

SESSION 2011

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : GÉNIE CIVIL

**ÉPREUVE DE MODÉLISATION
DES MATÉRIAUX ET DES OUVRAGES**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Cette épreuve est constituée de deux parties indépendantes :

- **modélisation des matériaux et patrimoine ;**
- **modélisation mécanique des ouvrages.**

Il est demandé aux candidats de traiter les deux sujets sur des copies séparées.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Epreuve de modélisation mécanique des ouvrages

Etude simplifiée d'un complexe hydro-électrique

Ce sujet s'inspire du complexe hydroélectrique de Grande-Dixence situé dans le Valais (Suisse). Cet ouvrage est composé :

- d'un réservoir d'altitude (2364 m) d'une capacité de 400 millions de m³ réalisé au moyen d'un barrage poids d'une longueur de 700 mètres
- d'usines de production d'électricité par turbines dont la plus importante, Bieudron, est située à une altitude de 481 m.

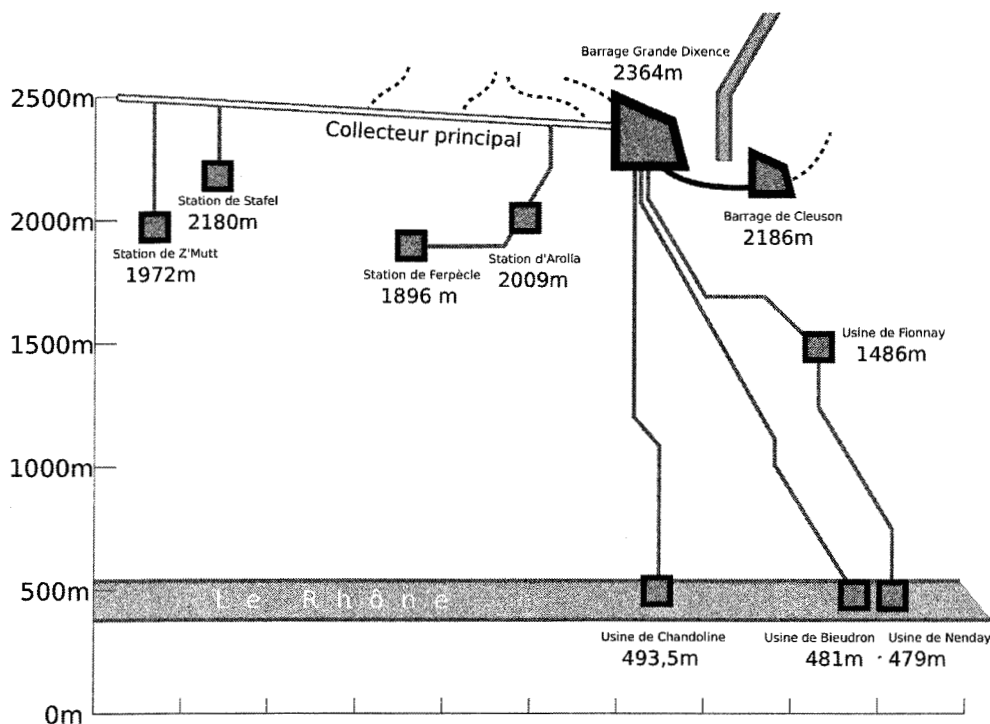
La première partie du sujet (Mécanique des Fluides) traite de l'étude des installations hydroélectriques alors que la deuxième partie étudie le comportement du barrage poids.

Le sujet est une libre interprétation des données de ce complexe, permettant de traiter cet ouvrage dans un temps limité, et avec les connaissances et outils en rapport avec le niveau du concours.

Partie 1 Mécanique des Fluides

Vue d'ensemble des installations

La figure 1 présente l'ensemble des sites de pompage, stockage (barrages) et production d'électricité par turbinage du complexe hydroélectrique de Grande-Dixence.



Exercice 1 : Captage d'eau

La station de pompage d'Arolla (alt. 2009 m) alimente le collecteur principal du barrage Grande Dixence. La figure 2 représente l'installation de manière schématique.

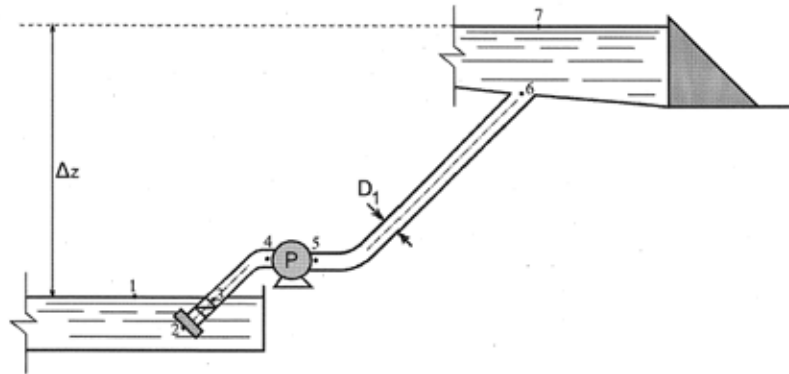


Figure 2 – Installation de pompage

Ce circuit comporte, dans l'ordre de l'écoulement, une crépine de coefficient de perte de charge K_2 , un clapet de coefficient de perte de charge K_3 et un coude à 45° (K_4). En aval du groupe de pompes P, la conduite de refoulement se compose d'un coude à 45° identique au précédent ($K_5 = K_4$) et d'un raccordement au réservoir qui se fait avec une perte de charge singulière de coefficient K_6 . Sur toute sa longueur L, la conduite a un diamètre D_1 et un coefficient de pertes de charge linéiques λ . L'altitude des surfaces libres reste constante et la différence entre les deux se note Δz .

Enfin, on supposera le fluide incompressible et l'écoulement irrotationnel.

1. Quelle est la vitesse V dans la conduite si les pompes assurent un débit Q de $12,6 \text{ m}^3/\text{s}$?
2. Déterminer les pertes de charge linéiques sur la longueur L de conduite.
3. Déterminer les pertes de charge singulières dans la totalité de l'installation.
4. Quelle doit être la hauteur manométrique du groupe de pompe afin d'assurer le fonctionnement au débit Q voulu ?
5. Quelle est la puissance hydraulique fournie par les pompes ?

Applications numériques : $K_2 = 2,5$; $K_3 = 1,2$; $K_4 = 0,145$; $K_6 = 1$; $D_1 = 1,8 \text{ m}$; $L = 3 \text{ km}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;

$\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$; $\lambda = 0,038$; $\Delta z = 312 \text{ m}$.

Exercice 2 : Centrale hydro-électrique

Une conduite forcée de diamètre D alimente l'usine de production d'électricité (turbines Pelton) à partir du réservoir à surface libre situé en amont du barrage Grande Dixence. Elle se termine par un coude à 45° suivi d'un embout de diamètre intérieur d. A la sortie du gicleur, l'eau est éjectée sous la forme d'un jet fin cylindrique horizontal de diamètre d s'écoulant à la vitesse v.

On note z_A l'altitude de la surface libre du réservoir et z_B celle de l'axe du jet.

L'eau est considérée comme un fluide parfait, isovolume de masse volumique ρ , le mouvement est stationnaire et la pression atmosphérique constante est égale à p_a .

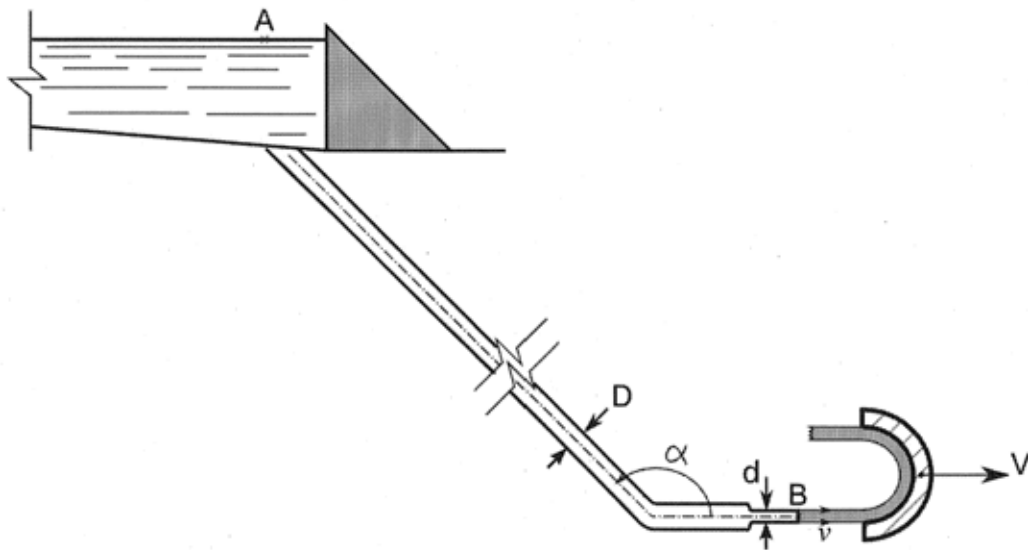


Figure 3 – Description de l'installation hydroélectrique

1. Calculer le débit volumique Q de fluide s'écoulant dans la conduite.
2. Calculer la résultante des efforts exercés sur le massif d'ancrage du coude à 45° (on négligera les effets de la pesanteur).
3. Le jet frappe ensuite un auget capable de renvoyer la veine d'eau dans le sens opposé à la direction incidente (principe turbine Pelton). L'auget se déplace dans la direction de l'axe du jet à une vitesse constante V . Exprimer la résultante des efforts subis par l'auget.
4. Quelle est la valeur de la vitesse V de l'auget pour que la puissance fournie à l'auget soit maximale. Donner alors la valeur de l'effort subi par l'auget ainsi que la puissance mécanique fournie à l'auget.

Applications numériques : $D = 3 \text{ m}$; $d = 0,7 \text{ m}$; $z_A = 2364 \text{ m}$; $z_B = 481 \text{ m}$; $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $p_A = 101325 \text{ Pa}$; $\alpha = 3\pi/4 \text{ rad}$.

Partie 2 Mécanique du solide

On se propose d'étudier à présent le comportement du barrage poids. On étudiera cette structure dans une configuration simplifiée.

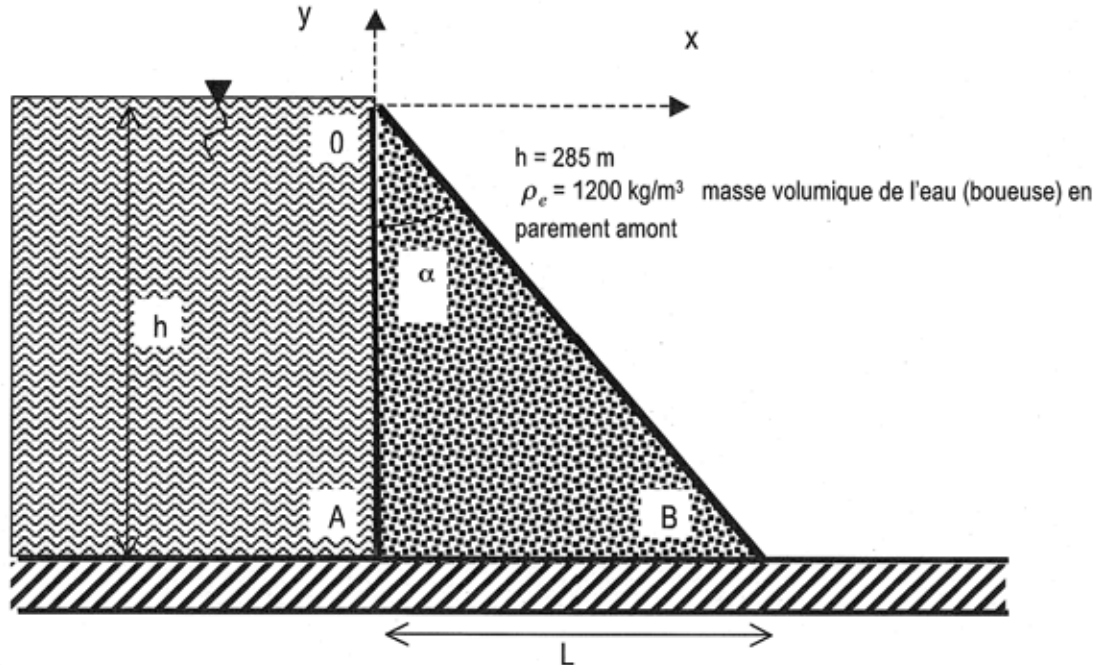


Figure 4 : Barrage poids dans sa configuration simplifiée pour le dimensionnement

Le barrage est constitué d'un béton dont le comportement est supposé homogène, élastique linéaire et isotrope.

E, module d'Young	= 10 000 MPa
ν , coefficient de Poisson	= 0,3
ρ_b masse volumique	= 2500 kg/m ³

Partie 2.1 Résolution « mécanique des milieux continus »

2.1.1 Tenseur des contraintes

On suppose le barrage suffisamment long pour ramener l'étude à une section courante transversale (plan (x,y)) dont on supposera la déformation plane.

2.1.1.1 Ecrire la condition de déformation plane en tout point

Préciser ε_{zz} , ε_{zx} et ε_{zy} , et donner une indication sur les expressions de ε_{ij} pour $i = x, y$ et $j = x, y$

2.1.1.2 En utilisant les relations de Hooke

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \delta_{ij}$$

avec $\text{Tr}(\varepsilon) = \sum_i \varepsilon_{ii}$, $\text{Tr}(\sigma) = \sum_i \sigma_{ii}$

$$\delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker, } \begin{cases} = 0, i \neq j \\ = 1, i = j \end{cases}$$

Montrer, dans ce cas, que le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

2.1.2 Conditions aux limites

- 2.1.2.1 Définir dans le repère (x,y) le vecteur contrainte, sur le parement amont, notée $\{T_{0A}\}$, en fonction de l'ordonnée du point.
- 2.1.2.2 Définir dans le repère (x,y) le vecteur contrainte, sur le parement aval, notée $\{T_{0B}\}$.
- 2.1.2.3 En considérant la relation entre le tenseur des contraintes, la normale à la facette et les contraintes sur cette facette, $[\sigma] \{n\} = \{T\}$, appliquée aux 2 parements amont et aval, établir 7 relations entre les paramètres des composantes des contraintes.

2.1.3 Relations d'équilibre

En supposant une solution en contraintes de la forme :

$$\sigma_{xx} = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

$$\sigma_{yy} = b_0 + b_1 x + b_2 y$$

$$\sigma_{xy} = c_0 + c_1 x + c_2 y$$

- 2.1.3.1 Appliquer les relations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \rho_b \cdot g = 0 \quad \text{en tout point (x,y) du barrage}$$

- 2.1.3.2 En considérant les relations de la question précédente, définir tous les paramètres des composantes du tenseur des contraintes.

On supposera pour cela que la condition de non fissuration en parement amont conduit à $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2.1.4 Tenseur des déformations

Déterminer les composantes du tenseur des déformations. On posera :

$$w_e = \rho_e \cdot g \quad w_b = \rho_b \cdot g \quad w_{eb} = w_b - 2 \cdot w_e \quad \text{et} \quad \nu = 0,5$$

2.1.5 Déplacements

En considérant un tenseur des déformations linéarisé et des composantes du déplacement u et v selon respectivement x et y, sous la forme suivante :

$$u(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot x \cdot y + d \cdot x + e \cdot y + f$$

$$v(x, y) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot x \cdot y + \delta \cdot x + \mu \cdot y + \eta$$

- 2.1.5.1 Déterminer les paramètres de ces composantes du déplacement.

On considérera pour cela les conditions aux limites suivantes :

$$u(0, -h) = v(0, -h) = 0 \quad v(h, -h) = 0$$

- 2.1.5.2 Calculer les déplacements au sommet du barrage

Partie 2.2 Résolution « résistance des matériaux »

On se propose maintenant d'étudier le comportement du barrage à l'aide de la théorie des poutres, en assimilant le barrage à une poutre droite d'axe y , de section variable, simplement encastree au niveau du contact avec le sol.

2.2.1 Hypothèses

- 2.2.1.1 Rappeler les hypothèses de la théorie des poutres. Commenter ces hypothèses dans ce cas.
- 2.2.1.2 Exprimer les charges s'exerçant sur le barrage.
- 2.2.1.3 Expliciter le moment quadratique de la section du barrage.

2.2.2 Efforts de cohésion

- 2.2.2.1 Exprimer les efforts de cohésion dans le barrage.
- 2.2.2.2 Tracer les diagrammes correspondants. Commenter.

2.2.3 Calculer les déplacements au sommet du barrage

- 2.2.4 Comparer ces résultats aux déplacements obtenus par la résolution « mécanique des milieux continus »
Commenter ces deux études en se basant sur les hypothèses de calcul.

Partie 2.3 Résolution par la méthode des éléments finis

2.3.1 Résultat avec un seul élément linéaire

- 2.3.1.1 Définir cet élément : caractéristiques du champ de déplacement, du champ de contrainte, conditions aux limites conformes à celles définies précédemment.
- 2.3.1.2 Comment traitera-t-on la valeur de 0,5 pour le coefficient de Poisson ?
- 2.3.1.3 Pour la pression hydrostatique de l'eau et les forces de gravité appliquées au barrage, on obtient les déplacements suivants au sommet du barrage :
 $u = 96 \text{ mm}$
 $v = -50 \text{ mm}$

Commenter ces résultats par rapport aux résultats de la mécanique des milieux continus obtenus précédemment.
Commenter ces résultats par rapport aux résultats de la résistance des matériaux obtenus précédemment.
Justifier qualitativement ces écarts.

- 2.3.1.4 Que représentent les résultats en contraintes ?

2.3.2 Résultat avec 400 éléments quadratiques

- 2.3.2.1 Définir ces éléments : caractéristiques du champ de déplacement, du champ de contrainte.
- 2.3.2.2 Les déplacements au sommet du barrage sont :
 $u = 306 \text{ mm}$
 $v = -18 \text{ mm}$

Commenter ces résultats par rapport aux résultats précédents.
Justifier qualitativement ces écarts, notamment à partir des isovaleurs des déplacements verticaux (voir figure 5).

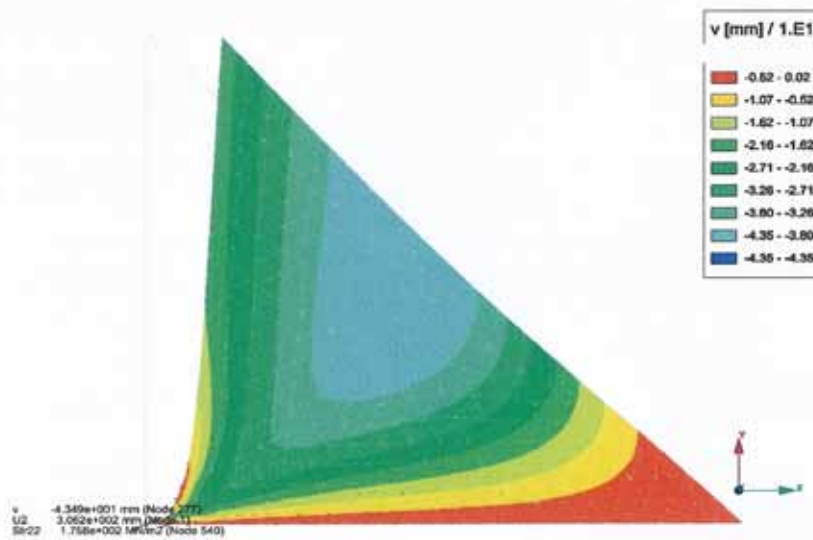


Figure 5 - Isovaleurs des déplacements verticaux

2.3.2.3

Comment interpréter les contraintes principales au point A, fournies par le calcul éléments finis (voir figure 6), sachant que s_1 (contrainte principale majeure) = 176 MN/m², s_2 (contrainte principale mineure) = 41 MN/m².

Commenter cet état de contrainte par rapport aux hypothèses de la résistance des matériaux.

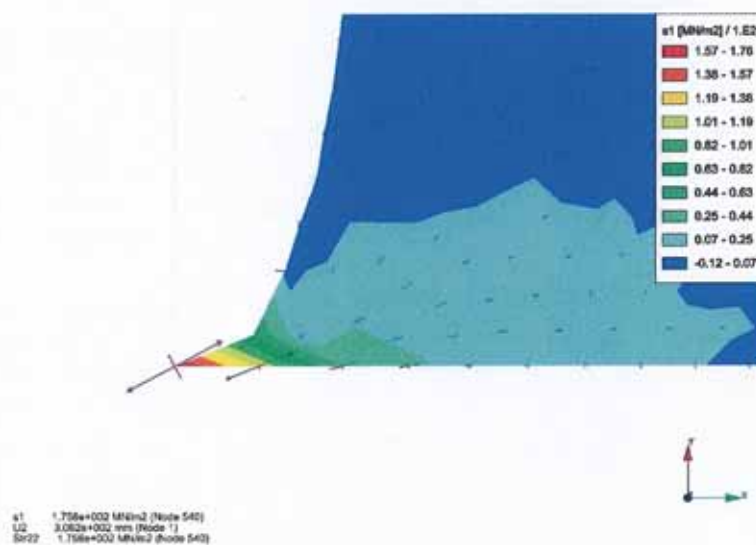


Figure 6 - Contraintes principales en pied de barrage

Epreuve de modélisation des matériaux et patrimoine

Le sujet proposé comprend deux parties indépendantes. Dans une première partie (partie A), on s'intéresse à l'évaluation des performances environnementale et structurale d'un plancher mixte de bureau. La seconde partie (Partie B) porte sur le pompage du béton.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. Pour chaque question, en complément des résultats de calculs proprement dits, il conviendra de justifier les choix effectués et calculs réalisés et de commenter les résultats obtenus.

Partie A

On cherche à étudier, suivant des critères structuraux et environnementaux, un plancher dont la solution de base est composée de poutres en bois lamellé collé sur lesquelles repose, sans connexion, une dalle de béton (figure A1). L'étude porte sur une bande de largeur 1 m de ce plancher, constituant une poutre mixte, comme indiqué sur la figure A2. Les nouvelles solutions étudiées sont fondées sur le principe du collage du béton sur le bois dans le but de réaliser une poutre mixte bois-béton. Celle-ci est constituée d'une partie rectangulaire en bois lamellé collé de hauteur h_w et de largeur b_w , sur laquelle est collée en partie supérieure une plaque en béton armé de largeur b_c et d'épaisseur h_c (figure A2). Le plancher est alors constitué par la juxtaposition de ces poutres mixtes, solidarisées entre elles en seconde phase. Le collage structurel permet de réduire l'épaisseur de plancher pour une inertie en flexion donnée.

On s'intéresse dans ce problème à l'évaluation de certaines propriétés des différentes poutres mixtes de ce plancher, obtenues à partir d'une famille de bétons, B1 à B6, donnés dans le tableau A1.

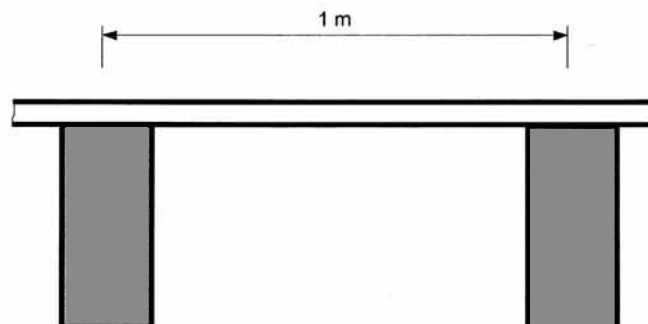


Figure A1 : Plancher constitué d'une dalle béton reposant sur des poutres en bois lamellé collé

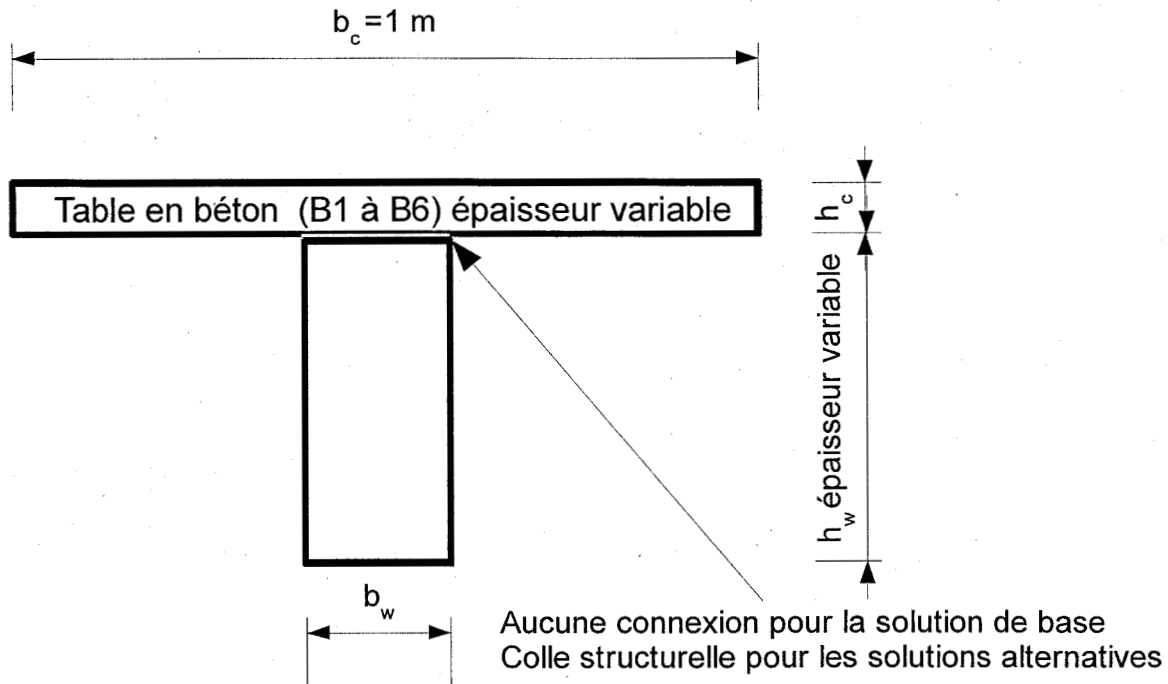


Figure A2 : Élément de l'étude

- A1. Quel est le paramètre principal qui pilote la résistance des bétons pour un jeu de constituants donné ?
- A2. En déduire la raison qui conduit généralement le formulateur à augmenter le dosage en ciment du béton quand il cherche à en augmenter la résistance, pour une consistance donnée, comme l'indique le tableau A1.
- A3. L'assemblage du béton sur le bois s'effectue grâce à un collage structural. Précisez les caractéristiques principales que la colle doit respecter au regard des performances attendues de l'assemblage. Citez une nature de colle appropriée répondant à ces exigences.
- A4. Des essais ont montré que la résistance de l'assemblage collé n'est satisfaisante qu'après avoir attendu 4 semaines de maturation du béton (de classe C80 pour les essais en question) avant la réalisation de l'opération de collage. Donner une explication à cette condition en étayant votre réponse. Ce délai est-il susceptible d'évoluer si la résistance du béton varie ?
- A5. Afin que le béton ne soit sollicité qu'en compression, on pose comme condition que la fibre neutre de la poutre mixte se situe à l'interface des 2 matériaux. En écrivant $n = b_c E_c / b_w E_w$, E_c et E_w étant respectivement les modules instantanés du béton et du bois, montrer alors que l'expression du rapport m , de la hauteur de la poutre en bois à l'épaisseur de la plaque de béton, est telle que : $m = h_w / h_c = \sqrt{n}$
- A6. On s'intéresse au calcul des dimensions des différentes solutions de plancher mixtes bois-béton, obtenues pour les différents bétons B1 à B6 du tableau A1. Calculer les valeurs numériques de n et m des différentes poutres mixtes ainsi obtenues sachant que $b_c / b_w = 5$ et $E_w = 11600 \text{ MPa}$. Renseigner le tableau A2 avec ces valeurs.

A7. Calculer les valeurs des hauteurs h_c , h_w et $h_t = h_c + h_w$ ainsi que le poids linéique pour les différentes poutres et en posant comme condition que ces solutions ont la même raideur en flexion $(EI)_{ef}$ que la solution de base $(EI)_{ef} = 16 \text{ MN.m}^2$. Remplir le tableau A2 après avoir explicité le calcul et commenter les résultats obtenus. Le poids volumique du béton armé sera pris à 25 kN/m^3 et celui du bois à 5 kN/m^3 . On pourra se servir de l'expression suivante de la raideur en flexion des poutres mixtes collées lorsque la fibre neutre est placée à l'interface des

2 matériaux :
$$(EI)_{ef} = \left(h_w^3 + n h_c^3 \right) \frac{b_w E_w}{3}$$

A8. On s'intéresse pour la phase de production des matériaux au calcul de la consommation énergétique, qu'on nomme l'indicateur d'impact énergétique, nécessaire à la réalisation d'une poutre mixte. Les impacts de la colle sont ici négligés. L'énergie liée à la production du bois lamellé collé est $W_w = 19000 \text{ MJ/m}^3$. Le terme W_w désigne l'énergie totale dépensée à la fabrication du lamellé collé. L'énergie W_{rc} de production du béton armé est donnée dans le tableau A1.

Calculer pour un mètre de longueur de chaque poutre mixte l'indicateur énergétique. Renseigner le tableau A2 après avoir expliciter le calcul.

A9. On s'intéresse pour la phase de production des matériaux au calcul du potentiel de réchauffement climatique (PRC), exprimé en émission équivalente de gaz carbonique. Les impacts de la colle sont ici négligés. L'impact PRC lié à la production du bois lamellé collé est $M_{wCO_2} = -448 \text{ kg/m}^3$. Le PRC du béton armé est fourni dans le tableau A1.

Calculer le PRC pour un mètre de longueur de chaque poutre mixte et renseigner le tableau A2.

A10. La disposition de la solution de base (non connectée) est identique à celle de la figure A1. Dans cette solution, les poutres ont une hauteur de 0,44m et une largeur de 0,2m, la dalle de béton armé une épaisseur de 0,12 m. Le béton est du type B2. Comparer et commenter les impacts des différentes solutions entre elles et avec cette solution de base. Si l'on considère que la recherche d'un plancher d'épaisseur minimale et de masse minimale constitue des objectifs structurels, existe-t-il une solution optimale, satisfaisant à la fois aux objectifs structurels et environnementaux ? On fait l'hypothèse que toutes les solutions satisfont par ailleurs aux vérifications des états limites ultimes.

A11. La recherche d'un compromis a conduit au choix de la solution PB3. Le marché potentiel de cette solution représente une surface annuelle de 5000 m^2 de plancher. On désire comparer les impacts PRC et énergétique de la solution par rapport à ceux d'un européen moyen, tels qu'ils sont indiqués dans le tableau A3. A partir de cette comparaison, préciser lequel des 2 impacts calculés est jugé prépondérant. Les conclusions sont elles les mêmes pour la solution de base ?

A12. Proposer en le justifiant un autre impact environnemental qui vous semble approprié au problème étudié.

référence	Dosage en ciment	Résistance en compression moyenne	Module instantané du béton	Potentiel de réchauffement climatique (PRC), acier compris	Indicateur d'impact énergétique acier compris
	c (kg/m ³)	f_c (MPa)	E_c (MPa)	M_{reCO_2} (kg/m ³)	W_{re} (MJ/m ³)
B1	300	33	35268	211	1609
B2	350	58	42602	369	2515
B3	400	79	47165	420	2809
B4	450	96	50304	459	3029
B5	500	110	52546	513	3340
B6	550	120	54164	582	3735

Tableau A1 : Propriétés théoriques de bétons en fonction de leur dosage en ciment, pour une valeur d'affaissement au cône de 17 cm. Simulations obtenues par un logiciel sur la base de granulats courants siliceux roulés 0/20mm. Les indicateurs d'impact sont donnés pour la phase de production seule du béton armé.

Energie consommée (MJ/an)	Potentiel de réchauffement climatique M_{CO_2} (kg/an)
100 000	10 000

Tableau A3 : Impact moyen d'un citoyen européen sur une année.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie :

Session :

Concours :

Spécialité/option :

Repère de l'épreuve :

Intitulé de l'épreuve :

NOM :

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms :

N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

EAE GCI 1

Référence de la poutre hybride	n	m	h_w (m)	h_c (m)	h_t (m)	Poids linéique (kN/m)	Indicateur d'impact énergétique par mètre de poutre (MJ/m)	Potentiel réchauffement climatique (PRC) par mètre de poutre M_{CO_2} (kg/m)
Poutre mixte béton B1 PB1								
Poutre mixte béton B2 PB2								
Poutre mixte béton B3 PB3								
Poutre mixte béton B4 PB4								
Poutre mixte béton B5 PB5								
Poutre mixte béton B6 PB6								
Solution de base	-	-	0,44	0,12	0,56			

Tableau A2 : Caractéristiques des poutres hybrides réalisées avec les différents bétons B1 à B6. Document à rendre avec les copies.

Partie B

Sur un chantier d'accès difficile, il est possible de mettre en œuvre le béton par pompage. On cherche ici à écrire les équations permettant de prédire, pour une géométrie de circuit de pompage et un béton donnés, la pression nécessaire au pompage en fonction du débit souhaité. On pourra alors en déduire la puissance de la pompe nécessaire pour réaliser le chantier.

B1. Soit un circuit de pompage constitué d'un tuyau horizontal de rayon R (en m) et de longueur L (en m) comme indiqué sur la figure B1.

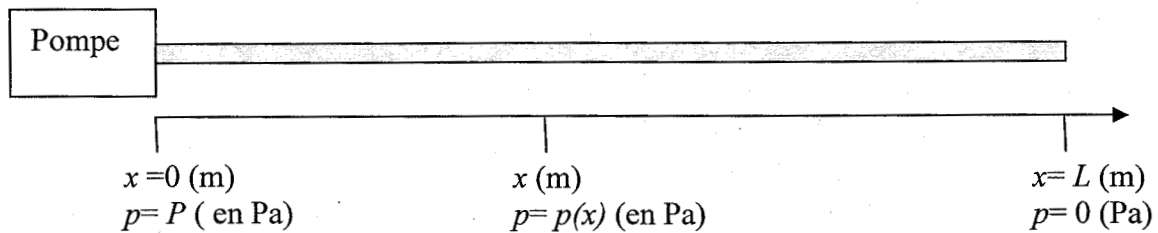


Figure B1 : schéma de principe du circuit de pompage

On applique une pression P (en Pa) au niveau de la pompe. Le béton s'écoule alors en bloc par glissement. Son écoulement est freiné par les contraintes de frottement $\tau_f(x)$ s'exerçant à l'interface entre le béton et le tuyau, comme l'indique la figure B2.

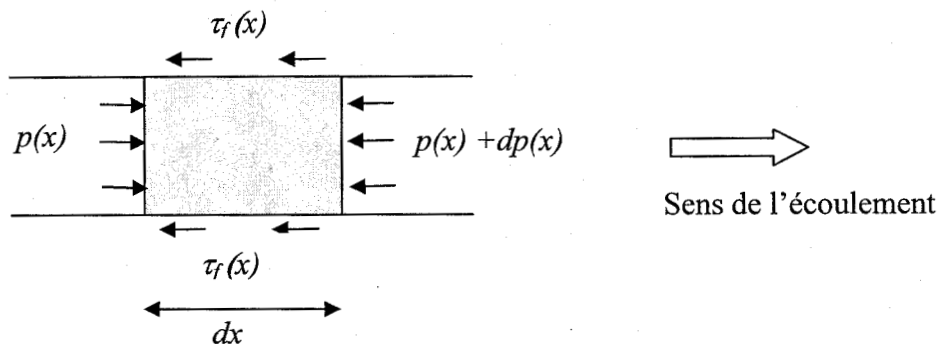


Figure B2 : équilibre d'un élément de béton dans le tuyau

En écrivant l'équilibre d'un tronçon unitaire de béton, exprimer la dérivée de la pression $dp(x)/dx$ (en Pa/m) en fonction de $\tau_f(x)$ et R .

B2. On procède à la mesure de la pression en différents endroits d'un circuit de pompage horizontal de 140 m de longueur, pour différents débits de pompage. Les résultats obtenus sont résumés dans la figure B3.

Que concluez-vous sur la dépendance de la contrainte de frottement $\tau_f(x)$ entre le béton et le tuyau vis-à-vis de la pression et de la vitesse de glissement du béton ? Justifiez votre réponse.

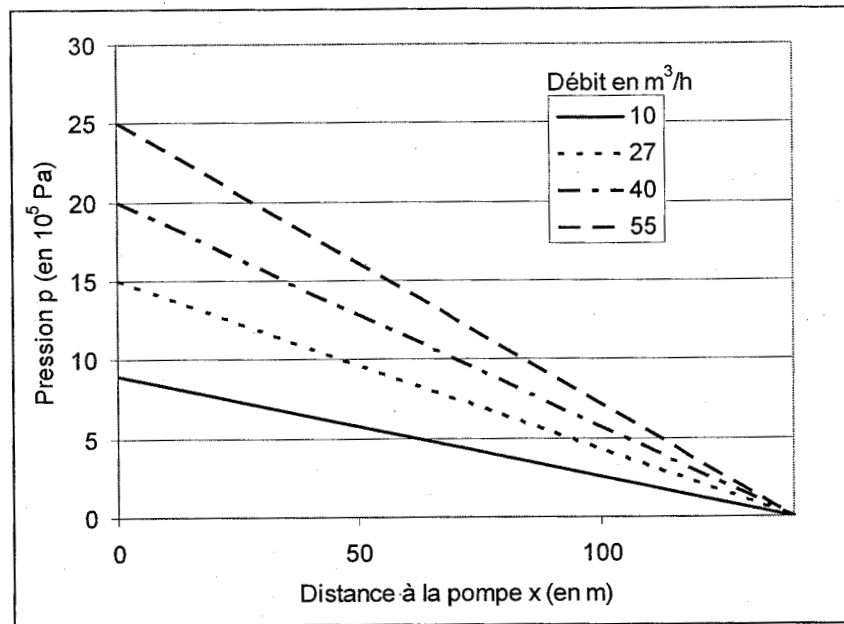


Figure B3 : profils de pression dans le circuit de pompage pour différents débits

B3. Quel type de relation observe-t-on entre la pression à la pompe P (c'est-à-dire $p(0)$) et le débit Q ? Pour étayer votre réponse vous pouvez vous aider du graphe vierge mis à votre disposition.

B4. On peut évaluer en laboratoire le frottement d'un béton avec un tuyau à l'aide d'un tribomètre à cylindres coaxiaux. Le principe de cet appareil est le suivant :

- le béton est placé dans une gamelle cylindrique fixe équipée en son centre d'un cylindre mobile motorisé équipé d'un couplemètre et d'un compte-tours (voir figure B4). Le cylindre intérieur est composé du même matériau que le tuyau sur le circuit de pompage.
- on impose au cylindre intérieur différents paliers de vitesses de rotation et on mesure les couples de frottement entre le béton et le cylindre intérieur correspondants à chaque palier.

On obtient alors une courbe de la forme $C = C_0 + A.N$ où

- C est le couple imposé au cylindre intérieur (en N.m)
- N le nombre de tours par seconde (en 1/s)
- C_0 et A des constantes

En faisant l'hypothèse que le béton reste immobile dans la gamelle en cours d'essai, on en déduit l'expression de la contrainte de frottement τ_f (en Pa) entre le béton et le cylindre intérieur, en fonction de la vitesse de glissement V_g (en m/s) du béton par rapport au cylindre intérieur, sous la forme :

$$\tau_f = \tau_{0i} + \eta V_g$$

où

- τ_{0i} est le seuil d'interface (en Pa)
- η est la constante d'interface (en Pa.s/m)

En vous appuyant sur la question précédente, expliquez en quoi cet essai réalisé sous pression atmosphérique est pertinent pour étudier le pompage du béton.

Exprimez τ_{oi} et η en fonction de C_0 , A et des dimensions de l'appareil.

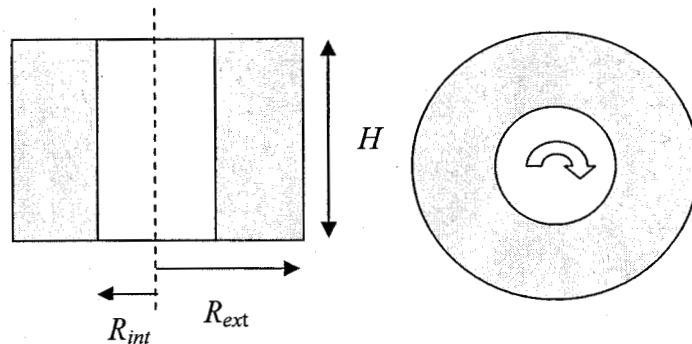


Figure B4 : Vues de côté et de dessus du tribomètre

B5. En vous appuyant sur les questions B1 et B2, exprimez la pression à la pompe P (en Pa) pour un débit donné, en fonction de la contrainte de frottement τ_f et de la géométrie du circuit.

B6. En déduire que l'on peut exprimer la pression à la pompe P (en Pa) en fonction du débit de pompage Q (en m^3/s) sous la forme suivante :

$$P = P_0 + k \cdot Q \text{ où}$$

- P_0 est une constante (en Pa)
- k est une constante (en $\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^3$)

Exprimez les constantes P_0 et k en fonction de la géométrie du tuyau horizontal et des propriétés d'interface τ_{oi} et η du béton.

B7. Sachant qu'en moyenne le béton a une densité de 2,4, que devient l'expression de la pression si le tuyau n'est plus horizontal mais que sa sortie se trouve à une hauteur H (en m) au dessus de la pompe ?

On fera l'hypothèse ici que l'accélération terrestre est égale à $g = 10 \text{ m/s}^2$.

B8. On réalise un chantier pour lequel la mise en œuvre du béton se fait par pompage. Le circuit de pompage est le suivant : diamètre du tuyau 125 mm, hauteur de pompage 200 m, distance horizontale 100 m.

La centrale à béton fournissant le chantier dispose dans son catalogue de deux formulations de béton à hautes performances ayant la même résistance mécanique. L'une d'entre elles contient de la fumée de silice. Le tableau B1 résume les propriétés de ces deux bétons.

Constituants		BHP-C	BHP-FS
Gravillon 10/20 (kg/m ³)		733	693
Gravillon 4/10 (kg/m ³)		114	180
Sable 0/4 (kg/m ³)		754	673
Sablon 0/0,63 (kg/m ³)		91	225
Ciment CEM I (kg/m ³)		590	430
Fumée de silice (kg/m ³)		-	43
Superplastifiant (kg/m ³)		8,85	13,2
Retardateur (kg/m ³)		2,95	2,15
Eau totale (l/m ³)		172	179
Etalement (cm)		75	64
Masse volumique kg/m ³		2466	2438
Données de tribologie	Seuil d'interface τ_{0i} (Pa)	60	50
	Constante visqueuse d'interface η (Pa.s/m)	1 400	900

Tableau B1 : propriétés des BHP disponibles à la centrale à béton

Quelle est la formule *a priori* la plus facilement pompable (c'est-à-dire celle nécessitant le moins de puissance de pompage) ? Justifiez votre réponse.

B9. La pompe utilisée sur le chantier est une pompe à pistons dont le volume est de 66 litres. Le pompiste peut suivre le débit de pompage en comptant le nombre de coups de piston par minute. Il peut également lire sur un manomètre la pression dans le circuit hydraulique de la pompe. Cette pression hydraulique est égale à 1,8 fois la pression sur le béton à la sortie de la pompe.

C'est finalement la formule à base de fumée de silice BHP-FS qui est sélectionnée pour le chantier. Après quelques jours de coulage sans problème, le béton devient soudain plus difficile à pomper. Pour comprendre ce qu'il se passe, le pompiste fait alors des mesures de pression pour deux débits de pompage. Celles-ci sont données dans le tableau B2.

Mesure N°	1	2
Débit de pompage (coups/min)	6,0	10,7
Pression hydraulique lue sur le manomètre (bars)	225	311

Tableau B2 : données de pompage

En faisant attention aux unités, en déduire les propriétés de frottement du béton pompé. Peut-on expliquer les difficultés de pompage par une erreur de livraison de la centrale à béton ?

B10. Le béton à l'état frais peut être considéré comme un matériau de Bingham dont la loi d'écoulement s'écrit sous la forme suivante :

$$\tau = \tau_0 + \mu \cdot \dot{\gamma}$$

avec

- τ contrainte de cisaillement (en Pa)
- τ_0 seuil de cisaillement (en Pa)
- μ viscosité plastique (en Pa.s)
- $\dot{\gamma}$ gradient de vitesse (en 1/s)

Lors du pompage et lorsque la vitesse de glissement entre le tuyau et le béton devient importante, la contrainte de frottement τ_f devient suffisamment grande pour qu'un cisaillement se propage dans le béton. Le profil de vitesse d'écoulement s'en trouve modifié comme indiqué sur la figure B5.

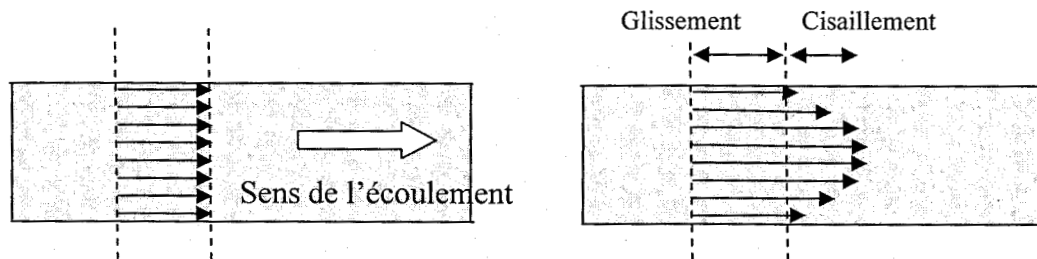


Figure B5 : profil de vitesses d'écoulement,
avec glissement seul (à gauche), avec glissement et cisaillement (à droite)

B11. Déterminez la vitesse de glissement V_{g0} à partir de laquelle le béton se cisaille, en fonction de τ_0 , τ_{0i} et η .

B12. Au delà de cette vitesse V_{g0} , le débit total Q est la somme d'un débit par glissement Q_g et d'un débit par cisaillement Q_c (voir figure B5).

On admet que l'équation suivante, dérivée de l'équation de Buckingham-Reiner, donne le débit de cisaillement :

$$Q_c = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp(x)}{dx} \left(1 - \frac{4}{3} \left(-\frac{dx}{dp(x)} \frac{2\tau_0}{R} \right) \right), dp(x)/dx \text{ étant négatif}$$

Déterminer l'expression de la vitesse de glissement en fonction du débit Q , du rayon du tuyau et des propriétés rhéologiques τ_0 et μ et tribologiques τ_{0i} et η du béton.

En injectant cette valeur de vitesse dans l'expression de τ_f et dans l'équation déterminée à la question B5, en déduire l'expression de la pression de pompage P (en Pa) en fonction de Q , de la géométrie du tuyau et des propriétés rhéologiques τ_0 et μ et tribologiques τ_{0i} et η du béton pour un tuyau horizontal.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : Session :

Concours :

Spécialité/option : Repère de l'épreuve :

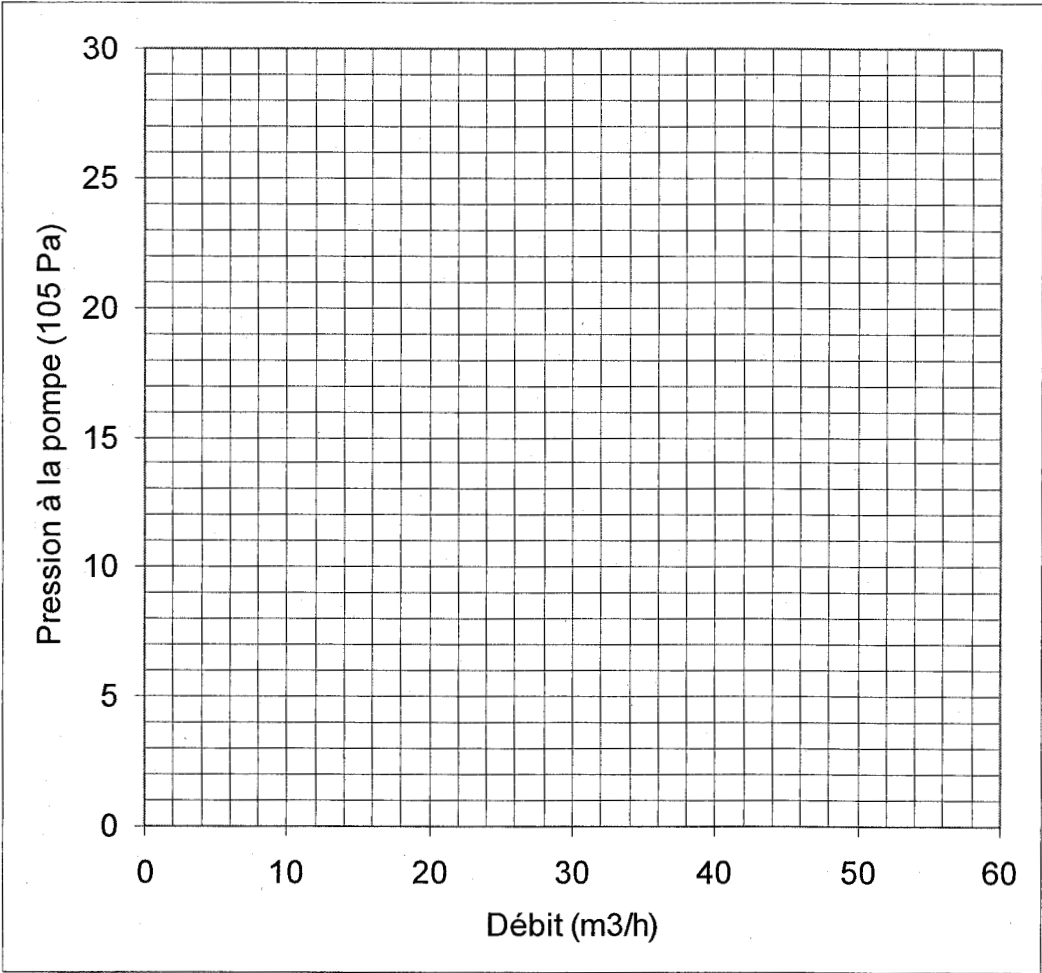
Intitulé de l'épreuve :

NOM :
(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

EAE GCI 1



Graphe pour la question B3 à compléter et à remettre avec votre copie.