

SESSION 2011

---

AGRÉGATION  
CONCOURS EXTERNE

Section : **SCIENCES PHYSIQUES**  
Option C : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

**COMPOSITION DE PHYSIQUE**

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

L'utilisation des ultrasons de puissance de forte intensité et de fréquence entre 16 et 1000 kHz, dans un liquide a des effets physiques et chimiques. Parmi les phénomènes physiques, on peut citer bien-sûr la déformation de la surface, l'échauffement du liquide ou le mouvement d'ensemble engendré. Cependant vient s'ajouter un phénomène important très exploité en physico-chimie : la cavitation ultrasonore. Elle est similaire à la cavitation hydrodynamique observable aux abords des hélices de bateaux. Elle consiste en l'apparition et l'oscillation radiale de bulles de gaz ou de vapeur dans un liquide soumis à une dépression. En effet, si la pression devient inférieure à la pression de vapeur saturante, une bulle peut naître au sein du liquide. Ce phénomène peut être dû à l'écoulement de fluides (cavitation hydrodynamique) ou à la propagation d'une onde acoustique (cavitation acoustique). La première est un phénomène que l'on cherche à éviter car elle est à l'origine de l'érosion des hélices. En revanche, la seconde est un phénomène recherché en sonochimie. En effet, l'implosion des bulles près des interfaces permet d'activer des réactions chimiques en générant du mélange et de l'érosion. La cavitation a aussi des effets chimiques tels que la création de radicaux qui modifient les mécanismes de certaines réactions chimiques. Tout comme les ultrasons peuvent améliorer le transfert de matière lors de réactions polyphasiques via la cavitation, ils peuvent aussi augmenter les transferts thermiques.

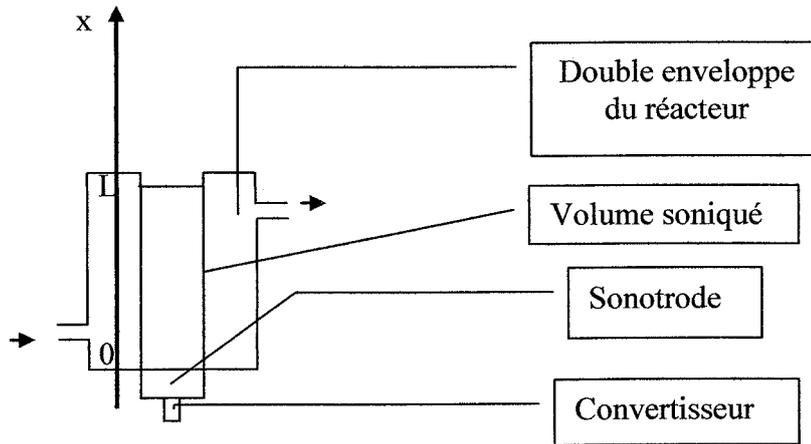
L'objectif du problème est d'étudier ce second type de cavitation et les effets induits sur le transfert de matière et le transfert thermique. On étudie dans une première partie la propagation de l'onde ultrasonore dans un liquide. Le liquide étant ainsi soumis à des fluctuations de pression, les bulles de cavitation se forment à partir d'inclusions de gaz-vapeur piégées dans les microfissures de surface des parois et des impuretés en suspension dans le liquide. La deuxième partie s'intéresse à la formation et au devenir de ces bulles. La troisième partie propose une méthode de mesure de l'effet des ultrasons sur le transfert de matière à une interface liquide solide. La dernière partie concerne le développement d'un nouveau type d'échangeur de chaleur appelé 'sonoéchangeur' qui utilise l'effet bénéfique des ultrasons sur le transfert thermique entre deux fluides.

Les différentes parties sont indépendantes.

## **Partie I : Etude de la propagation des ultrasons dans un liquide**

On considère un réacteur de type cup-horn. Il comporte une double enveloppe qui permet le contrôle de la température du réacteur. La vibration mécanique est émise par le convertisseur piézoélectrique et se propage dans la sonotrode qui transmet la vibration au milieu à soniquer. Celui-ci est considéré comme un fluide parfait de masse volumique  $\mu_0$ , de pression uniforme  $p_0$  et de vitesse particulière nulle en l'absence d'onde ultrasonore.

On écrit en présence d'ultrasons en  $M$  à  $t$  la pression totale:  $p(M,t) = p_0 + p_1(M,t)$ , la masse volumique  $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$  et la vitesse particulière  $\vec{v}(M,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M,t)$ . On appelle  $\chi_{s1}$  le coefficient de compressibilité du fluide.



Dans un premier temps, le but est d'établir l'équation de propagation des ondes ultrasonores dans le liquide et la forme de ces ondes. Pour cela, 3 équations de base linéarisées dans le cadre de l'approximation acoustique sont nécessaires : le bilan de masse(question 6), le théorème de la résultante cinétique(question 12) et une équation déduite d'une hypothèse thermodynamique(question 17). Des questions intermédiaires permettent d'aboutir à ces trois relations.

- 1- Que désigne  $\varphi = \iint_{M \in S} \mu \overrightarrow{v(M,t)} \cdot \overrightarrow{dS(M)}$  ? On donnera le nom et l'unité de cette grandeur. S étant une surface,  $\overrightarrow{v(M,t)}$  désignant la vitesse du fluide en un point M de S à l'instant t,  $\mu(M,t)$  désignant la masse volumique en un point M de S et  $\overrightarrow{dS(M)}$  qui est le vecteur surface associé à une surface élémentaire autour de M.
- 2- On considère un volume V quelconque, fixe et indéformable, délimité par S. Donner l'expression de la masse M(t) contenue dans V à l'instant t en fonction de  $\mu(M,t)$ , M étant un point de V. Faire de même en t+dt.
- 3- Quelle est l'expression de la masse  $\Phi$  qui est sortie de V via le débit massique pendant dt.
- 4- Effectuer un bilan de masse sur le volume V en traduisant le fait que la masse contenue dans V à t+dt est la masse contenue dans V à t moins la masse  $\Phi$  qui est sortie de V via le débit massique pendant dt.
- 5- En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, rappelé en annexe, en déduire la relation de conservation de la masse en 3 dimensions :  $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$
- 6- La linéariser par rapport aux variables  $\mu_1$  et  $v_1(M,t)$  en supposant  $|\mu_1(x,t)| \ll \mu_0$ .  
Ecrire cette même relation à une dimension :  $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$ .
- 7- Rappeler en une phrase ce qu'est l'accélération particulière  $\overrightarrow{a(M,t)}$  d'une particule de fluide de volume dt. Son expression est  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$  en fonction de la vitesse  $\overrightarrow{v(M,t)}$  : identifier les deux termes par leur nom et dans quel cas chacun s'annule.

- 8- Rappeler l'expression des forces de pression exercée par l'ensemble du fluide environnant sur une particule de fluide de volume élémentaire  $d\tau$ .
- 9- Enoncer le principe fondamental de la dynamique.
- 10- L'appliquer à la particule de fluide précédente et en déduire l'équation d'Euler en trois dimensions. On suppose négligeables les effets de la pesanteur.
- 11- La linéariser par rapport à la vitesse et à la pression acoustique  $p_1$  en supposant  $|p_1(x,t)| \ll p_0 : \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} p_1$ . On obtient l'équation d'Euler à 3 dimensions.
- 12- En déduire l'équation d'Euler linéarisée à une seule dimension.
- 13- L'évolution du fluide est supposée isentrope. On définit le coefficient de compressibilité isentrope  $\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$ . Détailler les unités dans  $\chi_S$ .
- 14- En déduire  $\chi_S$  en fonction de  $\mu$  et  $p$ .
- 15- On considère l'air comme un gaz parfait diatomique dont le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants est  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$  et la transformation subie par ce gaz comme isentrope. On peut donc appliquer  $pV^\gamma = Cte$ . Calculer numériquement  $\chi_S$  de l'air dans les conditions usuelles ( $p=1\text{bar}$ ).
- 16- Comparer et commenter les valeurs de  $\chi_S$  pour l'air et l'eau.
- 17- Démontrer la relation entre  $\mu_1$  et  $p_1$ ,  $\mu_0$ ,  $\chi_S$  avec les mêmes hypothèses que précédemment est :  $\chi_S = \mu_1 / \mu_0 p_1$
- 18- Déduire des questions 6, 12, 17 l'équation de propagation pour la surpression  $p_1(x,t)$  et préciser la célérité des ondes  $c : \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$
- 19- Calculer la célérité  $c_1$  de l'onde dans l'eau. Calculer aussi la célérité  $c_2$  dans l'air et comparer.
- 20- Quelle est l'équation de propagation pour la vitesse  $v_1(x,t)$  ?
- 21- Montrer que cette équation admet pour solution  $p_1(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ .
- 22- Caractériser cette onde, c'est-à-dire interpréter la forme générale de cette onde donnée à la question 21.
- 23- On considère une onde plane progressive se propageant selon les  $x$  croissants c'est-à-dire de la forme  $p_1 = f(t-x/c)$ . Déterminer à partir de l'équation d'Euler (12),

l'impédance acoustique, définie par  $Z = \frac{p_1}{v_1}$  en fonction de  $\mu_0$  et  $c$  ; puis de  $\mu_0$  et  $\chi_S$ .

- 24- On considère, de même une onde plane progressive se propageant selon les  $x$  décroissants. Ecrivez la forme de l'onde de pression  $p_1$  puis déterminer l'impédance acoustique.

On veut maintenant établir un bilan local d'énergie et déterminer la vitesse de propagation de l'énergie.

- 25- Que vaut l'énergie cinétique massique  $e_c$  associée à l'onde en fonction de la vitesse  $v$ ?

- 26- Donner l'expression de la célérité  $c$  en fonction de  $\mu_1$  et  $p_1$ .

- 27- Rappeler l'expression du travail des forces de pression pour une transformation infinitésimale réversible en fonction de  $p_1$  et  $V$ .

- 28- En déduire l'expression du travail des forces de pression par unité de masse pour une transformation infinitésimale réversible en fonction de  $c$ ,  $\mu_0$  et  $\mu_1$ .

On se limite au cas de propagation selon  $+Ox$ .

- 29- Le travail des forces de surpression entre l'état de repos et l'état de surpression  $p_1$  permet de définir une énergie potentielle massique  $e_{pot}$ .

En déduire l'expression de  $e_{pot}$  en fonction de  $c$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_0$ .

- 30- En utilisant les questions 23 et 26, dans le cas d'une onde plane progressive se propageant selon les  $x$  croissants, déterminer la relation entre  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $v_1$  et  $c$ .

- 31- En déduire l'expression de  $e_{pot}$  en fonction de  $v_1$  dans le cas d'une onde progressive.

- 32- En déduire la densité massique d'énergie totale  $e$  associée à l'onde sonore en fonction de  $v_1$  dans le cas d'une onde progressive.

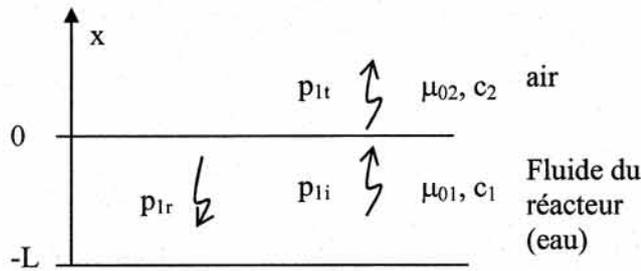
- 33- En prenant  $v_1$  sous la forme  $f(x-ct)$  et en utilisant les équations des questions 6, 12

et 26 montrer que  $div(p_1 \vec{v}_1) + \frac{\partial(\mu_0 e)}{\partial t} = 0$ .

- 34- Que traduit cette équation ? A quelle vitesse se propage l'énergie de l'onde ultrasonore

Dans le réacteur, l'onde est émise au fond par la sonotrode. Nous venons d'étudier sa propagation dans un fluide, notamment le fluide dont le réacteur est rempli. Voyons maintenant ce qui arrive à cette onde incidente lorsqu'elle arrive à la surface du liquide.

Nous étudions ce qui passe à l'interface entre le milieu soniqué et l'air de masse volumique  $\mu_0$ .  $c_2$  est la célérité des ondes acoustiques dans l'air. On considère une onde plane progressive incidente  $p_{1i} = p_i(x-c_1.t)$ . On appelle  $p_{1t}$  et  $p_{1r}$  les ondes transmises et réfléchies.



On veut montrer dans un premier temps que l'onde est pratiquement réfléchié totalement à l'interface eau-air.

- 35- Quelles sont les 2 grandeurs continues à l'interface air-eau, en  $x=0$  ?  
 36- Ecrire les 2 conditions aux limites en  $x=0$  en fonction des différentes surpressions  $p_{lr}$ ,  $p_{lt}$ ,  $p_{li}$  et des 2 impédances acoustiques  $Z_1$  de l'eau et  $Z_2$  de l'air.

- 37- En déduire les coefficients de réflexion  $r_p = \frac{p_{lr}(0,t)}{p_{li}(0,t)}$  et transmission  $t_p = \frac{p_{lt}(0,t)}{p_{li}(0,t)}$  en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$  les impédances des deux milieux.

- 38- Application numérique, calculer  $r_p$  et  $t_p$  pour l'interface air, eau. En tirer la conclusion sur la réflexion de l'onde à l'interface eau-air.  $Z_1=1.4 \cdot 10^6$  SI et  $Z_2=400$  SI

- 39- On appelle  $\vec{\Pi}$  le vecteur de Poynting sonore  $\vec{\Pi} = p_1 \vec{v}_1$ , déterminé questions 33 et 34, respectivement  $\vec{\Pi}_i$  pour l'onde incidente,  $\vec{\Pi}_r$  pour l'onde réfléchié et  $\vec{\Pi}_t$  pour l'onde transmise. Calculer numériquement les coefficients de réflexion  $R_p = \frac{\langle \Pi_r(0,t) \rangle}{\langle \Pi_i(0,t) \rangle}$  et de transmission  $T_p = \frac{\langle \Pi_t(0,t) \rangle}{\langle \Pi_i(0,t) \rangle}$  pour l'énergie en fonction de  $r_p$ ,  $t_p$  puis de  $Z_1$  et  $Z_2$ .

On étudie enfin la forme de l'onde de pression totale dans le liquide, résultant de l'onde incidente venant de la sonotrode et de l'onde réfléchié par l'interface.

- 40- On écrit l'onde incidente en notation complexe  $p_i(x-c_1.t) = p_0 \exp(j(\omega t - k_1 x + \varphi))$ . Donner l'expression de  $p_r$  en utilisant les conclusions sur  $r_p$  de la question 38. En déduire que l'onde totale dans l'eau est une onde stationnaire  $p_1(x,t)$ . Déterminer son module  $|p_1|$ .

- 41- Déterminer en fonction de  $\lambda$ , longueur d'onde, les valeurs de  $x$  pour lesquelles il y a des nœuds de pression.

- 42- Rappeler ce que valent  $p_1(0,t)$  et  $v_1(-L,t)$ .

- 43- En utilisant ces conditions limites en  $x=0$  et  $-L$ , déterminer  $\varphi$  et la relation entre  $L$  et  $\lambda$ .

On analyse maintenant le déplacement des tranches de fluide au sein du liquide soniqué du réacteur. On discute ensuite de la validité de l'hypothèse isentropique de cette première partie.

- 44- A l'aide d'une analyse dimensionnelle, montrer que le vecteur de Poynting donné dans la question 39 est la puissance acoustique par unité de surface.
- 45- A l'aide des questions 43, 40 et 11, trouver l'expression du champ de vitesse  $v_1(x,t)$  au sein du fluide, en exprimant sa valeur maximale en fonction de  $c_1$ ,  $\mu_0$  et  $p_0$ .
- 46- Comment se déplacent les tranches de fluide aux nœuds et aux ventres de pression ?
- 47- Sachant que le fluide est de l'eau à 20°C, calculer la vitesse maximale des tranches de fluide si l'on émet une surpression d'amplitude  $p_0 = 10$  Pa.
- 48- En déduire la valeur de l'excursion maximale des tranches de fluide.
- 49- Déterminer la valeur moyenne de l'intensité ou puissance acoustique par unité de surface d'une telle onde.
- 50- Est-elle importante ? On donne la valeur du seuil d'audibilité :  $I_{\text{mini}} = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ .
- 51- Que pensez-vous de l'hypothèse isentropique pour l'écoulement du fluide ?
- 52- En réalité, une sonotrode envoie des ondes acoustiques beaucoup plus intenses. Dans le cas où  $p_0 = 1,0 \cdot 10^4$  Pa, calculer la valeur moyenne de l'intensité acoustique au sein du fluide.
- 53- Commenter brièvement le cas réel.

## **Partie II : étude de la cavitation**

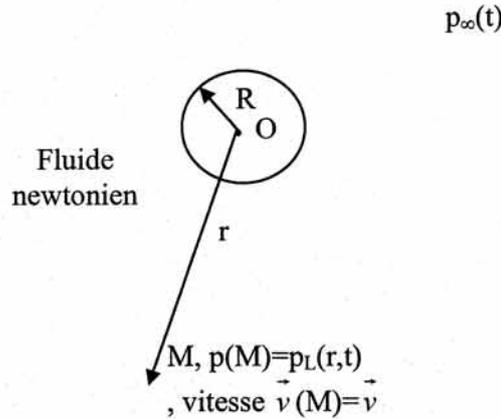
**Les parties A et B sont indépendantes.**

On s'intéresse maintenant au liquide soumis à l'onde de pression précédente. Soumis aux fluctuations de pression, des bulles de cavitation se forment. Lorsqu'une poche de gaz est soumise à une phase de dépression, son volume augmente et peut donner naissance à une cavité dont l'évolution dépend du champ de pression acoustique auquel elle est soumise. Soit les bulles se dissolvent rapidement, soit les bulles sont instables et le volume de la cavité fluctue en fonction de la pression. Le but de cette partie est l'étude d'une telle bulle.

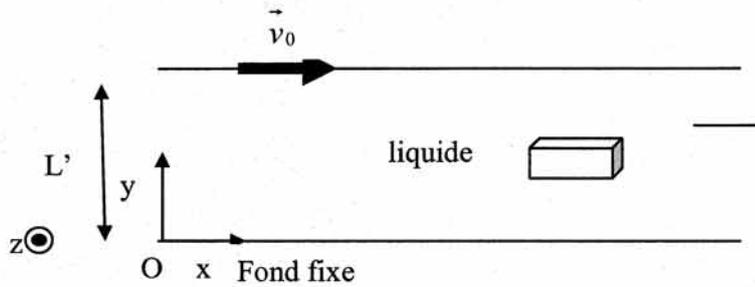
### **Partie A : Mécanique des fluides et évolution d'une bulle**

On considère une bulle de vapeur sphérique de centre O fixé et de rayon  $R(t)$  variable en fonction du temps  $t$ . Elle se trouve dans un liquide newtonien supposé incompressible, au repos à l'infini de la bulle. On néglige les forces volumiques extérieures qui agissent sur le liquide et la vapeur est considérée comme fluide parfait. La pression est uniforme dans la bulle. On appelle  $p_\infty(t)$  la pression du liquide loin de la bulle. Elle vaut  $p_0$  à  $t=0$ .  $p_L(r,t)$  la pression dans le liquide en M tel que  $OM=r$  à l'instant  $t$ .

**Tournez la page S.V.P.**



54- Avant de s'intéresser au problème de la bulle, nous voulons déterminer la forme de la force de viscosité. Pour cela, on se place dans un cas simple. On considère un écoulement de cisaillement :



Un liquide newtonien est compris entre deux plaques, l'une fixe et l'autre tractée à vitesse constante  $\vec{v}_0$  par un opérateur. Expérimentalement, on remarque que la force que l'opérateur doit exercer sur la plaque pour maintenir la vitesse constante est proportionnelle à  $v_0$ , S, surface de la plaque et inversement proportionnelle à  $L'$ , écartement entre les plaques. Le coefficient de proportionnalité noté  $\eta$  est appelé viscosité dynamique du liquide :  $\vec{F} = \eta \frac{v_0}{L'} S \vec{u}_x$ .

On considère une surface  $dS$  élémentaire parallèle au plan  $xOz$  située en  $y_0$  quelconque entre 0 et  $L'$ . En déduire l'expression de la force de viscosité  $\overline{dF}_i(y_0)$  exercée par le fluide situé en  $y > y_0$  sur la surface  $dS$  en fonction de  $\eta$ ,  $dS$  et d'une dérivée de la vitesse .

55- On considère une cellule de fluide parallélépipédique élémentaire située entre  $y$  et  $y+dy$ . Calculer la résultante des forces  $\overline{dF}_{vis}$  de viscosité sur cette particule. En déduire la densité volumique de force de viscosité  $\overline{f}_{vis}$ .

Ce résultat peut aussi s'écrire  $\overline{f}_{vis} = \eta \Delta \vec{v}$ ,  $\Delta \vec{v}$  désignant le laplacien du vecteur vitesse. On admettra que cette formule est vraie pour tout fluide newtonien.

On revient au problème de la bulle de cavitation de rayon  $R(t)$  variable. L'objectif des questions suivantes est de déterminer l'évolution générale, aussi bien du rayon de la bulle et de la pression.

56- Justifier par des raisons de symétrie et d'invariance que les champs de vitesse  $\vec{v}$  et de pression  $p$  sont de la forme :

$$\vec{v} = v(r,t)\vec{u}_r \text{ et } p = p(r,t).$$

57- Déterminer la vitesse  $\vec{v}$  en fonction de  $R$ ,  $r$  et  $\dot{R}$  en utilisant l'équation de conservation de la masse et l'incompressibilité de l'écoulement :  $\text{div } \vec{v} = 0$ . On pourra écrire la conservation du débit notamment entre les sphères de rayon  $r$  et de rayon  $R$  ou utiliser l'expression de la divergence donnée en annexe.

58- Dériver l'expression précédente par rapport à  $r$ .

59- Faire l'inventaire des forces qui s'appliquent sur une particule de liquide de volume  $d\tau=1$  en rappelant la densité volumique de chaque force. Les effets de la pesanteur seront toujours négligés.

60- Ecrire le principe fondamental de la dynamique à une particule de liquide de volume  $d\tau=1$ , appelé aussi équation de Navier Stokes. Les effets de la pesanteur seront toujours négligés.  $\mu_L$  est la viscosité du liquide. (aide en annexe)

61- Projeter la relation de Navier Stokes sur  $\vec{u}_r$ , vecteur radial. Les opérateurs en coordonnées sphériques sont donnés en fin d'énoncé.

62- Montrer que les termes dus à la viscosité dans l'équation de Navier Stokes s'annulent en utilisant le résultat obtenu aux questions 57, 58.

63- En déduire une relation entre les dérivées de  $v$  et de la pression  $p$  :

$$\mu_L \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right) = - \frac{\partial p}{\partial r}$$

64- Rappeler la définition d'une ligne de courant. Quelle est la forme des lignes de courant dans le cas de la bulle de cavitation de rayon variable.

65- En utilisant les questions 57 et 63 et en intégrant sur une ligne de courant entre  $r=R$  et  $r$  tendant vers l'infini, déduire l'équation de Rayleigh :

$$p_L(R,t) = \frac{1}{2} \mu_L (3\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}) + p_\infty(t).$$

66- Etablir la relation générale dans le cas statique entre la pression  $p_1$  à l'intérieur,  $p_2$  à l'extérieur d'une bulle, avec  $R$  rayon de la bulle et  $\sigma$  la tension de surface. Cette loi est appelée loi de Laplace :  $p_1 - p_2 = \frac{2\sigma}{R}$ .

67- On veut généraliser la relation précédente au cas du problème. On appelle  $\Gamma$  le tenseur des contraintes (force par unité de surface) pour un fluide newtonien dont les éléments sont donnés en fin d'énoncé. On généralise l'expression de la question 66 en remplaçant  $p_1$  par  $(\Gamma_{rr})_{\text{gaz}}$  et  $p_2$  par  $(\Gamma_{rr})_{\text{liquide}}$ , à l'interface de la bulle coté intérieur ou extérieur.  $\Gamma_{rr}$  composante dans la direction  $\vec{u}_r$  des contraintes qui s'exercent sur les surfaces de vecteur normal  $\vec{u}_r$ . En explicitant  $(\Gamma_{rr})_{\text{gaz}}$  et  $(\Gamma_{rr})_{\text{liquide}}$  et en utilisant la relation 57, déduire de la question précédente l'expression de la pression  $p_L(R,t)$  en fonction de la pression de vapeur saturante  $p_v$ , de la viscosité dynamique  $\eta$ , de la tension de surface  $\sigma$ , de  $R$  et de  $\dot{R}$ .

On néglige maintenant le terme de tension de surface et la pression de vapeur saturante devant  $p_\infty$ . On considère le fluide comme parfait.

68- Ecrire l'équation de Rayleigh donnée à la question 65 sous la forme :

$$R^2 \dot{R}(p_L(R,t) - p_\infty(t)) = \frac{1}{2} \mu_L \frac{d}{dt}(R^3 \dot{R}^2)$$

69- Intégrer cette équation entre le temps où  $R$  est maximum et un temps  $t$  quelconque lors de la phase de contraction. Donner  $\dot{R}$  en fonction de  $p_0$ ,  $\mu_L$ ,  $R$  et du rayon maximal de la bulle noté  $R_{\text{max}}$ . On suppose que  $p_\infty = p_0$  à tout instant et  $p_L(R,t) = p_v(R,t)$  négligeable.

70- En déduire le temps  $\tau$  d'implosion de la bulle lorsque  $R$  passe de  $R_{\text{max}}$  à 0. On posera  $x = \frac{R}{R_{\text{max}}}$ ,  $Y = x^3$ ; On donne  $\int_0^1 Y^{-\frac{1}{6}}(1-Y)^{\frac{1}{2}} dY \approx 2,24$

71- Calculer numériquement  $\tau$  avec  $R_{\text{max}} = 1\text{mm}$  dans l'eau à  $20^\circ\text{C}$  et  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ .

72- L'écoulement est incompressible. Montrer que cela a pour conséquence qu'il existe  $\Phi$  tel que  $v = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ . Déduire alors  $\Phi$  de (57).

73- En déduire aussi que l'équation du mouvement de la question 63 peut s'écrire  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p_L}{\mu_L} = \text{cte}$ .

74- En utilisant la relation précédente entre  $r = R$  et  $r$  quelconque et en y injectant les expressions de  $v$  de la question 57, de  $\Phi$  de la question 72 et de  $p_L$  de la question 65, démontrer que la distribution de pression est dans le liquide de la forme :

$$\frac{p_L(r,t)}{p_0} = 1 + \frac{R}{3r}(Z-4) - \frac{R^4}{3r^4}(Z-1) \text{ avec } Z = \frac{R_{\text{max}}^3}{R^3}$$

75- En déduire à quelle distance  $r^*$  de  $O$  la surpression est maximale ?

76- Estimer la surpression maximale lorsque la bulle a implosé jusqu'à un dixième de son rayon maximal.

On a ainsi déterminé le temps d'implosion d'une bulle et la pression maximale atteinte dans la bulle sans gaz résiduel.

**Partie B : Bulle avec gaz résiduel**

On étudie maintenant le cas d'une bulle de pression uniforme qui renferme un gaz résiduel obéissant à loi des gaz parfaits. On considère qu'après une phase de croissance à partir d'un état d'équilibre, la bulle atteint un rayon maximal  $R_{max}$ . On s'intéresse à la phase de contraction.

Hypothèses :

- Le gaz subit une transformation adiabatique réversible lors de cette contraction ;
- Le liquide est parfait ;
- le terme de tension interfaciale est négligé ;
- $p_v$ , pression de vapeur saturante est négligée devant la pression du gaz  $p_g$  ;
- $p_\infty(t) = p_0$  à tout instant ;
- $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  est constant.  $c_p$  et  $c_v$  étant les capacités calorifiques à pression et volume constants.

77- Démontrer la relation d'adiabaticité dite de Laplace  $p_g V^\gamma = cte$  entre la pression du gaz  $p_g$  et le volume  $V$  qu'il occupe lors de la transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait.

78- En déduire la relation entre  $p_{g0}$  pression dans la bulle quand le rayon est maximal,  $p_g$ ,  $R_{max}$ ,  $R$  et  $\gamma$ .

On néglige le terme de tension interfaciale et la pression de vapeur saturante  $p_v$  alors  $p_L(R,t) = p_g$ .

79- A partir de l'équation de Rayleigh de la question 65 et de l'équation 78, déterminer lors de la contraction de la bulle la nouvelle expression de

$$\dot{R} = -\sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_{g0}}{\mu_L(1-\gamma)} (Z^\gamma - Z) - \frac{2}{3} p_0 \frac{1-Z}{\mu_L}}. \text{ On posera } Z = \frac{R_{max}^3}{R^3}.$$

Aide : on pensera à multiplier l'équation par  $2R^2 \dot{R}$  avant d'intégrer entre l'instant où  $R$  est maximal et un instant quelconque.

80-  $p_{g0}$  est faible devant  $p_0$ . On a  $\left(\frac{p_0}{p_{g0}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\gamma-1)^{\frac{3\gamma}{3(\gamma-1)}} > 1$ . Montrer qu'une valeur

approchée du rayon minimal de la bulle  $R_{min}$  est :  $R_{max} \left(\frac{p_{g0}}{p_0(\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{3(\gamma-1)}}$

On utilisera  $\frac{1-Z^{\gamma-1}}{1-Z} \approx Z^{\gamma-2}$  pour  $Z \gg 1$

81- En déduire l'expression des maxima de températures et de pression du gaz ( $T_{gmax}$  et  $p_{gmax}$ ) en fonction de la température et de la pression lorsque  $R=R_{max}$  ( $T_{g0}$  et  $p_{g0}$ )

Déterminer l'expression de la durée de contraction de la bulle  $\tau'$  (lorsque R passe de  $R_{\max}$  à  $R_{\min}$ ) en fonction de  $R_{\max}$ ,  $\mu_L$ ,  $p_0$  et  $\delta = \frac{p_{g0}}{p_0}$  pour  $\delta$  faible. On posera  $x = \frac{R}{R_{\max}}$ ,  $\gamma=4/3$ .

On donne  $\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{x_{\min}}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{-x^4 + (3\delta + 1)x - 3\delta}} \approx 0,915(1 + \delta)$  pour  $\delta$  faible.

82- Comparer à l'expression de la partie A.

83- Applications numériques :

Calculer  $p_{g\max}$  et  $T_{g\max}$  pour  $P_0=105\text{Pa}$ ,  $p_{g0}=6,103\text{Pa}$  et  $T_{g0}=300\text{K}$ . On montre que plus le rapport de compression  $Z$  est grand, plus le maximum de pression se rapproche de la surface de la bulle. Au taux maximum de compression, la pression dans le liquide est alors égale à la pression dans la bulle d'où les dommages causés par la cavitation.

### Partie C Examen des hypothèses du modèle. Thermodynamique

**Les questions 88 à 93 sont totalement indépendantes des questions 84 à 87 qui demandent la compréhension de la partie B et qui ont pour but de déterminer les limites de l'hypothèse d'incompressibilité.**

84- Montrer que l'expression établie en question 69 n'est plus représentative de la réalité lorsque R tend vers 0.

85- Il faut en effet alors remettre en cause l'hypothèse d'un liquide en écoulement incompressible lorsque l'interface devient proche de la vitesse du son. On définit le

nombre de Mach à la surface du liquide par  $M = \frac{\dot{R}}{c}$  avec c la vitesse du son dans le liquide. On peut en fait considérer que l'hypothèse d'incompressibilité du liquide est valide si  $M \leq 0,3$ .

Par différenciation de  $\dot{R}^2$  obtenue précédemment montrer que :

$$\ddot{R} = \frac{-p_0 Z}{R \rho_L} \left(1 - \frac{p_{g0}}{p_0(1-\gamma)} (1 - \gamma Z^{\gamma-1})\right) \text{ (pour } \dot{R} \neq 0 \text{)}.$$

86- En déduire l'expression du maximum de vitesse en valeur absolue de  $\left| \dot{R}_{\max} \right|$ , puis de  $M_{\max}$ .

Aide : on simplifiera  $\left| \dot{R}_{\max} \right|$  en tenant compte du fait que  $p_{g0} \ll p_0$ .

87- En déduire dans le cas de l'eau la valeur minimale de  $p_{g0}/p_0$  telle que l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement liquide soit applicable pour  $p_0=10^5 \text{ Pa}$  ( $\gamma=4/3$ ).

**Les questions 88 à 93 sont totalement indépendantes de ce qui précède. Le but de ces questions est l'étude des gaz de Van der Waals.**

88- Le comportement du gaz a été décrit par la loi des gaz parfaits.

Cette loi est-elle vraie à tout instant lors du phénomène de cavitation ?

On peut alors envisager d'utiliser des modèles plus complexes représentatifs du comportement d'un gaz réel, le plus simple étant le modèle de Van der Waals :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT \text{ pour une mole}$$

**89-** Expliquer la signification de la pression de cohésion  $p_{\text{coh}} = \frac{a}{V^2}$  et du covolume  $b$ . On expliquera notamment la différence entre les hypothèses du modèle gaz parfait et du modèle de Van der Waals puis on expliquera l'expression de  $p_{\text{coh}}$ .

**90-** Tracer le diagramme donnant la pression  $p$  en fonction du volume molaire  $v$  pour un changement d'état liquide vapeur d'un corps pur. On y fera apparaître notamment l'allure des isothermes d'Andrews en la justifiant brièvement et en se rappelant que les deux premières dérivées de la pression  $p$  par rapport au volume molaire  $v$  au point critique sont nulles. On fera aussi apparaître le nom des différentes courbes, le point critique et l'état du corps pur dans les différentes zones.

**91-** Déduire le covolume  $b$  et  $a$ , produit de la pression de cohésion par le volume  $v^2$  en fonction de la pression  $p_c$  et la température  $T_c$  au point critique à partir des valeurs des dérivées au point critique.

**92a-** Rappeler la première identité thermodynamique donnant la différentielle de l'enthalpie  $U$ .

**92b-** Rappeler la définition mathématique de l'énergie libre  $F$ .

**92c-** Déduire de 92a et 92b la différentielle de  $F$ .

**92d-** En déduire  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$  en fonction de  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$  en utilisant le théorème de Schwarz.

**92e-** Démontrer alors que l'entropie d'un gaz réel s'écrit :

$$S(T, P) - S^*(T, P) = \int_{\infty}^V \left[ \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - \frac{R}{V} \right] dV + R \ln\left(\frac{pV}{RT}\right) \text{ avec } S^* \text{ l'entropie d'un gaz parfait}$$

On exprimera

$$\begin{aligned} S(T, P) - S^*(T, P) &= [S(T, P) - S(T, P')] - [S^*(T, P) - S^*(T, P')] \\ &= [S(T, V) - S(T, V')] - [S^*(T, V) - S^*(T, V')] \text{ et en faisant tendre } P' \text{ vers } \\ &0 \text{ c'est-à-dire } V' \text{ vers l'infini.} \end{aligned}$$

**93-** En utilisant les questions 92 et l'équation de Van der Waals,

**93a-** Démontrer que  $S - S^* = R \ln\left(\frac{p}{p + \frac{a}{v^2}}\right)$

**93b-** Différencier et déduire la relation d'adiabaticité :

$$p^\gamma \left(p + \frac{a}{v^2}\right)^{1-\gamma} V^\gamma = \text{Constante} \text{ lors de la transformation adiabatique réversible d'un gaz de}$$

Van der Waals. Quelle loi correspond à celle-ci pour les gaz parfaits ?

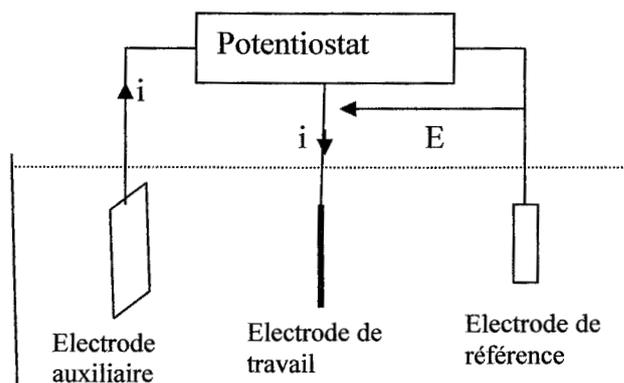
### **Partie III : Méthode électrochimique de mesure du transfert de matière**

On veut caractériser la cavitation par une méthode chimique. On utilise comme réaction modèle une réaction électrochimique limitée par le transfert de matière. Une telle réaction est encouragée par les effets mécaniques résultant de l'implosion des bulles au voisinage de l'électrode.

On étudie dans les questions qui suivent la réaction modèle choisie.

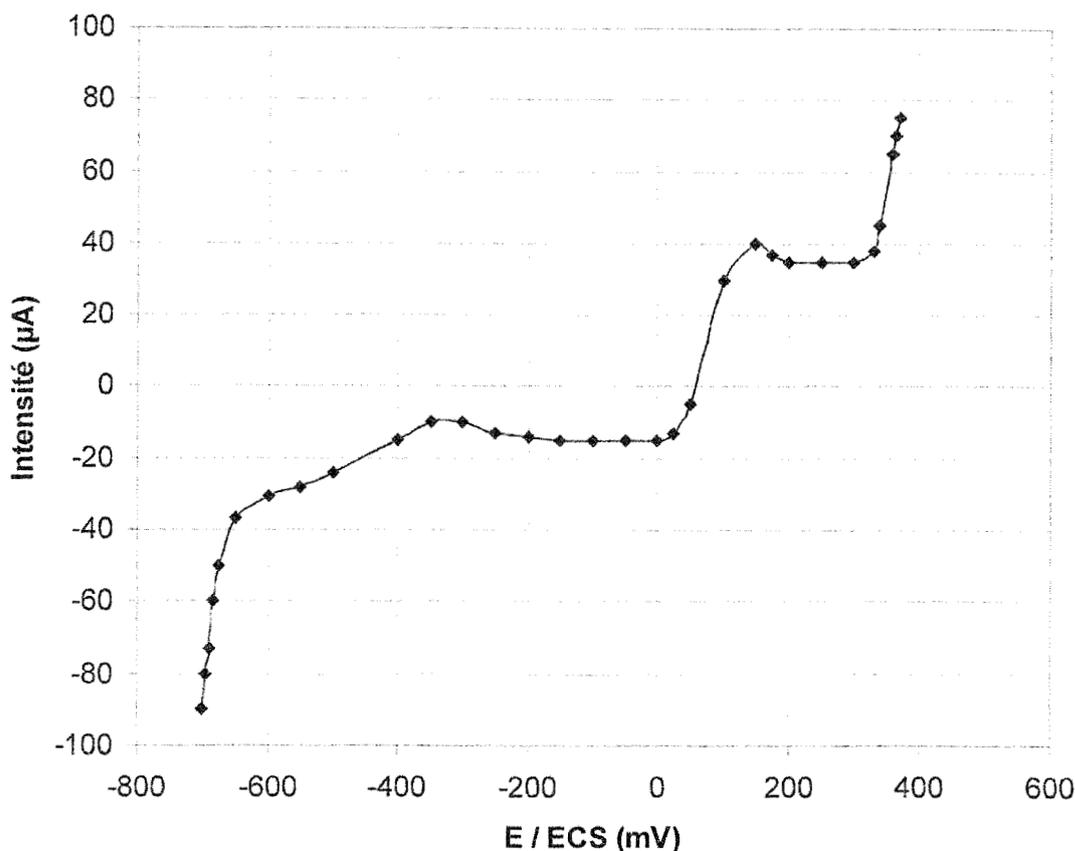
Le système électrochimique utilisé est le couple ferri/ferro cyanure de potassium ( $3K^+$ ,  $Fe(CN)_6^{3-}$ ) / ( $4K^+$ ,  $Fe(CN)_6^{4-}$ ) ( $5.10^{-3}/5.10^{-3} \text{ molL}^{-1}$ ) en milieu alcalin (soude 0,5 M).

Pour comprendre le comportement d'un système électrochimique, il est utile de tracer une courbe intensité-potentiel, où est porté en abscisse le potentiel de l'électrode mesuré par rapport à une électrode de référence et en ordonnée l'intensité traversant cette électrode. Pour cela, on utilise un montage classique à trois électrodes.



Dans un tel montage, l'électrode dont on veut déterminer la courbe intensité-potentiel est l'électrode de travail. L'autre réaction d'oxydoréduction a lieu à l'électrode auxiliaire. La troisième est l'électrode de référence connectée à une entrée de forte impédance, non parcourue par un courant pour que son potentiel reste constant. Ces trois électrodes sont reliées à un potentiostat-galvanostat.

On veut se placer à un potentiel d'électrode  $E$  tel que la réaction mise en jeu à l'électrode de travail soit la réduction du ferricyanure et que la diffusion des ions ferricyanures soit limitante. Afin de déterminer la valeur de la tension à imposer entre l'électrode de travail et celle de référence, on modifie progressivement la valeur de la tension de consigne contrôlée par le potentiostat et on enregistre l'intensité correspondante :



**94a-** Rappeler la définition d'un oxydant, d'un réducteur. Donner un exemple pour chacun.

**94b-** Comment s'appelle une espèce ayant à la fois des propriétés oxydantes et réductrices. Donner un exemple et les deux couples associés.

**94c-** Que signifie, au niveau de la structure de l'atome,  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  ? Comment nomme-t-on les deux nombres donnés ?

**94d-** Donner la structure électronique du fer et en déduire sa position dans la classification périodique. A quel bloc et quelle famille appartient-il ?

**94e-** Les ions  $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$  /  $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$  sont formés à partir de l'ion cyanure et respectivement des ions  $\text{Fe}^{3+}$  et  $\text{Fe}^{2+}$ . Donner le nombre d'oxydation du fer dans les quatre ions précédents.

**94f-** Ecrire la réaction de formation de ces deux complexes.

**94g-** Les anciens noms de ces ions sont le ferri/ferrocyanure. Donner leurs noms dans la nouvelle nomenclature.

**94h-** Donner la formule de la soude. Expliquer le rôle de la soude.

**94i-** Commenter le voltampérogramme de la figure précédente en écrivant les 4 équations de réaction d'oxydoréduction correspondantes à :

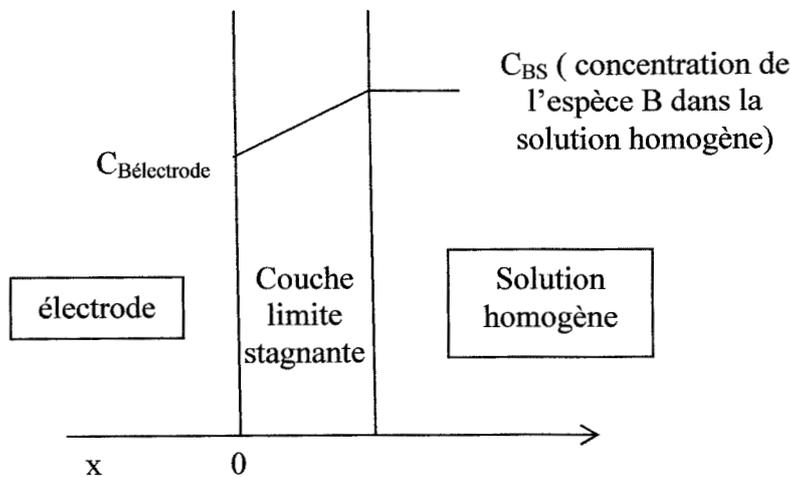
- l'asymptote verticale à  $-700\text{mV}$  (**réduction de l'eau**),
- pour le palier de diffusion entre  $-200$  et  $0\text{mV}$  (**réduction des ions ferricyanure**),
- pour le palier de diffusion entre  $200$  et  $300\text{mV}$  (**oxydation des ions ferrocyanure**)
- et l'asymptote à  $380\text{mV}$  (**oxydation de l'eau**).

**94j-** Quel(s) potentiel(s) E peut-on fixer pour que la diffusion des ions ferricyanures soit limitante pour la réduction des ions ferricyanure ?

**94k-** Alors le courant  $i_L$  s'appelle courant limite de diffusion quelle est sa valeur d'après le voltampérogramme?

Nous allons maintenant calculer le coefficient de transfert de matière à l'interface électrode-solution.

On modélise le transfert de matière par le modèle de film stagnant d'épaisseur  $\delta$ . Il repose sur la formation d'un film au contact de la surface de l'électrode, lorsque la solution est soumise à un régime de convection hydrodynamique, d'une couche limite stagnante par rapport à l'électrode. En régime stationnaire, on considère que cette couche a une épaisseur  $\delta$  constante. Ainsi en dehors de la couche limite, la solution est homogène grâce à la convection. Dans la couche limite que les substances dissoutes doivent traverser pour atteindre l'électrode, le transfert se fait par diffusion pure (perpendiculairement à l'électrode) :



**95-** La densité de flux de la substance B notée  $N_B$  en  $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$  qui diffuse à travers la couche limite est décrite par la loi de Fick :  $\vec{N}_B = -D\overrightarrow{\text{grad}}C_B$ . On notera  $D$  le coefficient de diffusion de l'espèce B et  $C_B$  la concentration de l'espèce B. Justifier son unité.

**96a-** Exprimer  $N_B$  en fonction de  $D$ ,  $C_{BS}$ ,  $C_{B\text{électrode}}$  et  $\delta$ .

**96b-** Exprimer la densité de courant  $J$  en fonction de  $F$  constante de Faraday et  $N_B$  puis l'intensité du courant limite de diffusion  $i_L$  en fonction de  $A$  surface de l'électrode,  $F$  constante de Faraday,  $k_d = \frac{D}{\delta}$  coefficient de transfert de matière liquide-électrode et  $C_{BS}$  concentration de B espèce dissoute au sein du liquide. ( $C_{B\text{électrode}}$  concentration de B espèce dissoute à la surface de l'électrode faible négligeable pour un courant maximal égal au courant limite de diffusion)

**96c-** On donne  $A = 1,02.10^{-5} \text{m}^2$ , calculer  $k_d$  et  $\delta$ .

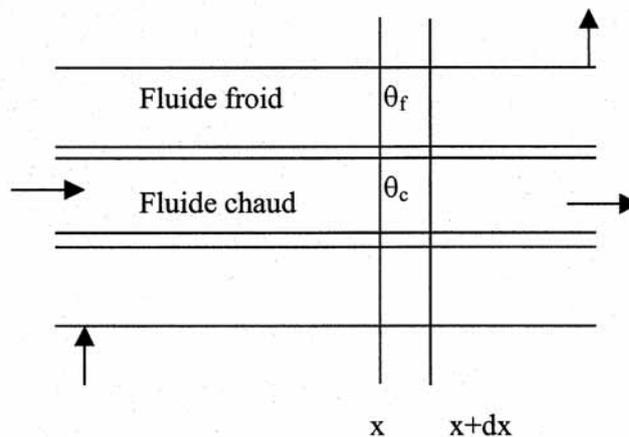
En calculant ce coefficient  $k_d$  de transfert de matière avec différentes puissances et fréquences d'ultrasons, on peut ainsi quantifier l'effet des ultrasons sur la réaction chimique. Plus ce coefficient est élevé, moins le transfert de matière est limitant.

**Partie IV : amélioration du coefficient d'échange global d'un échangeur par champ ultrasonore**

Voyons maintenant l'effet des ultrasons sur le transfert thermique entre deux fluides séparés par une paroi. La comparaison des valeurs des flux échangés et d'un coefficient d'échange global défini plus tard dans le texte permet de quantifier l'effet des ultrasons selon leurs puissances et dans différentes conditions hydrodynamiques.

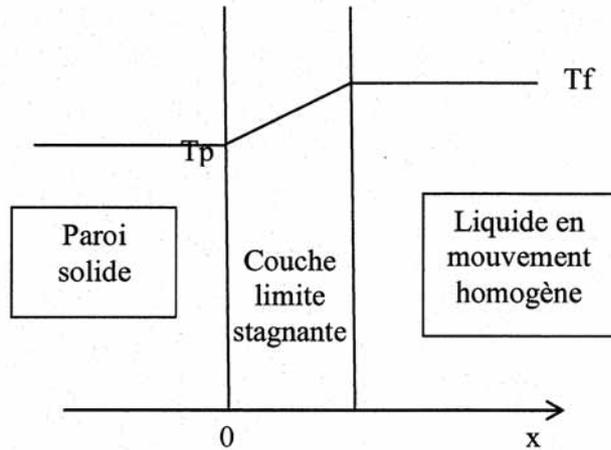
Pour cela, nous allons d'abord déterminer les relations nécessaires à l'étude d'un échangeur simple sans ultrasons.

On considère un échangeur de chaleur tubulaire dans lequel on fait circuler deux fluides. Le fluide chaud circule à l'intérieur des tubes (rayon intérieur  $r_i$ , rayon extérieur  $r_e$ ) et le fluide froid à l'extérieur. En régime permanent, les débits de fluides sont constants et la température en un point est indépendante du temps.



On s'intéresse à un élément de volume de l'appareil compris entre les cotes  $x$  et  $x+dx$ .  $\theta_c$  et  $\theta_f$  sont les températures moyennes respectives des fluides chaud et froid dans cet élément de volume.  $\Delta\theta = \theta_c - \theta_f$

- 97- Rappeler les trois modes de transfert thermique dans le cas général et les expliquer.
- 98- On considère l'interface entre un fluide en mouvement à la température  $T_f$  et une paroi à la température  $T_p$  (schéma ci-dessous). Dans la couche limite, quel mode de transfert thermique est utilisé ?
- 99- Exprimer la densité de flux thermique en  $x$  quelconque dans cette couche en fonction de conductivité  $\lambda_f$  du fluide et du gradient de température. (loi de Fick)
- 100- Puis en appliquant le premier principe en régime permanent à une tranche comprise entre  $x$  et  $x+dx$ , déduire que le profil de température est linéaire dans la couche limite d'épaisseur  $\delta$  et que l'on peut écrire la densité de flux sortante  $\varphi = h(T_p - T_f)$ . On exprimera  $h$  en fonction de conductivité du liquide  $\lambda_f$  et de  $e$  épaisseur de la couche limite. Cette loi est appelée loi de Newton et est utilisée dans la suite.



101- Expliquer quelles sont les 3 résistances mises en jeu lors du transfert thermique entre les deux fluides dans l'échangeur et quels phénomènes physiques de la question 97 y sont associés?

On appelle  $h_i$  et  $h_e$  les coefficients superficiels d'échange de la loi de Newton respectivement à l'intérieur et à l'extérieur des tubes,  $dA_i$  et  $dA_e$  les aires des surfaces mises en jeu dans l'élément de volume à l'intérieur et à l'extérieur des tubes.  $\lambda$  la conductivité thermique du matériau constituant les tubes.  $\theta_i$ ,  $\theta_e$  températures à la paroi coté intérieur ou extérieur des tubes.

- 102- Exprimer le flux thermique  $\delta\phi$  à travers la couche limite intérieure aux tubes en fonction de  $h_i$ ,  $dA_i$ ,  $\theta_c$  et  $\theta_i$ .
- 103- Exprimer le flux thermique  $\delta\phi$  à travers la couche limite extérieure aux tubes en fonction de  $h_e$ ,  $dA_e$ ,  $\theta_f$  et  $\theta_e$ .
- 104- Définir par analogie avec la résistance électrique la résistance thermique dans le cas général.
- 105- Déterminer la résistance thermique due à la conduction dans un des tubes cylindriques.

106- Exprimer le flux thermique à travers l'épaisseur des tubes en fonction de  $\lambda$ ,  $dA_{ml}$ ,  $e$ ,  $\theta_e$  et  $\theta_i$ .  $dA_{ml}$  est la moyenne logarithmique des surfaces  $dA_e$  et  $dA_i$  définie

$$\text{par } dA_{ml} = \frac{2\pi dx(r_e - r_i)}{\ln\left(\frac{2\pi dx r_e}{2\pi dx r_i}\right)}$$

$e = r_e - r_i$  épaisseur tube

107- Déterminer, en utilisant la conservation du flux, l'expression de la résistance thermique totale  $R_{th}$  dans l'échangeur en fonction de  $h_i$ ,  $h_e$ ,  $\lambda$ ,  $e$ ,  $dA_i$ ,  $dA_e$  et  $dA_{ml}$  moyenne logarithmique des aires  $dA_i$  et  $dA_e$  en utilisant les questions précédentes. Comment sont placées les 3 résistances au transfert les unes par rapport aux autres ?

108- Si les rayons intérieur  $r_i$  et extérieur  $r_e$  des tubes sont proches, on pose  $r_e = r_i + \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  faible devant  $r_i$  et  $r_e$ . Montrer que l'on peut alors assimiler  $dA_{ml}$  et  $dA_m$ , moyenne arithmétique de  $dA_i$  et  $dA_e$ .

109- Donner la nouvelle expression de  $R_{th}$ .

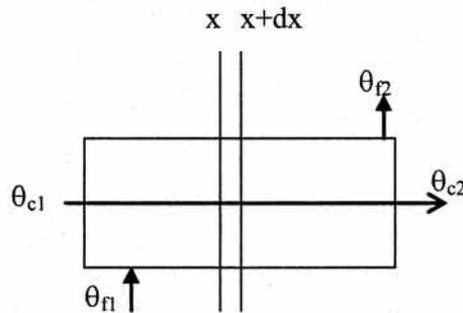
On définit maintenant les 3 coefficients d'échange globaux  $U$  tels que :

$$R_{th} = \frac{1}{U_i dA_i} = \frac{1}{U_e dA_e} = \frac{1}{U_m dA_m} \text{ selon l'aire de référence que l'on choisit.}$$

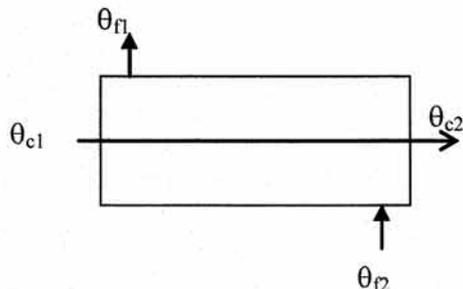
110- Déduire de l'expression de  $R_{th}$  trouvée en 109, l'expression de  $1/U_i$  et  $1/U_e$  en fonction de  $h_i$ ,  $h_e$ ,  $\lambda$ ,  $dA_i$ ,  $dA_e$  et  $dA_m$  moyenne arithmétique des aires  $dA_i$  et  $dA_e$  puis en fonction de  $h_i$ ,  $h_e$ ,  $\lambda$ ,  $r_i$ ,  $r_e$ .

On note par convention avec l'indice 1 les températures des fluides à l'extrémité par laquelle le fluide chaud entre et avec l'indice 2 les températures à l'autre extrémité. On appelle  $W_c$  et  $W_f$  les débits massiques respectivement des fluides chaud et froid et  $C_c$  et  $C_f$  les capacités calorifiques massiques.

On considère un échangeur dit à co-courant comme celui représenté dans la figure suivante. Les deux fluides entrent du même côté de l'échangeur.



111- Tracer l'allure des températures du fluide froid  $\theta_f$  et chaud  $\theta_c$  en fonction de  $x$ . On considère un échangeur dit à contre-courant comme celui représenté dans la figure suivante.



112- Tracer l'allure des températures  $\theta_f$  et  $\theta_c$  en fonction de  $x$ . Comparer les 2 échangeurs, quel est le plus efficace ?

On considère un élément de volume entre  $x$  et  $x+dx$ . On appelle  $\delta \dot{Q}$  le flux thermique échangé entre les deux fluides, c'est-à-dire perdu par le fluide chaud et gagné par le fluide froid dans cet élément de volume et  $dA$  l'aire d'échange correspondante de référence.

113- Ecrire  $\delta \dot{Q}$  en fonction de  $\Delta\theta = \theta_c - \theta_f$ , de  $U$  coefficient d'échange global et  $dA$  aire associée d'après la définition de  $U$  et de  $R_{th}$ . ( $U$  et  $dA$  peuvent représenter  $U_i$  et  $dA_i$  ou  $U_e$  et  $dA_e$  ou  $U_m$  et  $dA_m$ )

114- Ecrire  $\delta \dot{Q}$  en fonction de  $W_c$ ,  $C_c$  et  $d\theta_c$ .

115- Ecrire  $\delta \dot{Q}$  en fonction de  $W_f$ ,  $C_f$  et  $d\theta_f$ .

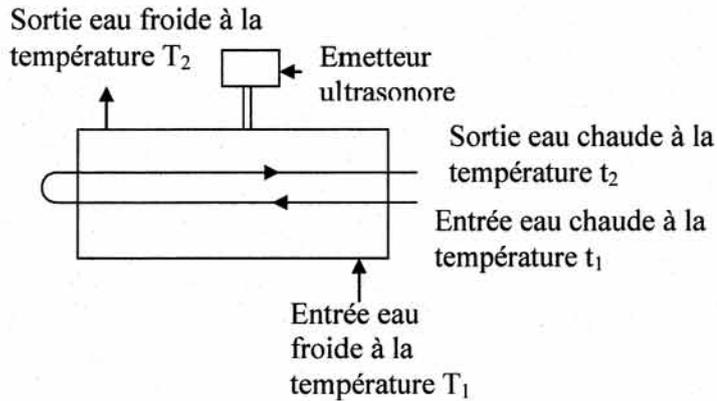
116- Puis déduire des 2 questions précédentes  $\delta \dot{Q}$  en fonction de  $W_c$ ,  $W_f$ ,  $C_f$ ,  $C_c$  et  $d\Delta\theta$ . On notera  $\Psi = \frac{1}{W_f C_f} + \frac{1}{W_c C_c}$ .

117- Déduire des questions 113 et 116, que  $\dot{Q}$ , le flux thermique échangé entre les deux fluides dans l'échangeur en fonction de  $U$ ,  $A$  et  $\Delta\theta_{ml}$  (moyenne logarithmique de  $\Delta\theta_1$  et  $\Delta\theta_2$ , voir annexe) peut s'écrire :  $\dot{Q} = UA\Delta\theta_{ml}$ . On considèrera  $U$  constant le long de l'échangeur.

Pour un échangeur multipasses, le fonctionnement est tantôt à co ou contre courant donc l'efficacité est comprise entre celle des appareils à co et contre courant. On écrit  $Q = U.A.Y.\Delta\theta_{ml}$ ,  $Y$  étant l'efficacité de l'appareil multipasse par rapport à un contre courant de référence, donné par des abaques.

Les différentes grandeurs et leurs relations étant établies, nous allons ensuite quantifier l'effet des ultrasons.

On considère le sonoéchangeur multipasses suivant. Il a été réalisé à partir d'un tube vibrant à une fréquence ultrasonore donnée (35kHz) appelé « sonitube SM35 » dans lequel circule un fluide. Le «sonitube » a une longueur de 240mm et un diamètre intérieur 20mm et fait office de calandre au sein de laquelle est inséré un tube coudé de diamètre intérieur 4mm, de diamètre extérieur 6 mm, offrant une aire d'échange de  $A=0,0063m^2$ . L'eau chaude est pompée afin d'alimenter l'échangeur coté tube. L'eau froide provient directement du réseau et circule coté calandre.



On obtient les résultats suivants en utilisant un débit d'eau chaude de  $\dot{m}_{chaud}=1,6 \text{ Lmin}^{-1}$  et un débit d'eau froide de  $\dot{m}_{froid}=0,75 \text{ Lmin}^{-1}$ :

$P_{US}$  puissance des ultrasons  
 $P_{th}$  pertes thermiques

Amplitude ultrasons	$t_1$	$t_2$	$T_1$	$T_2$	$P_{US}$	$\dot{Q}_{chaud}$	$\dot{Q}_{froid}$	$P_{th}$
%max	°C	°C	°C	°C	W	W	W	W
0	36,6	34,3	18,6	21,6	0			
50	36,5	33,8	18,5	23,2	58,8			
70	36,4	33,7	18,5	23,1	66			

118- Donner les expressions des flux thermiques  $\dot{Q}_{chaud}$  et  $\dot{Q}_{froid}$ . Les calculer.

En l'absence d'ultrasons  $\dot{Q}_{chaud} > \dot{Q}_{froid}$ , ceci traduit l'existence de pertes thermiques.

119- Déterminer les pertes thermiques en effectuant un bilan énergétique sur l'ensemble de l'échangeur en l'absence d'ultrasons(US) c'est à dire le flux thermique perdu par l'échangeur.

120- Effectuer un bilan énergétique sur l'ensemble de l'échangeur. En déduire les pertes thermiques sur l'échangeur en présence d'ultrasons (US). Compléter le tableau précédent.

A partir de  $\dot{Q}_{froid}$  en l'absence d'US et  $\dot{Q}_{chaud}$  en présence d'US, on estime U coefficient d'échange global. Ces flux de référence ont été choisis de façon à « sous-estimer » l'effet des US. On appelle  $\delta$  le facteur d'amélioration tel que  $\delta = \frac{U_{avecUS}}{U_{sansUS}}$

121- Compléter le tableau suivant.

122- Tirer les conclusions. Comment s'explique l'effet des US ?

Amplitude ultrasons	$\Delta T_1 = t_1 - T_2$	$\Delta T_2 = t_2 - T_1$	$\Delta T_{ml}$	U	$\delta$
%max	°C	°C	°C	$\text{Wm}^{-2}\text{°C}^{-1}$	
0					
50					
70					

Annexe

**Formulaire :**

**Théorème d'Ostrogradsky :**  $\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} \cdot d\tau$

**Rappel pour l'équation de Navier Stokes (60) :**

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

**En coordonnées sphériques :**

**Divergence de**  $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

**Laplacien de f(r, θ, φ)**

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

**Laplacien de**  $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} = & [\Delta A_r - \frac{2}{r^2} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_r)] \vec{u}_r + \\ & [\Delta A_\theta + \frac{1}{r^2} (2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi})] \vec{u}_\theta + \\ & [\Delta A_\varphi + \frac{1}{r^2} (\frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{\sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi})] \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

**Tenseur des contraintes d'un fluide newtonien ; μ viscosité du fluide**

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \eta \text{div} \vec{v} \\ \text{Pour info seulement :} \\ \Gamma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta (\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot g\theta) - \frac{2}{3} \eta \text{div} \vec{v} \\ \Gamma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta (\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}) - \frac{2}{3} \eta \text{div} \vec{v} \\ \Gamma_{r\theta} &= \eta (\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}) \\ \Gamma_{\varphi\theta} &= \eta (\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \sin \theta \frac{\partial (\frac{v_\varphi}{r \sin \theta})}{\partial \theta}) \\ \Gamma_{r\varphi} &= \eta (\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r}) \end{aligned} \right.$$

**Formules supplémentaires :**

$$\begin{aligned}
 (\vec{A} \text{ grad}) \vec{B} &= [(\vec{A} \text{ grad}) B_r - \frac{A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi}{r}] \vec{u}_r \\
 &+ [(\vec{A} \text{ grad}) B_\theta - \frac{A_\theta B_r - A_\varphi B_\varphi \cot g\theta}{r}] \vec{u}_\theta \\
 &+ [(\vec{A} \text{ grad}) B_\varphi - \frac{A_\varphi B_r - A_\theta B_\theta \cot g\theta}{r}] \vec{u}_\varphi
 \end{aligned}$$

avec  $\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta + B_\varphi \vec{u}_\varphi$

$$(\vec{A} \text{ grad}) f = A_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{A_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

**Formule d'intégration**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{R(t)}^{\infty} f(r, t) dr \right) = \int_{R(t)}^{\infty} \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} dr - \left( f(\infty, t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_\infty - f(r, t) \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_R \right)$$

**Moyenne logarithmique**

$$\Delta \theta_{ml} = \frac{\Delta \theta_1 - \Delta \theta_2}{\ln \left( \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \theta_2} \right)}$$

**Données :**

Vitesse du son dans l'eau :  $c = 1425 \text{ m.s}^{-1}$

Pression de vapeur saturante de l'eau à 20°C :  $p_v = 0,0233 \text{ bar}$

Constante de Faraday :  $F = 96500 \text{ Cmol}^{-1}$

Coefficient de diffusion des ions ferricyanures en solution aqueuse à 20°C :

$$D = 0,76 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

20°C	Masse volumique $\mu_0$	Coefficient de compressibilité
eau	$998 \text{ kg.m}^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-10} \text{ SI}$
air	$1,2 \text{ kg.m}^{-3}$	$10^{-5} \text{ SI}$

Masse volumique  $\mu$  de l'eau à 35°C =  $995 \text{ kgm}^{-3}$   
 capacité calorifique de l'eau :  $4,18 \text{ kJkg}^{-1} \text{K}^{-1}$