EAE SPA 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2009

# CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS

## Section : SCIENCES PHYSIQUES
## Option A : PHYSIQUE

## COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

**Tournez la page S.V.P.**

# Modèles physiques de quelques instruments de musique et acoustiques

Ce problème s'intéresse à quelques aspects de la physique des instruments de musique.

La première partie étudie un modèle simple d'instrument à corde, dans lequel seule la physique de la corde vibrante intervient (les effets du couplage entre la corde et l'instrument ne sont pas évoqués).

La deuxième partie propose une étude simplifiée de certains instruments à percussion, à partir des modes de vibrations d'une membrane (là encore, les effets du couplage de la membrane avec le corps de l'instrument ne sont pas pris en compte).

La troisième partie aborde l'étude des instruments à vent, modélisés par de simples tuyaux sonores.

Enfin, la quatrième partie s'intéresse à la restitution d'un son par un haut-parleur, et à l'onde sonore rayonnée par la membrane de celui-ci.

Les quatre parties sont indépendantes.

La description d'une expérience doit comporter un schéma explicatif et le protocole expérimental.

Dans tout le problème, on note $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ la base des coordonnées cartésiennes. Les grandeurs complexes sont soulignées.

## Première partie

# Corde vibrante - Instruments à cordes

Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur $L$. Le rayon du cylindre est $a$ avec $a \ll L$.

On commence par étudier le modèle de la corde sans raideur, qui fait l'objet des questions **A.** à **D.**. On néglige l'effet de la pesanteur dans les questions **A.** à **C.** et dans la question **E.**. Cet effet est étudié dans la question **D.**. Enfin, la raideur de la corde est prise en compte dans la question **E.**.

### A. Équation de propagation de l'ébranlement

La corde de masse linéique $\mu$ est tendue avec la tension $T_0$. Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal $(Ox)$.

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse $x$ à l'instant $t$. L'axe $Oy$ est l'axe vertical ascendant.

On fait les hypothèses suivantes :

(1) Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe $Ox$, ce qui entraîne : $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$.

(2) La tension de la corde en mouvement est : $T(x,t) = T_0 + T_1(x,t)$ avec $|T_1(x,t)| \ll T_0$ et $\dfrac{|T_1(x,t)|}{T_0}$ infiniment petit du même ordre ou d'un ordre supérieur à $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|$.

(3) On ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x,t)$ et en ses dérivées.

(4) On néglige les effets de la pesanteur.

**1. a)** On considère l'élément de corde de longueur $\mathrm{d}\ell$ situé entre les plans d'abscisses $x$ et $x + \mathrm{d}x$.

Montrer que :

$$\mathrm{d}\ell \simeq \mathrm{d}x$$

au premier ordre en $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|$.

**b)** Appliquer le théorème de la résultante cinétique à cet élément de corde et le projeter sur $\overrightarrow{e_y}$. En déduire que l'ébranlement $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)$$

où $c$ est une grandeur à exprimer en fonction de $T_0$ et $\mu$.

**2. a)** Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue pour $c$.

**b)** Donner sans démonstration la forme générale des solutions de l'équation (1).

**c)** Calculer $c$ pour :

- une corde de guitare : masse linéique $\mu = 3$ g.m$^{-1}$, tension $T_0 = 103$ N ;
- une corde de piano : masse volumique $\rho = 7800$ kg.m$^{-3}$, tension $T_0 = 850$ N, diamètre $\phi = 1,2$ mm.

Commenter les valeurs obtenues.

## B. Corde fixée à ses deux extrémités, modes propres

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

### 1. Modes propres, fréquences propres

**a)** Qu'appelle-t-on *onde stationnaire* ?

**b)** Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (1) sont de la forme :

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

Quelle est la relation entre $\omega$ et $k$ ?

**c)** Définir les *modes propres* et les *fréquences propres* de la corde.

**d)** Montrer que les fréquences propres de la corde sont :

$$f_n = n\frac{c}{2L}$$

**e)** Définir les *ventres* et les *nœuds* de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? entre deux nœuds consécutifs ? entre un ventre et un nœud consécutifs ?

**f)** Dessiner l'aspect de la corde à différents instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

**g)** Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

**h)** On considère les cordes dont on a donné les caractéristiques à la question **A.**2c.

La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré$_2$). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

### 2. Solution générale

On admet que la solution générale de l'équation (1) correspondant aux conditions aux limites $y(0,t) = y(L,t) = 0$ est une superposition des modes propres. On l'écrit sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2)$$

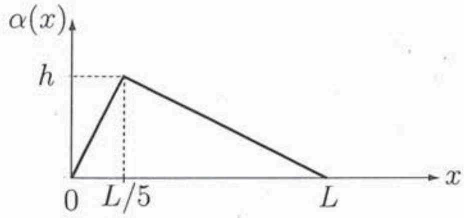
Les conditions initiales sont constituées par la donnée de :

- la forme de la corde : $y(x,0) = \alpha(x)$,
- sa vitesse : $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x)$,

où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions définies sur $[0,\ L]$.

**a)** Montrer que les coefficients $a_n$ et $b_n$ se déduisent simplement de la décomposition en série de Fourier des fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaires, périodiques de période $2L$ et qui coïncident avec $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sur l'intervalle $[0,\ L]$.

**b)** On donne la fonction $\alpha(x)$ :



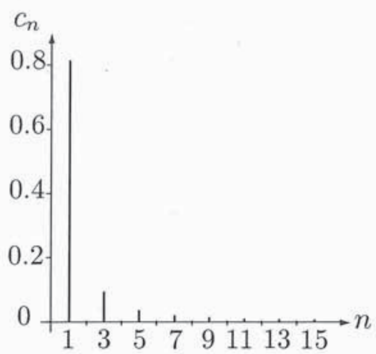

Illustrer graphiquement la construction de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$.

### 3. Corde pincée

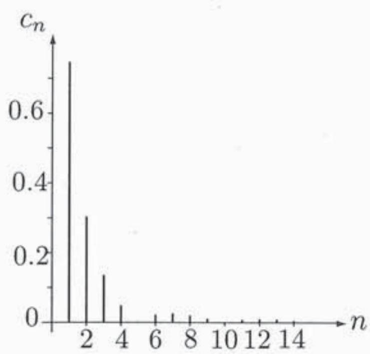
Une corde de longueur $L$ est pincée puis lâchée sans vitesse à l'instant $t = 0$ (corde de guitare ou de clavecin par exemple).

**a)** Que valent les coefficients $b_n$ ? Comment peut-on déterminer les coefficients $a_n$ (*la détermination de ces coefficients n'est pas demandée ici*) ?

**b)** On donne les spectres calculés pour une corde pincée à la moitié de sa longueur puis au cinquième de celle-ci, où $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ :



Corde pincée en $L/2$



Corde pincée en $L/5$

Comment peut-on expliquer, dans le cadre de la modélisation précédente, l'absence de certains harmoniques ?

On pourra calculer les coefficients de Fourier de la fonction dérivée de $\tilde{\alpha}(x)$ pour obtenir simplement ceux de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$. On rappelle que si $f(t)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes, périodique de période $T$, les coefficients de Fourier de $f(t)$ sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(2\pi n\dfrac{t}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N} \\ b_n = \dfrac{2}{T_s}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin\left(2\pi n\dfrac{t}{T}\right)\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

les coefficients ne dépendant pas de l'instant $t_0$ choisi pour le calcul.

**4. Corde frappée**

Une corde de piano est frappée par un petit marteau à la distance $x_0 = sL$ de son extrémité $x = 0$.

**a)** Que valent maintenant les coefficients $a_n$ ? Quelle valeur faut-il donner à $s$ si on veut rendre l'amplitude de l'harmonique $n$ la plus petite possible ?

**b)** On peut montrer que les coefficients $a_n$ associés à la corde pincée étudiée à la question **B.**3 décroissent globalement comme $\dfrac{1}{n^2}$. En revanche les amplitudes des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en $\dfrac{1}{n}$ (au moins à partir d'une certaine valeur de $n$).

Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées).

**5. Limites du modèle**

Quel phénomène essentiel a été oublié (on ne s'intéresse pas ici au couplage entre la corde et l'instrument mais uniquement à la vibration de la corde) ?

## C. Étude énergétique

**1. a)** Exprimer la densité linéique d'énergie cinétique $e_C$ de la corde en mouvement en fonction de $\mu$ et de $\dfrac{\partial y}{\partial t}$.

**b)** On étudie la portion de corde située entre les abscisses $x$ et $x + \mathrm{d}x$. Dans cette question, il est conseillé de travailler avec les variables $T_y = T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}$ et $v = \dfrac{\partial y}{\partial t}$.

**i)** Exprimer la puissance des forces extérieures à ce système.

**ii)** En appliquant le théorème de la puissance cinétique à ce système, exprimer la puissance des forces intérieures.

**iii)** En déduire que l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_P(x,t) = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

en prenant l'énergie potentielle nulle quand la corde est au repos.

**2. a)** On étudie la corde dans le mode propre $n$. L'ébranlement est écrit sous la forme :

$$y_n(x,t) = c_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode $n$ s'écrit :

$$E_n = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2}{4L} T_0$$

**b)** On considère maintenant la solution générale sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie $E$ de la corde est :

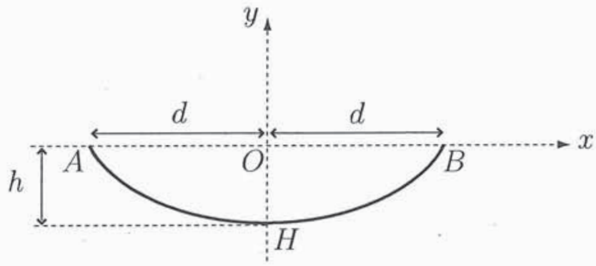
$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

Commenter.

**3.** On a vu précédemment que les amplitudes des différents harmoniques d'une corde pincée sont de la forme $c_n = \dfrac{c_1}{n^2}$ alors que ceux d'une corde frappée sont de la forme : $c'_n = \dfrac{c'_1}{n}$. Comparer les énergies des différents modes d'une corde de clavecin (corde pincée) et d'une corde de piano (corde frappée). Commenter.

## D. Influence de la pesanteur

Pour étudier les effets de la pesanteur, nous allons faire le calcul exact de la forme d'une corde parfaitement souple tendue entre deux points $A$ et $B$ situés à la même altitude, comme sur la figure ci-dessous. Nous appliquerons ensuite les résultats obtenus aux cordes d'instruments de musique.




Dans cette question **D.** et dans celle-là uniquement, les déformations ne sont plus considérées comme petites.

**1.** On considère l'élément de corde compris en $x$ et $x + \mathrm{d}x$.

**a)** Quelle est la relation entre $\mathrm{d}\ell$, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ ?

**b)** Écrire l'équation vectorielle traduisant l'équilibre de ce système.

**c)** Montrer que la projection de la tension sur $Ox$ est uniforme. On note $T_0$ cette projection.

**d)** Montrer enfin que la fonction donnant la forme de la corde $y(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{T_0}{\mu g}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \qquad (3)$$

**2.** On pose $\delta = \dfrac{T_0}{\mu g}$. Quelle est la dimension de $\delta$ ?

**3.** **a)** Montrer que la solution de l'équation (3) est :

$$y(x) = \delta\ \left(\mathrm{ch}\frac{x}{\delta} - 1\right) - h$$

On rappelle que :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \mathrm{argsh}\,u$$

**b)** Calculer la longueur de la corde en fonction de $d$ et $\delta$.

**c)** En déduire la relation :

$$h = \delta\left(\sqrt{1+\frac{L^2}{4\delta^2}} - 1\right)$$

**d)** Calculer $h$ pour une corde de guitare de masse $m = 1,9$ g, de longueur $L = 63$ cm, telle que $T_0 = 103$ N. On prendre $g = 10$ m.s$^{-2}$.

Le fait de négliger la pesanteur dans les questions précédentes est-il justifié ?

## E. Prise en compte de la raideur de la corde

Dans cette question, on suppose que la corde est cylindrique de rayon $a$ et qu'elle est faite en acier, de masse volumique $\rho = 7800$ kg.m$^{-3}$ et de module d'Young $E = 190\ 10^9$ U.S.I.. La pesanteur n'est plus prise en compte et les déformations sont de nouveau considérées comme petites.

**1.** Rappeler la définition du module d'Young et préciser son unité.

**2.** On considère une déformation de cette corde dans le plan $xOy$ comme précédemment.

La théorie de l'élasticité montre que la tension $\overrightarrow{T}$ n'est plus tangente à la corde et que, pour permettre la courbure de la corde, il faut un couple de moment $\overrightarrow{\Gamma} = \pm\Gamma_z(x,t)\overrightarrow{e_z}$ qui s'exprime, dans le cadre de notre étude, par :

$$\Gamma_z(x,t) = ESK^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (4)$$

où $S$ la section de la corde et $K$ un coefficient dépendant de la forme de la section droite de la corde, égal à $K = \dfrac{a}{2}$ pour une corde cylindrique.

La portion de corde comprise entre les points d'abscisse $x$ et $x + \mathrm{d}x$ est donc soumise aux deux tensions :

$$\overrightarrow{T}_g(x,t) = -\big(T_x(x,t)\overrightarrow{e_x} + T_y(x,t)\overrightarrow{e_y}\big) \quad \text{en} \quad x$$

et :

$$\overrightarrow{T}_d(x+\mathrm{d}x,t) = T_x(x+\mathrm{d}x,t)\overrightarrow{e_x} + T_y(x+\mathrm{d}x,t)\overrightarrow{e_y} \quad \text{en} \quad x+\mathrm{d}x$$

et aux deux couples :

$$-\Gamma_z(x,t)\overrightarrow{e_z} \quad \text{en} \quad x$$

et :

$$\Gamma_z(x+\mathrm{d}x,t)\overrightarrow{e_z} \quad \text{en} \quad x+\mathrm{d}x$$

dont le moment est donné par l'expression (4).

**a)** Vérifier l'homogénéité de l'expression (4).

**b)** En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la tranche $\{x, x+\mathrm{d}x\}$, montrer que $T_x$ ne dépend que du temps.

On supposera que $T_x$ est constante et on la prendra égale à $T_0$.

Établir une relation différentielle entre $T_y$ et $y$.

**c)** En appliquant le théorème du moment cinétique au centre de masse de la tranche $\{x, x+\mathrm{d}x\}$, établir une nouvelle relation différentielle entre $T_y$, $\Gamma_z$ et $y$. On justifiera le fait que le moment d'inertie de ce système est d'ordre 3 en $\mathrm{d}x$ donc négligeable à l'ordre d'approximation envisagé.

**d)** En déduire l'équation de propagation :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ESK^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

### 3. Modification des fréquences propres

**a)** En supposant que la déformation est harmonique, donc de la forme :

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t)\cos(kx+\varphi)$$

donner la relation entre $\omega$ et $k$.

**b) i)** Dans le cas où la raideur de la corde reste faible, montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre $x = 0$ et $x = L$ se mettent sous la forme :

$$f_n = n\frac{c}{2L}\sqrt{1+Bn^2}$$

où $c$ est la célérité des ondes dans la corde sans raideur et $B$ une constante à exprimer en fonction de $E$, $S$, $K$, $T_0$ et $L$.

**ii)** Tracer, sur le même graphique, les courbes représentant $f_n$ en fonction de $n$ pour une corde sans raideur puis pour une corde avec raideur.

**iii)** Pour une corde de piano étudiée plus haut, on donne : $B = 4\ 10^{-4}$. À partir de quelle valeur de $n$ la fréquence propre de la corde avec raideur est-elle plus aiguë d'un demi-ton que celle de la corde idéale ? On rappelle que la gamme tempérée divise l'octave en 12 intervalles, appelés *demi-tons*, et que les fréquences successives $f_p$ des notes espacées par ces demi-tons forment une suite géométrique vérifiant la loi générale $f_p = 2^{p/12} f$ où $p \in [1, 12]$ ($p$ entier).

# Deuxième partie

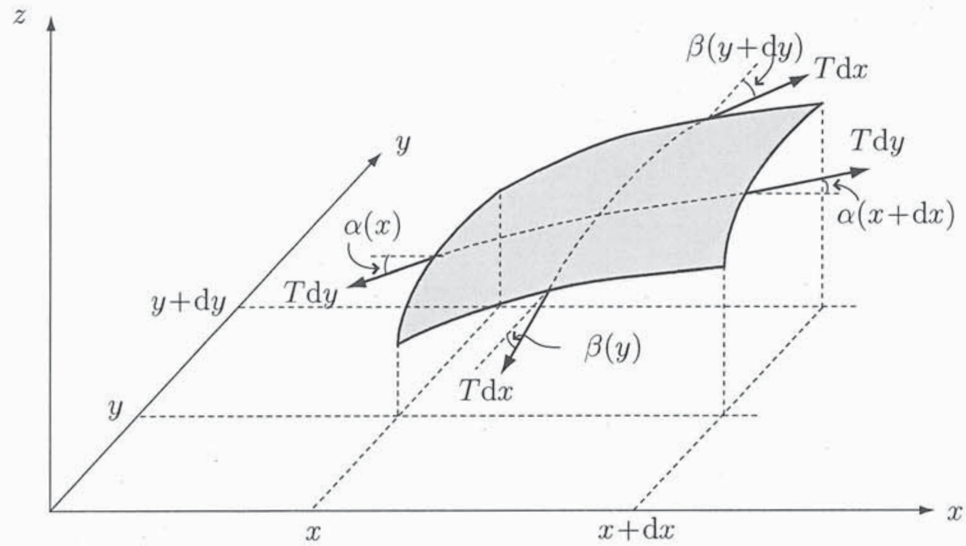
# Membranes vibrantes - Instruments à percussion

Dans cette partie, on étudie les vibrations d'une membrane élastique, sans raideur, de masse surfacique $\sigma$, tendue avec la tension $T$. La tension d'une membrane est définie de la façon suivante : pour un petit élément de longueur $\mathrm{d}l_M$ de la membrane, situé au point $M$, orthogonal à la direction $\overrightarrow{n_M}$, la membrane exerce la force $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = T\mathrm{d}l\overrightarrow{n_M}$, le vecteur unitaire $\overrightarrow{n_M}$ étant tangent à l'élément de surface.

Nous n'étudierons que les petits mouvements transverses d'une membrane horizontale quand elle est au repos. Dans ce cas, nous admettrons que $T$ est une constante, indépendante du point et de la direction de la force.

Le petit élément de surface $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ autour du point $M$ de coordonnées $(x, y)$ qui était sur le plan $z = 0$ quand la membrane est au repos se trouve en $z(x, y, t)$ quand celle-ci est en mouvement.

Un élément de membrane est donc soumis aux forces suivantes :




On néglige les effets de la pesanteur.

## A. Équation de propagation de la déformation

**1.** Les angles $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ sont faibles. Montrer que la résultante des forces de tension agissant sur le petit élément de membrane ci-dessus s'écrit, en première approximation :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_T} = T\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \overrightarrow{e_z}$$

**2.** En déduire l'équation de propagation de la déformation $z(x, y, t)$.

**3. a)** Quelle est la célérité des ondes $c$ dans la membrane ?

**b)** Retrouver ce résultat par un simple argument dimensionnel en supposant que $c$ s'écrit sous la forme : $c = T^\alpha \sigma^\beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres rationnels.

**c)** On donne : $T = 3990$ N.m$^{-1}$ et $\sigma = 0,35$ kg.m$^{-2}$. Calculer la valeur numérique de $c$.

**B. Modes propres d'une membrane circulaire**

La membrane est un disque de rayon $a$ fixée rigidement sur sa circonférence. On donne le laplacien en coordonnées polaires $(r,\theta)$ :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

On cherche des solutions sous la forme $z(r,\theta,t) = F(r)G(\theta)H(t)$.

**1.** Montrer que $H(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme :

$$H''(t) = KH(t)$$

où $K$ est une constante. Pourquoi choisit-on cette constante négative ? Dans la suite, on posera $K = -\omega^2$.

**2. a)** Montrer que $G(\theta)$ vérifie une équation différentielle de la même forme :

$$G''(\theta) = K'G(\theta)$$

où $K'$ est une constante.

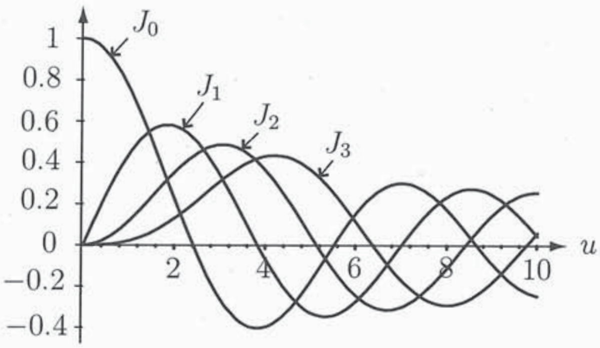
**b)** En posant $K' = -4\pi^2 m^2$, montrer que $m$ est nécessairement entier.

**3. a)** Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $F(r)$ ?

**b)** Montrer que, par un changement de variable $u(r)$ à préciser, cette équation se met sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} + \left(1 - \frac{m^2}{u^2}\right)F(u) = 0$$

**c)** Les solutions de cette équation qui gardent une valeur finie en $u = 0$ sont les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(u)$ dont les graphes sont données par la figure suivante (pour $m = 0, 1, 2$ et $3$) :




D'autre part, $J_{-m} = J_m$.

On appelle $\xi_{m,n}$ le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction $J_m$. Les premières valeurs de $\xi_{m,n}$ sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ |
|---|---|---|---|---|
| $m=0$ | 2,405 | 5,520 | 8,654 | 11,792 |
| $m=1$ | 3,832 | 7,016 | 10,173 | 13,324 |
| $m=2$ | 5,136 | 8,417 | 11,620 | 14,796 |
| $m=3$ | 6,380 | 9,761 | 13,015 | 16,223 |

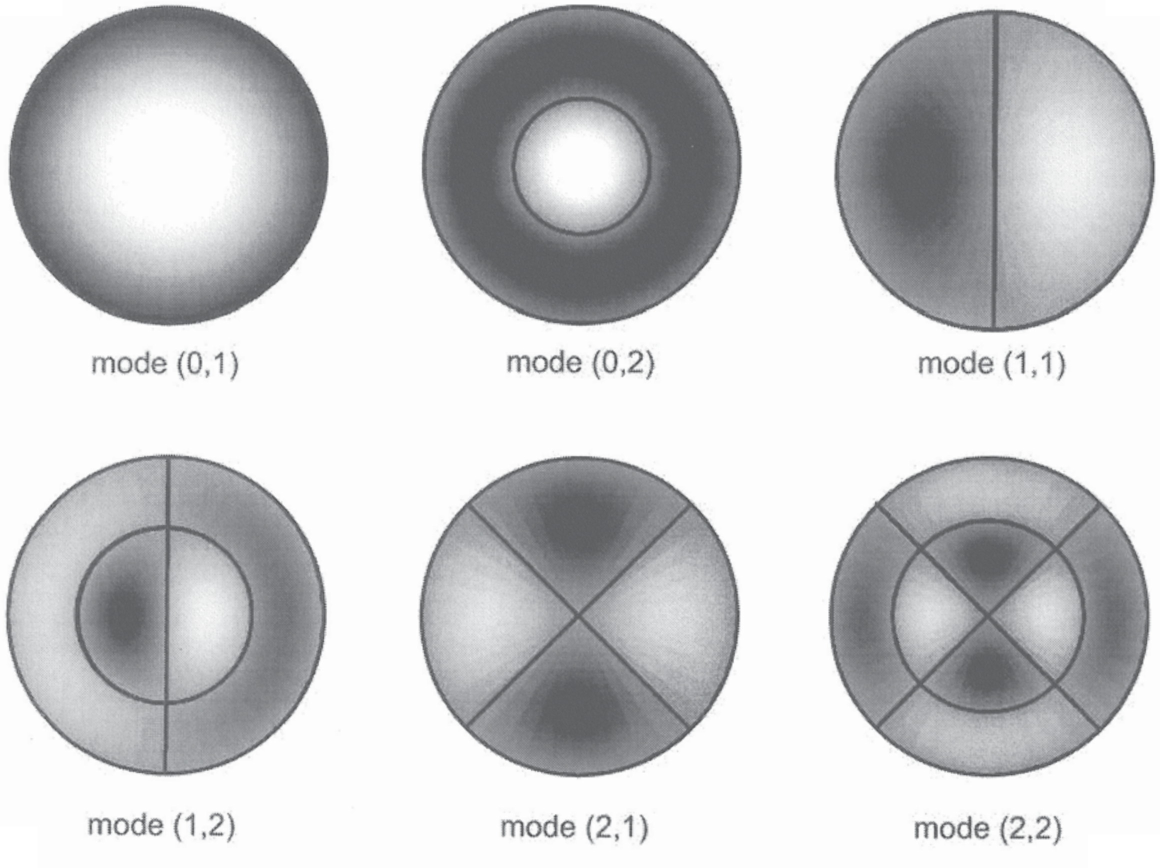
Quelles sont les conditions aux limites que doit satisfaire $z(r,\theta,t)$ ? En déduire les fréquences propres $f_{m,n}$ de la membrane en fonction de $a$, $c$ et de $\xi_{m,n}$.

**d)** Montrer que $f_{-m,n} = f_{m,n}$. Dans toute la suite, on prendra une superposition des solutions correspondant à $m$ et $-m$, paire en $\theta$. La solution correspondant à une valeur du couple $(m, n)$ où $m \geq 0$ est appelée *mode propre* $(m, n)$.

**4. a)** Calculer la fréquence propre la plus basse pour la membrane étudiée à la question **A.**3c, de diamètre 65 cm.

**b)** Calculer les fréquences correspondant aux modes $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(2, 2)$. Les différentes fréquences propres sont-elles multiples de la fréquence du fondamental ? Quelle en est la conséquence pour le son émis par la membrane ? Qu'en est-il du son émis par l'instrument lui-même ?

**c)** Les figures ci-dessous représentent l'aspect de la membrane vue de dessus à un instant fixé. La valeur de $z(M, t)$ a été convertie en niveaux de gris (blanc pour les maxima, noir pour les minima).




Vérifier la cohérence de ces simulations avec les résultats obtenus. On déterminera en particulier les lignes nodales, c'est-à-dire les points de la membrane qui restent immobiles, représentées en traits continus sur la figure.

**d)** Citer des techniques expérimentales permettant de visualiser ces déformations.