

## Partie D : Principe du moteur asynchrone

On étudie ici le moteur asynchrone qui entraîne la pompe à chaleur de la partie C. Aucune connaissance préalable du moteur asynchrone n'est nécessaire pour l'étude de cette partie D.

Un moteur asynchrone est constitué d'un stator et d'un rotor.

Le stator est réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant  $\vec{B}(t)$ .

On modélise ici ce stator par un ensemble de trois bobines, dont les axes sont régulièrement décalés de  $\frac{2\pi}{3}$  dans le plan  $xOy$ , et alimentées par un système triphasé de courants de pulsation  $\omega_s$  dont les intensités sont les suivantes:

$$i_1(t) = I_M \cos(\omega_s t)$$

$$i_2(t) = I_M \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_3(t) = I_M \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

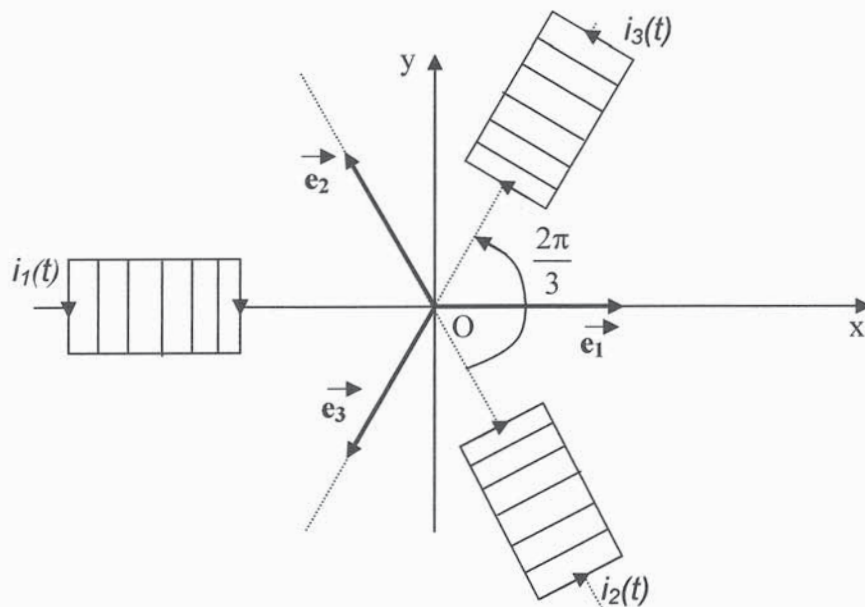


Figure 9

Dans un premier temps, on considère que la **fréquence** d'alimentation de ces bobinages statoriques est égale à 50Hz.

Chaque bobine crée au centre O un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme :  $\vec{B}_j = K \cdot i_j(t) \cdot \vec{e}_j$  ( K est une constante et  $\vec{e}_j$  est le vecteur unitaire de l'axe de la jème bobine).

On montre (résultat admis ici) que, dans ces conditions, le champ magnétique total  $\vec{B}$  en O a pour norme  $B = \frac{3}{2} K I_M$  et fait avec l'axe Ox l'angle  $\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{B}) = \omega_s t$ .

Le rotor est modélisé par un cadre conducteur de surface  $S$ , orienté suivant le vecteur normal unitaire  $\vec{n}$ , contenant  $N$  spires planes filiformes circulaires et indéformables en série ; il est animé par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire d'un mouvement de rotation -à la vitesse angulaire  $\omega$  constante- autour de l'axe fixe Oz, diamétral pour chacune des spires. Le vecteur-surface total de ce cadre a pour valeur  $NS\vec{n}$ , et reste constamment dans le plan xOy (voir figure 10, ci-dessous).

Le cadre est placé dans le **champ magnétique tournant que l'on suppose - dans toute la suite - uniforme, de norme constante notée  $B$  (avec  $B = \frac{3}{2} K I_M$ )**.

On note  $\varphi(t) = (\vec{e}_x, \vec{n}) = \omega t$  et rappelle que  $\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{B}) = \omega_s t$ .

Dans toute la suite, on suppose que :  $0 \leq \omega \leq \omega_s$ .

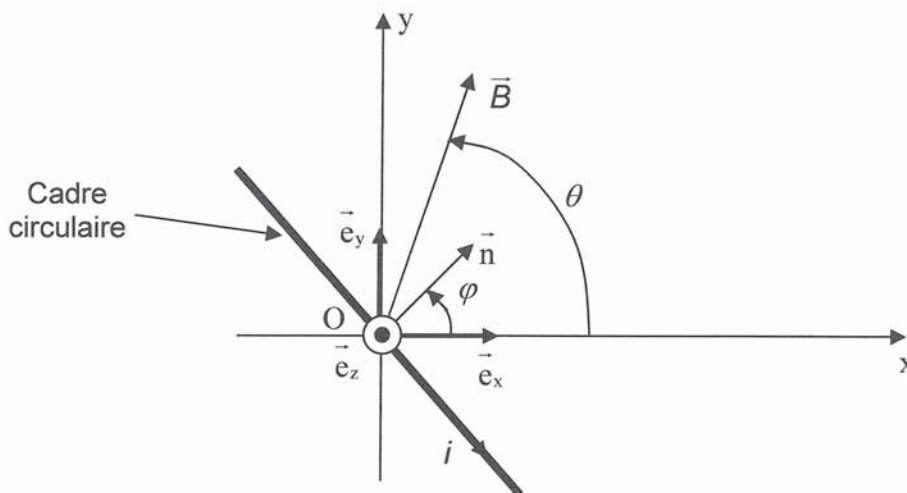


Figure 10 : Vue dans le plan xOy perpendiculaire à l'axe Oz de rotation

## 1. Détermination de l'intensité du courant rotorique

1.1. Déterminer le flux  $\Phi$  du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le stator à travers les  $N$  spires du cadre, en fonction de  $B, N, S, \omega, \omega_s$  et  $t$ .

1.2. En déduire, grâce à la loi de Lenz-Faraday, la force électromotrice d'induction  $e(t)$  qui apparaît dans le cadre en fonction du flux maximum à travers le circuit  $\Phi_M = N S B$ , et de la vitesse angulaire dite de glissement  $\omega_r = \omega_s - \omega$  ( $\omega_r$  est positive ou nulle).

1.3. Le cadre est équivalent à un circuit série fermé, de résistance  $R$  et d'inductance propre  $L$ .

1.3.1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i(t)$  passant dans les spires du cadre.

1.3.2. On veut établir l'expression de  $i(t)$  en régime permanent sinusoïdal.

A cette fin, on pose  $e(t) = \text{Im}(\underline{e}(t))$ , la notation  $\text{Im}(\underline{e}(t))$  désignant la partie **imaginaire** de  $\underline{e}(t) = \Phi_M \omega_r e^{j(\omega_r t)}$ , avec  $j^2 = -1$ . On cherche la solution permanente sinusoïdale de l'équation différentielle sous la forme :  $i(t) = I \sin(\omega_r t - \psi) = \text{Im}(\underline{i}(t))$ , avec  $\underline{i}(t) = I e^{j(\omega_r t - \psi)}$ .

Exprimer, en fonction de  $\Phi_M$ ,  $R$ ,  $L$  et  $\omega_r$ , l'amplitude  $I$  de  $i(t)$  et le retard de phase  $\psi$  de  $i(t)$  par rapport à la force électromotrice  $e(t)$  déterminée à la question 1.2.

## 2. Couple électromagnétique

Les spires du cadre circulaire sont parcourues par le courant d'intensité  $i(t)$ .

2.1. Rappeler l'expression du moment magnétique total  $\overline{\mathcal{M}}$  des  $N$  spires du cadre en fonction de  $N$ ,  $i(t)$ ,  $S$  et du vecteur normal unitaire  $\vec{n}$ .

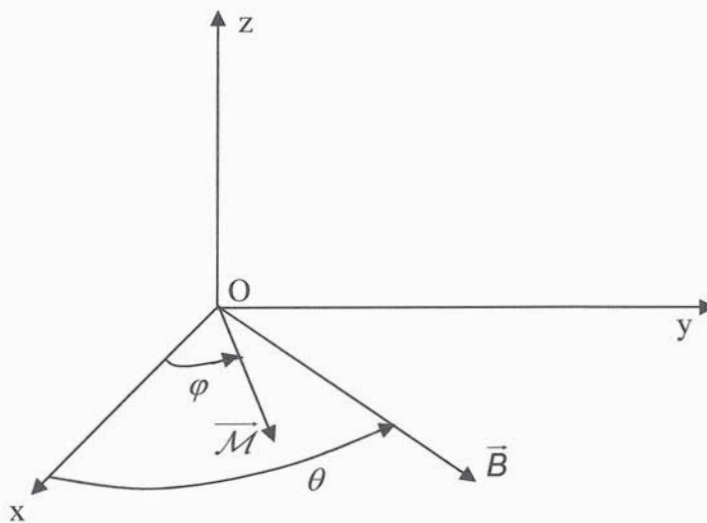


Figure 11

2.2. Montrer que, le champ  $\vec{B}$  étant uniforme, la résultante des forces de Laplace sur le circuit fermé du rotor est nulle.

On donne la valeur du moment en O de l'ensemble des forces de Laplace s'exerçant sur les  $N$  spires du cadre:  $\vec{\Gamma} = \overline{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ .

2.3. En déduire le moment par rapport à l'axe Oz,  $\Gamma(t) = \overline{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$ , de ces forces de Laplace.

2.4. Montrer que sa moyenne temporelle  $\langle I(t) \rangle$ , notée  $\Gamma_{em}$ , est donnée par l'expression suivante :

$$\Gamma_{em} = \left( \frac{\phi_M^2}{2L} \right) \frac{R L \omega_r}{R^2 + (L \omega_r)^2}$$

2.5. On introduit le glissement, noté  $g$ , qui caractérise l'écart relatif entre la vitesse angulaire de synchronisme  $\omega_s$  et la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation de l'arbre du moteur :

$$g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} = \frac{\omega_r}{\omega_s}$$

2.5.1. Que vaut le glissement  $g$  lorsque le moteur est à l'arrêt ?

2.5.2. Que vaut le glissement  $g$  lorsque le moteur tourne à la vitesse angulaire  $\omega_s$  de synchronisme ?

2.5.3. En déduire que le glissement est compris entre deux bornes dont on précisera les valeurs.

2.6. On pose  $\Gamma_0 = \frac{\phi_M^2}{2L}$ . Exprimer  $\Gamma_{em}$  en fonction de  $\Gamma_0$ ,  $g$ ,  $R$  et du produit  $L\omega_s$ .

2.7. Donner l'expression, notée  $\Gamma_d$ , de ce moment  $\Gamma_{em}$  au démarrage du moteur.

**Dans toute la suite on suppose, sauf mention explicitement contraire, que la résistance  $R$  est inférieure ou égale au produit  $L\omega_s$ .**

2.8. Montrer que la valeur maximale  $\Gamma_{max}$  de  $\Gamma_{em}(g)$  est égale à  $\Gamma_0/2$ , et préciser l'expression littérale du glissement  $g_{max}$  correspondant, en fonction de  $R$  et du produit  $L\omega_s$ .

2.9. Applications numériques :  $R = 4,0 \Omega$ ,  $L\omega_s = 40 \Omega$  et  $\Gamma_0 = 30 \text{ N.m}$ . On rappelle que  $\omega_s$  est égale à la pulsation des courants des bobinages statoriques, de fréquence égale à 50 Hz.

2.9.1. Calculer les valeurs numériques de  $\Gamma_d$ ,  $g_{max}$  et  $\Gamma_{max}$ .

2.9.2. En déduire la vitesse de rotation  $\omega$  du moteur en rad/s, puis en tours/mn, pour  $g = g_{max}$ .

2.9.3. Pour  $g = g_{max}$  calculer la valeur **efficace** notée  $I_{Reff}$  de l'intensité du courant rotorique.

2.10.1. Tracer l'allure du graphe  $\Gamma_{em}(g)$  pour des valeurs de  $g$  comprises entre 0 et 1.

2.10.2. En déduire celle du graphe de  $\Gamma_{em}$  en fonction de  $\omega$ , pour des valeurs de  $\omega$  comprises entre 0 et  $\omega_s$  (attention, le glissement  $g$  est fonction décroissante de  $\omega$ ).

### 3. Points de fonctionnement du moteur

La charge mécanique accouplée à l'arbre du moteur induit un couple résistant de moment par rapport à l'axe de rotation constant et noté  $(-I_r)$ , avec  $I_r > 0$ , lorsque  $\omega > 0$ .

3.1. On suppose qu'initialement,  $\omega$  est nulle. Que se passe-t-il si  $I_r$  est supérieur à  $I_d$  ?

3.2. Pour augmenter le "couple au démarrage"  $I_d$ , on ajoute une résistance supplémentaire en série dans le circuit du rotor, augmentant ainsi la valeur de la résistance  $R$ .

Par quel facteur multiplie-t-on  $I_d$  si  $R$  passe de  $4,0 \Omega$  à  $8,0 \Omega$  ?

**Dans toute la suite, on ramène la résistance  $R$  à sa valeur initiale :  $R = 4,0 \Omega$ .**

On admet que, si  $\omega$  dépend du temps, l'expression de  $I_{em}$  reste valable et que  $\omega$  obéit à l'équation différentielle  $J \frac{d\omega}{dt} = I_{em} - I_r$ , dans laquelle  $J$  est une quantité positive, nommée moment d'inertie par rapport à l'axe Oz de l'ensemble mobile en rotation.

3.3. En utilisant le graphe obtenu à la 2.10.2, montrer que, si  $I_d < I_r < I_{max}$ , il existe deux points de fonctionnement du moteur (i.e. deux valeurs, notées  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , de  $\omega$  telles que  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ ).

3.4. Etudier leur stabilité, toujours par l'analyse graphique .

3.5. Etudier la stabilité du seul point de fonctionnement dans le cas où  $I_r$  est inférieur à  $I_d$ .

### 4. Puissance et rendement

Dans cette partie, on suppose que la vitesse angulaire  $\omega$  du rotor est constante.

On note  $P_{méca}$  la puissance mécanique **moyenne** dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire et  $P_J$  la puissance **moyenne** dissipée par effet Joule dans le circuit rotorique .

$P_{méca}$  est donnée ici par l'expression (qu'on admettra) :  $P_{méca} = I_{em} \cdot \omega$  .

4.1. Exprimer  $P_J$  en fonction de  $I_0 = \frac{\phi_M^2}{2L}$ ,  $R$ ,  $L$ , et  $\omega_r$  .

4.2. En déduire la relation  $\omega \cdot P_J = \omega_r \cdot P_{méca}$  .

4.3. On souhaite retrouver par une autre méthode la relation établie à la question 4.2.

On nomme  $\mathcal{R}_B$  le référentiel animé, par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire  $\omega_s$  autour de l'axe fixe Oz.

4.3.1. Que peut-on dire du champ magnétique statorique, dans ce référentiel  $\mathcal{R}_B$ ?

4.3.2. Dans ce référentiel  $\mathcal{R}_B$ , la puissance instantanée des forces de Laplace vaut  $\Gamma(t) \cdot (\omega - \omega_s)$ . En effectuant un bilan de la conversion électromécanique de l'énergie dans ce référentiel  $\mathcal{R}_B$ , établir une relation entre  $\Gamma(t)$ , la force électromotrice  $e(t)$ , l'intensité  $i(t)$  du courant rotorique,  $\omega$  et  $\omega_s$ .

4.3.3. En déduire, grâce à l'équation de maille établie à la question 1.3.1, et compte tenu du caractère périodique de  $e(t)$  et de  $i(t)$ , une relation entre la valeur moyenne  $\Gamma_{em}$  de  $\Gamma(t)$ ,  $\omega$ ,  $\omega_s$  et la valeur moyenne  $P_J$  de la puissance dissipée par effet Joule.

4.3.4. Retrouver la relation  $\omega \cdot P_J = \omega_r \cdot P_{méca}$ .

4.4. La puissance électromagnétique moyenne  $P_{em}$  transmise du stator vers le rotor est intégralement convertie en puissance mécanique moyenne  $P_{méca}$  et en puissance moyenne  $P_J$  dissipée par effet Joule dans les conducteurs du rotor.

En déduire l'expression du rendement  $\eta$  du moteur en fonction de  $\omega$  et  $\omega_s$  ; on rappelle que  $\omega_r = \omega_s - \omega$ .

4.5.1. Montrer que, pour tout point de fonctionnement stable (étudié dans les questions 3.3 à 3.5),  $\eta$  est nécessairement supérieur à  $\eta_{min} = 1 - \frac{R}{L\omega_s}$ .

4.5.2. Calculer  $\eta_{min}$  sachant que  $R = 4,0 \Omega$  et  $L\omega_s = 40 \Omega$ .

4.6. Calculer la valeur du rendement  $\eta$  pour un glissement égal à  $g = 0,050$ .

On suppose **dans toute la suite** que l'amplitude  $U_M$  des tensions appliquées aux trois bobines du stator est liée à celle, notée  $I_M$ , des courants les traversant et à  $\omega_s$  par la relation :  $U_M = k' I_M \omega_s$ , où  $\omega_s$  est  $k'$  est une constante qu'on ne cherchera pas à déterminer.

4.7. Si chaque bobine du stator était seule dans l'espace, quel modèle simple permettrait de rendre compte de cette relation ?

En mi-saison ou en période peu froide, on doit diminuer la puissance mécanique moyenne fournie par le moteur asynchrone à la pompe à chaleur ; à cette fin, on **diminue** la valeur de la vitesse angulaire  $\omega_2$  du rotor au point de fonctionnement stable, le moment résistant étant supposé constant et toujours noté  $(-T_r)$  (comme dans la question 3).

A cette fin, on envisage ci-dessous deux solutions, dont on souhaite comparer les avantages.

4.8.1. Une solution naturelle consiste à maintenir constante la valeur de  $\omega_s$  et à diminuer celle de l'amplitude  $U_M$  des tensions appliquées aux trois bobines du stator ; préciser, en justifiant votre réponse, l'effet de cette modification sur le graphe de  $\Gamma_{em}$  en fonction de  $\omega$ , et montrer qu'on a bien diminution de la valeur de la vitesse angulaire  $\omega_2$  du rotor au point de fonctionnement stable.

4.8.2. Y'a-t-il une valeur minimale de la vitesse angulaire  $\omega_2$  qu'on peut atteindre par ce genre de modification ?

Une seconde solution consiste encore à diminuer l'amplitude  $U_M$  des tensions appliquées aux trois bobines du stator, mais en maintenant constante la valeur de  $\Gamma_o = \frac{\phi_M^2}{2L}$ , et par conséquent celle de  $\Gamma_{max}$ .

4.9. Montrer que cette façon de procéder impose de maintenir constant le quotient  $U_M/\omega_s$ .

4.10. Comment, dans ce cas, se modifie le graphe de  $\Gamma_{em}$  en fonction de  $\omega$  ?

4.11. Montrer qu'on a bien diminution de la valeur de la vitesse angulaire  $\omega_2$  du rotor au point de fonctionnement stable.

On n'impose plus nécessairement à  $\omega_s$  de rester supérieure au quotient  $\frac{R}{L}$ .

4.12. Y'a-t-il une valeur minimale de la vitesse angulaire  $\omega_2$  qu'on peut atteindre par cette seconde façon de procéder ?

4.13. Si on n'abaisse pas trop la valeur de  $\omega_2$ , les deux solutions ci-dessus peuvent être envisagées.

En utilisant la relation obtenue à la question 4.4, indiquer laquelle des deux solutions vous semble préférable sur le plan énergétique, en justifiant simplement mais précisément votre réponse.

SUITE DE L'ENONCE PAGE 24

## PARTIE E : ENERGIE EOLIENNE DOMESTIQUE

Dans le contexte actuel de développement de production d'énergies alternatives aux énergies fossiles, l'énergie du vent a l'avantage d'être directement récupérable sous forme mécanique et donc facilement convertible en énergie électrique. En dehors des grandes chaînes éoliennes exploitées par les compagnies de production d'électricité, de plus petits dispositifs (petit ou micro éolien) sont développés pour la production domestique d'électricité, dans les sites favorables à leur implantation (vent suffisant et suffisamment régulier).

Dans cette partie, on étudie le principe de récupération par une éolienne de l'énergie cinétique transportée par le vent. Dans tout le problème, l'air atmosphérique sera assimilé à un fluide parfait et incompressible de masse volumique uniforme  $\rho = 1,25 \text{ kg.m}^{-3}$ . De plus, on se place dans une zone où l'on suppose le vent régulier c'est-à-dire modélisable, loin de tout obstacle, par un écoulement permanent et unidirectionnel de vitesse uniforme  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ .

1. Rappeler succinctement quel phénomène est à l'origine du déplacement de masses d'air à la surface de la Terre.

### 2. Puissance du vent

La puissance du vent, qui s'exprime en watt, est définie comme la puissance récupérable par une surface plane  $S$  placée dans le flux du vent.

- 2.1. Donner l'expression de l'énergie cinétique  $dE_c$  d'un système fluide fermé de masse  $dm$  se déplaçant à la vitesse d'ensemble  $\vec{v}_0$ .
- 2.2. Exprimer, en fonction de  $\rho$  et  $v_0$ , l'énergie cinétique volumique  $e_c$  du vent définie comme l'énergie cinétique des particules fluides par unité de volume.
- 2.3. On considère une surface  $S$  perpendiculaire à la direction d'écoulement du vent. Représenter et caractériser le volume contenant, à l'instant  $t$ , l'ensemble des particules fluides traversant la surface entre  $t$  et  $t+dt$ . En déduire l'expression de la quantité d'énergie  $dE_c$  reçue sous forme cinétique par la surface  $S$  pendant  $dt$ .
- 2.4. En déduire l'expression de la puissance du vent  $P_v$  récupérable par la surface  $S$  en fonction de  $\rho$ ,  $v_0$  et  $S$ .

### 3. Etude simplifiée de l'écoulement du vent en présence d'une hélice.

Dans toute la suite on travaillera dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on négligera l'effet de la pesanteur sur les particules fluides. L'écoulement est permanent.

L'étude est basée sur une théorie simple de l'hélice adaptée par Betz pour les éoliennes. Dans cette théorie l'hélice, pratiquement assimilée à un disque plan de surface  $S$  (c'est l'aire du disque dont la circonférence est décrite par l'extrémité de l'hélice lorsqu'elle tourne), est placée perpendiculairement à la direction de l'écoulement. On suppose connu le tube de



courant contenant le fluide traversant l'hélice. Ce tube de courant, représenté sur la figure 12 ci-dessous, possède une symétrie de révolution autour de l'axe  $xx'$  et une section droite circulaire d'aire  $S(x)$  variable.

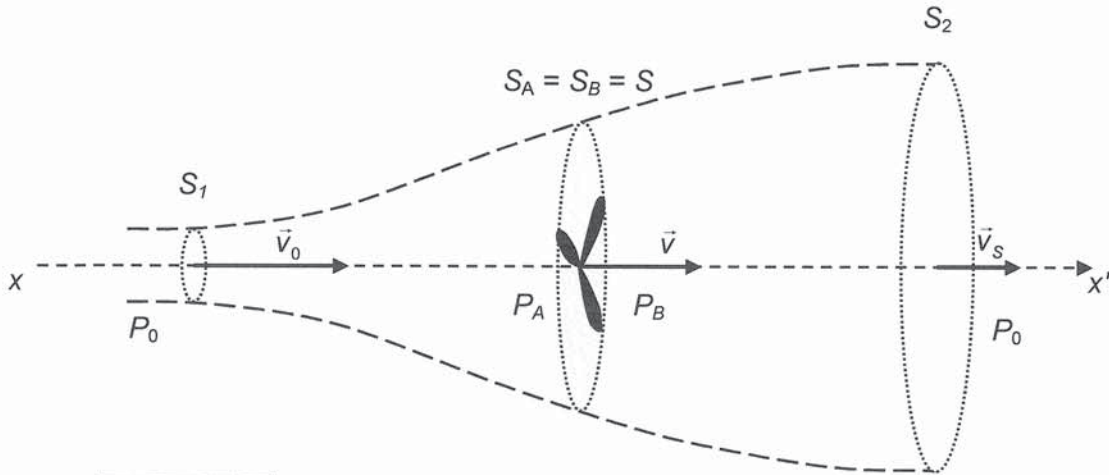


Figure 12

Dans la zone extérieure à ce tube de courant, l'écoulement est supposé non perturbé par la présence de l'hélice (vitesse uniforme  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ , pression uniforme et égale à la pression atmosphérique  $P_0$  à l'altitude considérée). A l'intérieur du tube de courant, l'écoulement est toujours supposé permanent et unidimensionnel (vitesse et pression uniformes sur une section droite du tube, le vecteur vitesse étant supposé en tout point orthogonal à la section droite du tube). Les surfaces d'entrée  $S_1$  et de sortie  $S_2$  sont suffisamment éloignées de l'hélice pour supposer que la pression y est égale à la pression atmosphérique environnante. La vitesse du fluide à l'entrée du tube est égale à  $\vec{v}_0$ . Sur toute autre section droite du tube, on notera  $\vec{v}(x)$  la vitesse d'écoulement. A la traversée du plan de l'hélice, les particules fluides subissent une discontinuité de pression  $\Delta P$ . En revanche, la vitesse des particules fluides est supposée continue à la traversée de ce plan.

3.1. Bilan de masse :

- 3.1.1. Définir et exprimer en fonction de  $\rho$ ,  $S(x)$  et  $v(x)$  le débit massique  $D_m$  à travers une section de surface  $S(x)$  du tube de courant placée à l'abscisse  $x$ .
- 3.1.2. Comment se traduit la conservation de la masse dans le cas d'un écoulement permanent ?
- 3.1.3. En déduire deux relations liant la vitesse de sortie  $v_s$  du tube, la vitesse  $v$  au niveau de l'hélice,  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $v_0$ .
- 3.1.4. Justifier l'augmentation, dans le sens de l'écoulement de l'air, de la section du tube de courant représenté sur la figure 12.

3.2. Bilan de quantité de mouvement :

- 3.2.1. Rappeler la deuxième loi de Newton (ou théorème de la quantité de mouvement) relative à un système continu fermé et définir la quantité de mouvement de ce système.

3.2.2. Pour effectuer un premier bilan, on définit le volume  $V_C$ , appelé volume de contrôle, délimité par le tube de courant et les sections d'entrée-sortie  $S_1$  et  $S_2$ . On considère le système fermé constitué des particules fluides contenues dans le volume  $V_C$  à l'instant  $t$ .

3.2.2.1. Sur un schéma reproduisant la figure, représenter les domaines occupés par le système fermé considéré, à l'instant  $t$  et à un instant ultérieur  $t + dt$ .

3.2.2.2. Sachant que l'écoulement est permanent, exprimer la variation de quantité de mouvement  $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)$  du système considéré en fonction de  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{v}_S$ ,  $D_m$  et  $dt$ .

3.2.2.3. Faire un bilan des forces s'appliquant sur le système fermé considéré ici. Que vaut la résultante de celles qui sont dues à la pression extérieure  $P_0$  ?

3.2.2.4. En déduire une expression de la force exercée par l'hélice sur le fluide en fonction de  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{v}_S$  et du débit massique  $D_m$  (cette relation porte le nom de théorème d'Euler).

3.2.3. On considère maintenant la portion de fluide contenue dans un volume cylindrique extra-plat délimité par les sections  $S_A$  et  $S_B$  d'aires égales à la section  $S$  balayée par l'hélice, situées respectivement en amont et en aval de l'hélice et sur lesquelles on note les pressions  $P_A$  et  $P_B$ , avec  $P_B - P_A = \Delta P$ .

3.2.3.1. Faire un nouveau bilan des forces s'exerçant sur le système fermé considéré.

3.2.3.2. En appliquant encore le théorème d'Euler, exprimer la force exercée par l'hélice sur le fluide en fonction de  $\Delta P$  et  $S$ .

3.2.4. Déduire des deux bilans précédents la relation suivante :

$$S\Delta P\vec{e}_x = D_m(\vec{v}_S - \vec{v}_0)$$

3.3. Bilan d'énergie :

3.3.1. Rappeler le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé en mouvement, en précisant la signification de chacune des notations utilisées. En quoi ce premier principe est-il un de principe de conservation ?

3.3.2. En régime permanent, que vaut la variation de la quantité  $(h+e_C)$  entre deux sections d'un tube d'écoulement d'un fluide parfait, en l'absence de pièce mécanique mobile ?

3.3.3. Rappeler la deuxième identité thermodynamique liant  $dh$ ,  $T$ ,  $ds$ ,  $dP$  et le volume massique, égal à  $1/\rho$ .

3.3.4. Déduire des réponses à ces deux dernières questions, la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant dans le cas d'un écoulement réversible (hypothèse des fluides parfaits), permanent et incompressible.

3.3.5. Appliquer la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre les sections  $S_1$  et  $S_A$  situées en amont de l'hélice, puis entre les sections  $S_B$  et  $S_2$  situées en aval de l'hélice (on note  $\vec{v}$  la vitesse du fluide au niveau des sections  $S_A$  et  $S_B$ ).

3.3.6. En déduire que la discontinuité de pression peut s'écrire  $\Delta P = \frac{1}{2}\rho(v_S^2 - v_0^2)$ .

Cette discontinuité de pression correspond à la perte de charge à la traversée du plan de l'hélice.

#### 4. Rendement de l'éolienne

4.1. Montrer que la vitesse du fluide au voisinage de l'hélice vaut  $v = \frac{1}{2}(v_0 + v_s)$ .

4.2. Montrer que la force **exercée par le fluide sur l'hélice** s'écrit  $\vec{F} = 2D_m(v_0 - v)\vec{e}_x$ .

On admet dans la suite que la puissance  $P_h$  reçue par l'hélice est égale au produit  $F.v$ .

4.3. On définit le rendement  $\eta$  de l'hélice comme le rapport de la puissance qu'elle reçoit à la puissance cinétique reçue, **en l'absence d'hélice**, par une section  $S$  :  $\eta = \frac{P_h}{P_v}$ .

4.3.1. Exprimer  $\eta$  en fonction du rapport  $\lambda = \frac{v}{v_0}$ .

4.3.2. Montrer que  $\eta$  a une valeur maximale  $\eta_m$  (appelée facteur de Betz de l'éolienne) pour une certaine valeur de  $\lambda$  que l'on calculera.

4.3.3. Application numérique : calculer  $\eta_m$ .

4.3.4. Il est à remarquer qu'en réalité ce rendement maximal n'est jamais atteint, mais qu'il représente une limite théorique infranchissable de la quantité d'énergie du vent récupérable par une éolienne.

Citer d'autres facteurs qui peuvent encore limiter le rendement de production d'électricité par une éolienne.

FIN DE L'ENONCE