0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

4. Soit y une solution maximale de (10) définie sur un intervalle I.
Montrer que la fonction $t \mapsto \mathcal{H}(y(t))$ est constante sur l'intervalle I.

On suppose à partir de maintenant qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall y \in \mathbf{R}^{2d},\ \mathcal{H}(y) \geqslant C\|y\|^2,$$

où $\| - \|$ désigne la norme euclidienne standard sur $\mathbf{R}^{2d}$.

5. Montrer alors que le système hamiltonien (8) admet une et une seule solution définie sur $\mathbf{R}$ avec les conditions initiales (9).

   Pour $y_0 \in \mathbf{R}^{2d}$ et $t \in \mathbf{R}$, on définit $\varphi_t(y_0)$ comme la valeur à l'instant t de la solution de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = J\,\nabla\mathcal{H}(y)$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

6. (a) On suppose $\mathcal{H}$ de classe $\mathcal{C}^k$ pour un $k \geqslant 2$.
Que peut-on en déduire sur la régularité de la fonction $(t, y) \mapsto \varphi_t(y)$ définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2d}$?

   (b) Pour $t \in \mathbf{R}$ et $y \in U$, on pose $\Psi_t(y) := (\nabla\varphi_t)(y)$.
Montrer que Ψ_t est bien définie et que pour tout $y \in \mathbf{R}^{2d}$, la fonction $t \mapsto \Psi_t(y)$ est solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Psi_t(y)}{\mathrm{d}t} &= J\,\nabla^2\mathcal{H}(\varphi_t(y))\,\Psi_t(y), \\[2ex] \Psi_0(y) &= I_{2d}, \end{cases}$$

   avec $\nabla^2\mathcal{H} = \left(\dfrac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y_j\,\partial y_i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2d}$ et I_{2d} la matrice identité de $M_{2d}(\mathbf{R})$.

   (c) Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}^{2d}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Psi_t(y)^T J\,\Psi_t(y)) = 0$ et en déduire que, pour tout réel t, l'application $y \mapsto \varphi_t(y)$ est symplectique.

   (d) Montrer que $\det \Psi_t(y) = 1$ pour tout réel t et tout $y \in \mathbf{R}^{2d}$.

   (e) Pour $t \in \mathbf{R}$, montrer que φ_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^{2d}$ sur $\mathbf{R}^{2d}$.

   (f) Soit $f : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^{2d}$.
Montrer que pour tout réel t,

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^{2d}} f(\varphi_t(x))\,\mathrm{d}x.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 10 0250 – D'après documents fournis