

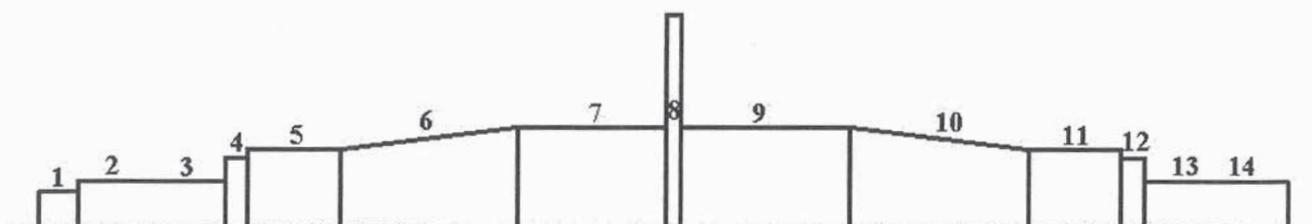
PARTIE 4 – DEFORMATION STATIQUE DE L'ARBRE

Comme on peut le constater sur la figure d'ensemble donnée en présentation (page 2), la fixation de la roue sur l'arbre n'est pas tout à fait dans le plan médian des deux paliers. Du fait de la flexion due à la pesanteur, cela peut engendrer une légère rotation selon l'axe horizontal \vec{x} . Cette rotation d'ensemble a pour conséquence de modifier le positionnement axial des aubes du rotor, le phénomène étant plus important au rayon extérieur de la roue. De ce fait on peut craindre que le jeu entre la roue portant les aubages et le stator ne soit plus suffisant et qu'il y ait friction. Il ne faut pas perdre de vue que pour des raisons de rendement hydraulique, ce jeu doit être minimisé. Il est donc important de connaître le déplacement axial des aubages de la roue pour optimiser la valeur de ce jeu.

Nous proposons donc de déterminer la flèche de l'arbre ainsi que la rotation de la section médiane de l'arbre sous l'application des effets de la pesanteur. Le tableau suivant donne les caractéristiques dimensionnelles en millimètre de l'arbre :

Numéro de l'élément	1	2	3	4	5	6	7
Abscisse début	0	260	730	1200	1350	1950	3100
Abscisse fin	260	730	1200	1350	1950	3100	4050
Diamètre début	240	305	305	455	510	510	660
Diamètre fin	240	305	305	455	510	660	660

Numéro de l'élément	8	9	10	11	12	13	14
Abscisse début	4050	4150	5250	6400	7000	7150	7620
Abscisse fin	4150	5250	6400	7000	7150	7620	8090
Diamètre début	1390	660	660	510	455	305	305
Diamètre fin	1390	660	510	510	455	305	305



L'élément 1 assure la liaison avec l'accouplement et le moteur d'entraînement.

Les éléments 2, 3, 13 et 14 représentent les portées des deux paliers.

Les éléments 4 et 12 permettent l'assemblage sur l'arbre de petites roues de ventilateurs assurant le refroidissement des paliers.

Les éléments 5, 6, 7, 9, 10 et 11 contribuent à une variation progressive du diamètre de l'arbre.

L'élément 8 est un flasque sur lequel est fixée la roue du ventilateur.

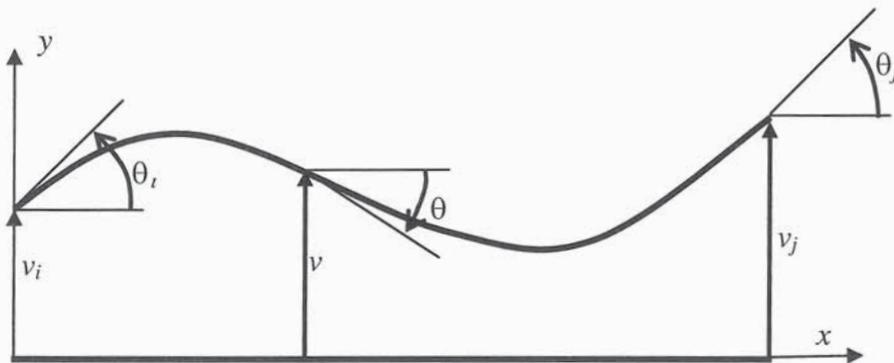
La liaison entre l'arbre et la roue est faite à l'abscisse $x = 4\,150$ mm.

Le matériau utilisé a une loi de comportement élastique linéaire caractérisée par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν . Sa masse volumique est ρ .

Compte tenu de la complexité de la géométrie, on se propose d'utiliser la méthode des éléments finis pour déterminer la déformée en flexion de l'arbre en considérant un simple problème plan et en négligeant les effets de traction – compression.

Dans un premier temps, il faut déterminer la matrice de rigidité d'un élément de poutre travaillant en flexion en négligeant les effets de l'effort tranchant (modèle de Bernoulli). On travaille dans un repère local associé à l'élément étudié, x représentant la variable de positionnement le long de l'arbre. Le déplacement d'une section droite courante est défini par la translation transversale v et la rotation de section $\theta = \frac{dv}{dx}$. Les degrés de liberté sont les

translations transversales et rotations de section des extrémités de poutre ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$). La section droite de la poutre est circulaire avec une variation linéaire du diamètre en fonction de l'abscisse x . L'ordonnée y du plan de flexion représente l'axe vertical ascendant.



- 4-1 On utilise une fonction d'interpolation (ou fonction de forme) polynomiale du troisième degré pour l'expression du champ de déplacement transversal v . Expliciter cette fonction vis-à-vis des variables nodales ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$), de l'abscisse x et de la longueur de l'élément $l = x_j - x_i$. On présentera le résultat sous la forme matricielle suivante:

$$v = (N_1, N_2, N_3, N_4) \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = [N^e]^T [U^e] \quad \text{avec} \quad [U^e] = \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

- 4-2 Donner l'expression de l'énergie de déformation W_{def}^e d'un élément de poutre droite de section variable sollicitée en flexion en fonction du module d'Young du matériau E , du moment quadratique I et du moment de flexion M_f d'une section courante.
- 4-3 Montrer que cette énergie de déformation peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$W_{def}^e = \frac{1}{2} [U^e]^T [K^e] [U^e]$$

- 4-4 Le diamètre de l'élément N° 6 varie selon linéairement selon l'abscisse x suivant la loi :

$$D = \frac{x}{l} D_i + \left(\frac{l-x}{l} \right) D_j = \frac{x}{l} 660 + \left(\frac{l-x}{l} \right) 510$$

Les grandeurs élastiques du matériau sont :

Module d'Young : $E = 206 \text{ GPa}$

Coefficient de Poisson : $\nu = 0,27$

Calculer la valeur numérique du premier terme (K_{11}) de la matrice $[K]$ en utilisant la méthode d'intégration de Gauss-Legendre avec trois points (cf annexe 3).

- 4-5 Montrer que le travail des forces de pesanteur exercées sur l'élément peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$W_{pes} = [F_{pes}^e]^T [U^e] \quad \text{avec} \quad [F_{pes}^e] = \begin{pmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{pmatrix}$$

- 4-6 La masse volumique du matériau est : $\rho = 7\,850 \text{ kg/m}^3$
Calculer la valeur numérique du deuxième terme M_i du vecteur $[F_{pes}^e]$ pour l'élément N°6 en utilisant la méthode d'intégration de Gauss-Legendre avec trois points.

- 4-7 A partir des résultats précédents, on envisage une modélisation de l'arbre en deux éléments. Le premier élément I commence au milieu du premier palier ($x = 730 \text{ mm}$) et va jusqu'à la liaison arbre - roue ($x = 4\,150 \text{ mm}$). Le deuxième élément II commence de la liaison arbre - roue et va jusqu'au milieu du second palier ($x = 7620 \text{ mm}$). Les applications numériques faites à partir des formules précédentes conduisent à (dans le Système International d'unités) :

$$[K^I] = \begin{pmatrix} 202\,550 & 136\,110 & -202\,500 & 556\,600 \\ 136\,110 & 215\,490\,000 & -136\,110 & 250\,007\,000 \\ -202\,500 & -136\,110 & 202\,550 & -556\,600 \\ 556\,600 & 250\,007\,000 & -556\,600 & 1\,653\,564\,200 \end{pmatrix} \quad [F_{pes}^I] = \begin{pmatrix} 18\,16 \\ 5\,720 \\ 56\,313 \\ -34\,669 \end{pmatrix}$$

$$[K^{II}] = \begin{pmatrix} 182\,070 & 504\,820 & -182\,070 & 126\,950 \\ 504\,820 & 1\,522\,615\,400 & -504\,820 & 229\,126\,900 \\ -182\,070 & -504\,820 & 182\,070 & -126\,950 \\ 126\,950 & 229\,126\,900 & -126\,950 & 211\,389\,620 \end{pmatrix} \quad [F_{pes}^{II}] = \begin{pmatrix} 47\,350 \\ 32\,896 \\ 19\,396 \\ -6\,271 \end{pmatrix}$$

La roue, dont le diamètre extérieur est $D_2 = 4,2 \text{ m}$, a un poids $P = 93\,600 \text{ N}$.

On considère dans un premier temps que les paliers ont une raideur en rotation selon l'axe perpendiculaire au plan de flexion très grande et que l'on peut prendre un modèle d'arbre encasté à ses deux extrémités.

Calculer le déplacement vertical et la rotation de la section de liaison entre l'arbre et la roue. Que peut-on conclure vis-à-vis de la problématique initiale ?

- 4-8 En fait les paliers ont une raideur non infinie (cf partie 3). Comment faut-il reprendre les calculs précédents pour tenir compte de ces raideurs ?

PARTIE 5 – DIMENSIONNEMENT DU DISQUE

Le disque de liaison entre le moyeu et la roue du ventilateur est une pièce majeure qu'il convient de dimensionner correctement. Ce disque est fixé par une double couronne de boulons sur un grand flasque-épaulement appartenant au moyeu et situé approximativement à mi longueur entre les paliers. La liaison entre le disque et la roue est obtenue par une soudure pénétrante sur le grand rayon du disque R_1 qui est aussi le rayon intérieur de la roue. L'épaisseur du disque e_d est constante.

Dans un premier temps (partie 5-1), on déterminera les caractéristiques d'une roue pleine équivalente du point de vue efforts centrifuges à la roue réelle et on évaluera le chargement dû à l'effet aéraulique. Dans un deuxième temps (partie 5-2), on déterminera l'état de contrainte dans le disque de liaison.

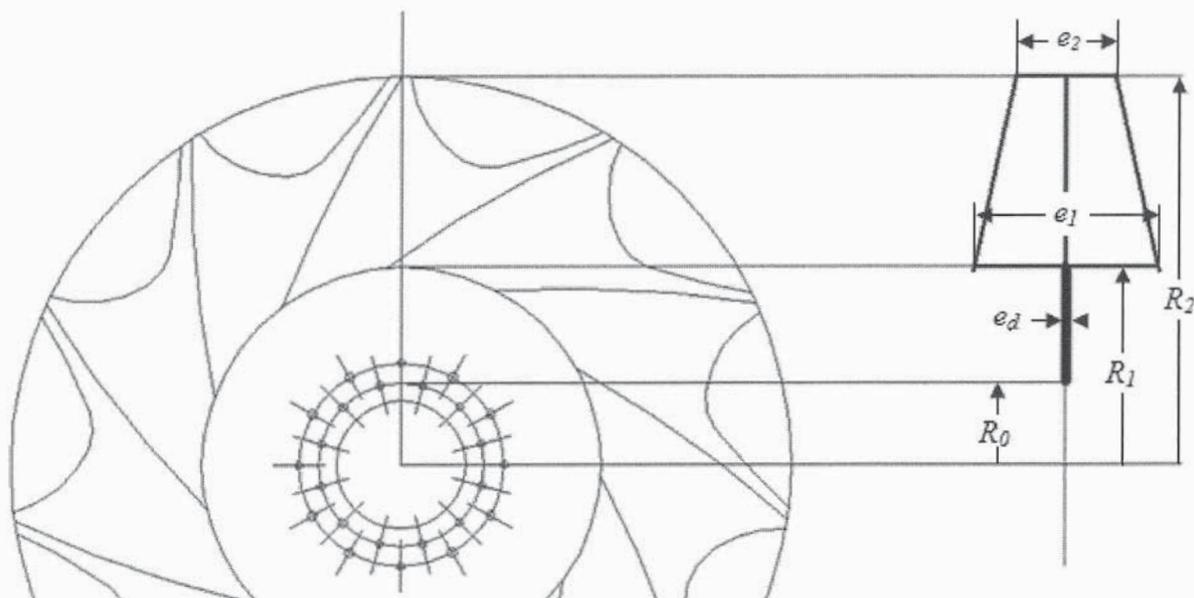
Les deux sous parties peuvent être traitées de façons indépendantes.

Partie 5-1 : Roue équivalente

On isole donc une pièce constituée d'un disque d'épaisseur e_d , de rayon intérieur R_0 (défini comme étant le rayon de la deuxième couronne de boulonnage) et de rayon extérieur R_1 .

Dans un premier temps, on considère que les effets centrifuges dus à la rotation de la roue sont prépondérants devant les effets aérauliques dus à l'écoulement du fluide entre les aubages.

De ce fait on approxime ces efforts à une densité surfacique d'effort q normale à la surface cylindrique de rayon R_1 . Pour évaluer cette densité surfacique d'effort, on considère que la roue est équivalente à un disque plein homogène de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de masse volumique ρ_r . La section de ce disque est en forme de trapèze distribué symétriquement par rapport au plan de section droite de l'arbre. Au rayon intérieur R_1 , l'épaisseur de ce disque est e_1 alors qu'au rayon extérieur R_2 l'épaisseur est e_2 . L'épaisseur du disque se présente donc sous forme d'une variation linéaire en fonction du rayon soit une équation de la forme $e = a.r + b$.



- 5-1-1 Donner les expressions des constantes a et b en fonction des paramètres dimensionnels (R_1, R_2, e_1, e_2) .
- 5-1-2 La masse du disque est égale à la masse de la roue de ventilateur soit m . Déterminer l'expression de la masse volumique équivalente ρ_r en fonction des constantes a et b et des rayons R_1 et R_2 . On pourra poser $K_1 = \frac{a}{3}(R_2^3 - R_1^3) + \frac{b}{2}(R_2^2 - R_1^2)$.
- 5-1-3 Ce disque est entraîné à la fréquence de rotation $\omega = \frac{\pi N}{30}$ de la roue (constante). Déterminer l'expression de la densité surfacique d'effort q en fonction des paramètres dimensionnels (R_1, R_2, e_d) , des constantes a et b et de la fréquence de rotation ω . On pourra poser $K_2 = \frac{a}{4}(R_2^4 - R_1^4) + \frac{b}{3}(R_2^3 - R_1^3)$.
- 5-1-4 Faire l'application numérique avec les données suivantes:
 $R_1 = 1,05 \text{ m}$ $R_2 = 2,1 \text{ m}$ $e_1 = 1 \text{ m}$ $e_2 = 0,5 \text{ m}$ $e_d = 60 \text{ mm}$
 $m = 9\,500 \text{ kg}$ $N = 736 \text{ tr/min}$
 Les valeurs numériques de a , b , K_1 , K_2 , ρ_r et q seront exprimées dans le système international d'unités.
- 5-1-5 Afin de vérifier l'hypothèse concernant les effets aérauliques, on veut approximer le chargement dû à l'écoulement fluide entre les aubes de la roue en couronne périphérique du disque, c'est-à-dire au rayon intérieur R_1 . La puissance motrice nécessaire pour entraîner en rotation l'ensemble en fonctionnement nominal est P . On admet un rendement global η .
 Quel est alors l'ordre de grandeur de la densité surfacique d'effort q' à mettre sur la surface cylindrique du disque (rayon intérieur R_1) pour prendre en compte les effets de l'écoulement fluide ? On formulera les hypothèses simplificatrices jugées nécessaires.
- 5-1-6 Faire l'application numérique avec les données suivantes :
 $P = 3\,260 \text{ KW}$ $\eta = 0,85$
 Conclure sur la validité de l'hypothèse concernant les effets aérauliques ?

Partie 5-2 : Etat de contrainte dans le disque de liaison

Des données fournies en annexe 4 facilitent la résolution de cette partie.

On s'intéresse maintenant au disque d'épaisseur e_d , de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 . Ce dernier est entraîné à la fréquence de rotation ω et sollicité sur sa couronne extérieure par la densité surfacique d'effort q . On associe à ce disque un repère cylindrique $(\vec{k}_r, \vec{k}_\theta, \vec{k}_z)$, l'axe \vec{k}_z étant confondu avec l'axe de rotation de la roue. En considérant que l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions, on admet que l'état de contrainte est plan, c'est-à-dire que les contraintes σ_{rz} , $\sigma_{\theta z}$ et σ_{zz} sont toutes nulles.

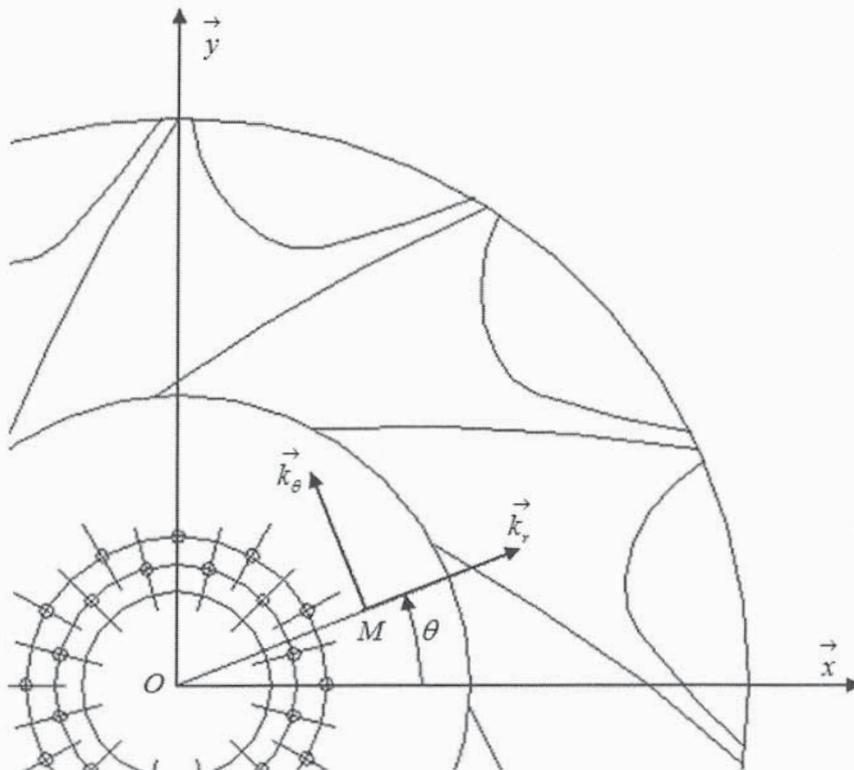
Le comportement du matériau utilisé est élastique, linéaire, homogène et isotrope. Sa loi de comportement est caractérisée par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν . Le matériau a une masse volumique notée ρ .

5-2-1 Donner la relation exprimant la dilatation linéaire ε_{zz} en fonction des dilatations linéaires ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$ et du coefficient de Poisson ν .

5-2-2 Donner les relations exprimant la contrainte radiale normale σ_{rr} et la contrainte orthoradiale normale $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction exclusivement du module d'Young E , du coefficient de Poisson ν et des dilatations linéaires ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$.

Compte tenu des conditions de symétries, en première approximation, on formule l'hypothèse que le champ de déplacement dans le disque est purement radial et uniquement fonction du rayon r . Ce qui nous donne dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\vec{U}(M) = u_r \vec{k}_r \quad \text{avec} \quad u_r = u_r(r)$$



5-2-3 Quelles sont les expressions des dilatations linéaires ε_r et $\varepsilon_{\theta\theta}$ et des contraintes σ_r et $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction du déplacement u_r , de sa dérivée et des constantes élastiques du matériau E et ν ?

5-2-4 Décrire en détail la méthode permettant de déterminer l'état de contrainte et de déformation en tout point du domaine étudié.

5-2-5 En utilisant les relations d'élasticité en coordonnées cylindriques données en annexe, donner l'équation différentielle permettant de calculer le déplacement radial u_r .

Devant les efforts mis en jeu, on suppose que l'on peut négliger le poids du disque d'épaisseur e_d .

5-2-6 En utilisant les conditions aux limites sur les surfaces cylindriques de rayon R_0 et R_I , donner l'expression du déplacement radial u_r en fonction des paramètres dimensionnels (R_0 , R_I , r), du module d'Young du matériau E , du coefficient de Poisson ν et de la densité surfacique de charge q .

$$\text{On pourra poser } K_3 = \frac{R_I^2}{(1+\nu)R_I^2 + (1-\nu)R_0^2}.$$

5-2-7 Donner les expressions des lois de variation des contraintes σ_r , $\sigma_{\theta\theta}$ et de la contrainte équivalente de Misès σ_{VM} en fonction du rayon r .

5-2-8 Application numérique

$$R_0 = 0,45 \text{ m}$$

$$R_I = 1,05 \text{ m}$$

$$N = 736 \text{ tr/min}$$

$$q = 170 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 7\,800 \text{ kg/m}^3$$

Quelle est la valeur du déplacement radial d'un point situé au rayon R_I ?

Quelles sont les valeurs des contraintes σ_r , $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{VM} au rayon R_0 ?

Conclusion ?

ANNEXE 1

Rappel du théorème d'Euler-Rateau

Théorème de la résultante :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \cdot \vec{V} \cdot dv = \iiint_D \rho \cdot \vec{f} \cdot dv + \iint_{\partial D} [\vec{\sigma}] \vec{n} \cdot ds$$

Théorème du moment dynamique :

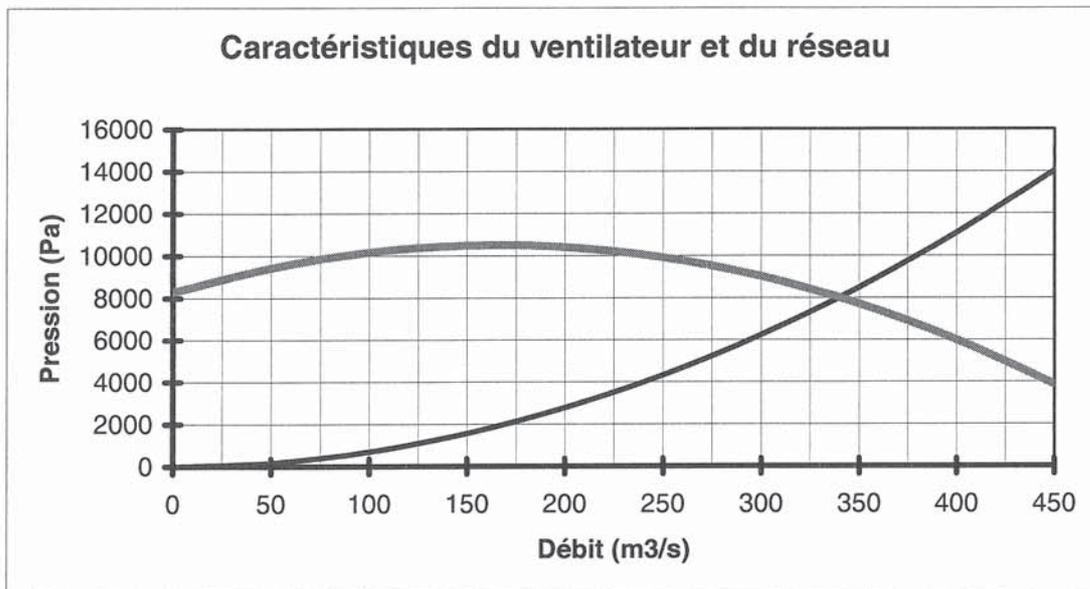
$$\frac{d}{dt} \iiint_b \vec{OM} \wedge \rho \cdot \vec{V} \cdot dv = \iiint_b \vec{OM} \wedge \rho \cdot \vec{f} \cdot dv + \iint_{\partial b} \vec{OM} \wedge [\vec{\sigma}] \vec{n} \cdot ds$$

avec \vec{f} : densité massique des forces volumiques

$[\vec{\sigma}]$: tenseur des contraintes au sein du milieu considéré.

Formulaire

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2 \cdot (px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \left[\frac{1}{ax+b} + \frac{p}{bp-aq} \ln \left| \frac{px+q}{ax+b} \right| \right] + cste$$



ANNEXE 2

Transferts thermiques

Loi de Fourier :

$$\vec{\Phi} = -\lambda S \cdot \vec{\text{grad}}T$$

Φ : Flux de chaleur (W)

λ : Conductivité thermique (W/m.K)

S : Surface d'échange

Loi de Newton :

$$\Phi = h \cdot S \cdot (T_p - T_\infty)$$

h : coefficient d'échange par convection (W/m².K)

T_p : Température de paroi

T_∞ : Température à l'infini

Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection forcée dans le cas d'écoulement externe sur un plan

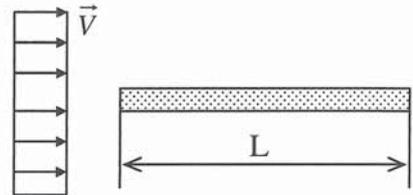
Nu est ici le nombre de Nusselt moyen sur la longueur L du plan concernée par l'écoulement

Écoulement turbulent

$$Nu = 0,035 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{1/3} \quad Re > 5 \cdot 10^5 \text{ et } Pr > 0,5$$

Écoulement laminaire

$$Nu = 0,628 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{1/3} \quad Re < 5 \cdot 10^5 \text{ et } 10 \geq Pr > 0,5$$



Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection forcée dans le cas d'écoulement interne

Écoulement turbulent : $Re > 5000$ et $0,6 < Pr < 100$

$$Nu = 0,035 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^n \quad n = 0,3 \text{ si } \theta_{\text{paroi}} < \theta_{\text{fluide}} \text{ et } n = 0,4 \text{ si } \theta_{\text{paroi}} > \theta_{\text{fluide}}$$

Écoulement laminaire :

$$Nu = 1,86 \cdot (Re \cdot Pr)^{1/3} \cdot \left(\frac{D}{L}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0,14} \quad \text{valable pour } Re \cdot Pr \cdot D/L \geq 10, \text{ et } \mu_p \text{ calculé à } \theta_{\text{paroi}}$$

Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection naturelle dans le cas d'écoulement sur un plan

$$Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^m$$

Gr.Pr	C	m
$10^4 - 10^9$	0,59	1/4
$10^9 - 10^{13}$	0,021	2/5

On précise que

$$Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

$$Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda}$$

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$$

V : vitesse du fluide

L : longueur de référence ou D_h

ν : viscosité cinématique

μ : viscosité dynamique

c_p : capacité calorifique à pression constante

λ : conductivité thermique

ANNEXE 3

Points d'intégration pour la méthode de Gauss Legendre

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \cdot d\xi = \sum_{j=1}^m \varpi_j \cdot f(\xi_j) \quad : \text{intégration exacte des polynômes de degré } \leq (2 \cdot m - 1)$$

m	ξ_j	ϖ_j
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm \sqrt{3/5}$	8/9 5/9
4	$\pm 0,33998\ 10435\ 84856$ $\pm 0,86113\ 63115\ 94053$	0,65214 51548 62546 0,34785 48451 37454

ANNEXE 4

Loi de comportement élastique linéaire

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + (\lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})) \underline{\underline{I}} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} (\underline{\underline{\sigma}}) - \left[\frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \underline{\underline{I}}$$

Elasticité linéaire en coordonnées polaires

Relations Déplacement-Déformation

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \end{array} \right.$$

Equations d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho(f_r - \gamma_r) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho(f_\theta - \gamma_\theta) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho(f_z - \gamma_z) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{si } g = g(r) \quad \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{1}{r^2} g = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r g) \right]$$

