

## 2<sup>ème</sup> Partie : Commandes classiques

Dans cette partie, nous considérons le système de la figure PG.6, Le hacheur quatre quadrants associé à une machine à courant continu (MCC). On pose  $E = V_E = V_{E'}$ .

Dans cette partie, le hacheur est piloté par une MLI et est supposé être équilibré (Les tensions aux bornes des capacités sont nominales) et le courant  $i_s$  constant sur tout cycle de la MLI.

Ceci nous conduit à une expression de la tension  $V$  aux bornes de la machine à courant continu égale à :

$$V = \beta E = (\alpha_1 - \alpha_2)E \quad (2.1)$$

Avec  $\alpha_1$  le rapport cyclique du hacheur qui se trouve à la droite de la MCC sur la figure PG.6 et  $\alpha_2$  le rapport cyclique du hacheur qui se trouve à gauche de la MCC sur cette même figure.

L'actionneur du dispositif expérimental est un moteur à courant continu à deux paires de pôles, de tension nominale  $U_{nom} = 220 \text{ V}$  et de puissance nominale  $P_{nom} = 3 \text{ kW}$  dont le modèle est :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = k i + C_{ch}$$
$$L \frac{di}{dt} = v - R i - k \Omega$$

où  $\Omega$  est la vitesse angulaire du moteur et  $i$  le courant de son induit (rotor).

Les paramètres électromécaniques identifiés sont :

$$R = 1 \text{ } \Omega$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$J = 0,1 \text{ Nms}^2/\text{rad}$$

$$k = 1,27 \text{ Vs/rad}$$

L'interface de puissance est alimentée par une tension continue  $E = V_E = V_{E'} = 400 \text{ V}$  fournie par un redresseur à facteur de puissance unitaire connecté au réseau monophasé (230 V / 50 Hz). Le couple de charge  $C_{ch}$  est considéré comme une perturbation qu'il faudra rejeter. Nous le considérons soit nul (Cas 1), soit constant et égal à  $C_{ch}(t) = C_{ch0} w(t)$ , avec  $w(t)$  l'échelon unitaire  $C_{ch0} = 20 \text{ Nm}$  (cas 2). Les frottements sont considérés comme négligeables.

**Q.2.1** Compléter le schéma bloc donné dans le document réponse N°1

**Q.2.2** En considérant le couple de charge  $C_{ch}$  nul, donner l'expression de la fonction de transfert :  $\frac{\Omega(p)}{\beta(p)} = H(p)$ .

**Q.2.3** Faire l'application numérique et calculer les pôles de la fonction de transfert  $H(p)$ .

Agrégation de Génie Électrique	Session 2009 , Épreuve d'Automatique et Informatique Industrielle	Page B-4 sur 11
-----------------------------------	----------------------------------------------------------------------	-----------------

**Q.2.4** Exprimer la fonction de transfert  $\frac{\Omega(p)}{C_{ch}(p)} = G(p)$  pour une consigne  $\beta=0$ .

**Q.2.5** Faire l'application numérique et calculer les pôles de la fonction de transfert  $G(p)$ .

**Q.2.6** Dans le cas 1, pour un signal de commande  $\beta(t) = \beta_0 w(t)$  avec  $\beta_0 = 0,5$ , exprimer littéralement la vitesse angulaire  $\Omega(t)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . (Toute utilisation de théorèmes dont les hypothèses ne sont pas vérifiées, sera considérée comme fausse).

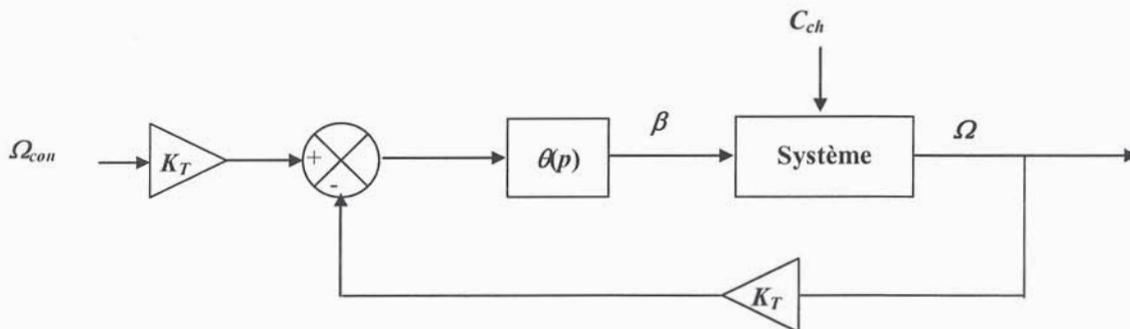
**Q.2.7** Faire l'application numérique.

**Q.2.8** Dans le cas 2, pour un signal de commande  $\beta(t) = \beta_0 w(t)$  avec  $\beta_0 = 0,5$ , exprimer littéralement la vitesse angulaire  $\Omega(t)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . (Toute utilisation de théorèmes dont les hypothèses ne sont pas vérifiées, sera considérée comme fausse).

**Q.2.9** Faire l'application numérique.

**Q.2.10** Le système est-il sensible aux perturbations de couple de charge ?

Nous disposons maintenant d'une génératrice tachymétrique pour mesurer la vitesse angulaire  $\Omega(t)$  son gain est  $K_T = 0,0637 \text{Vrad}^{-1}\text{s}$  et nous bouclons le système de la façon représentée à la figure 2.1.



**Figure 2.1** : Schéma bloc avec retour tachymétrique.

**Q.2.11** Sur le document réponse N°1, compléter le schéma 'système équivalent bouclé avec retour unitaire'.

**Q.2.12** Dans un premier temps, le contrôleur  $\theta(p)$  est un simple gain  $\gamma$  et le couple de charge est considéré comme nul (cas 1). Calculer le gain qui assure une pulsation de coupure à  $0\text{dB}$  de  $100\text{rad/s}$ .

**Q.2.13** La marge de phase est-elle suffisante ?

**Q.2.14** Tracer le diagramme de Bode gain et phase du système bouclé pour cette valeur de  $G$ , sur le document réponse joint N°2.

**Q.2.15** Toujours dans le cas 1, pour la valeur de gain trouvée en considérant une consigne de  $78.5\text{rad/s}$ , calculer la vitesse angulaire  $\Omega(t)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . (*Toute utilisation de théorèmes dont les hypothèses ne sont pas vérifiées, sera considérée comme fausse*).

**Q.2.16** Dans le cas 2, pour la valeur de gain trouvé en considérant une consigne de  $78.5\text{rad/s}$  calculer la vitesse angulaire  $\Omega(t)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . (*Toute utilisation de théorèmes dont les hypothèses ne sont pas vérifiées, sera considérée comme fausse*).

**Q.2.17** Le système bouclé est-il sensible aux perturbations de couple de charge ?

**Q.2.18** On pose maintenant  $\theta(p) = \gamma + \frac{\chi}{p}$  avec  $\chi = 1$ . Calculer  $\gamma$  pour que la pulsation de coupure à  $0\text{dB}$  soit toujours égale à  $100\text{rad/s}$ . (*Nota : le contrôleur est alors de type Proportionnel Intégral*).

**Q.2.19** Calculer la nouvelle marge de phase. Semble t'elle suffisante ?

**Q.2.20** Le système bouclé avec ce contrôleur Proportionnel Intégral (PI) est-il sensible au couple de charge, justifier la réponse.

### 3<sup>ème</sup> Partie : Commande par modes glissants d'ordre 1

#### Rappels :

La réalisation d'une loi de commande par modes glissants comporte deux étapes. Tout d'abord, il s'agit de définir une surface  $S$  dans l'espace d'état (définie par une fonction contrainte  $s(t,x,u)$ ) telle que, en régime de glissement (état verrouillé sur cette surface), le système ait le comportement escompté. Dans un second temps, il s'agit de synthétiser une loi de commande discontinue agissant sur la dérivée première de la variable de glissement et faisant en sorte que la surface de glissement  $S$  soit attractive (au moins localement). Si elle existe, l'unique commande  $V_{\dot{e}q}$  qui contraint les trajectoires du système à évoluer exactement sur la surface de glissement est appelée la commande équivalente et est solution de :

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

Précisons que ce que nous entendons par commande équivalente  $V_{\dot{e}q}$  est la commande qui assure strictement et à tout instant :  $s = 0$ .

Ainsi, dans le cas idéal d'un système sans incertitude et commandé avec une fréquence de commutation infinie  $V_{\dot{e}q}$  est égale à  $V$ . Aussi, si la réalisation le permet, la commande  $V$  par modes glissants se décompose généralement en deux termes :

$$V = V_{\dot{e}q} + V_{disc}$$

où  $V_{\dot{e}q}$  représente la partie commande équivalente et où  $V_{disc}$  est l'action discontinue qui assure la convergence en temps fini vers la surface  $S$  et le rejet d'une certaine classe de perturbations (« matching condition » condition de recouvrement). A cette fin, l'amplitude de la discontinuité doit être supérieure aux bornes dans lesquelles évoluent les incertitudes de modèles et les perturbations.

**Q.3.1** À partir des équations mécaniques et électriques du moteur données en 2<sup>ème</sup> partie donner une représentation du système sous forme d'état.

$\dot{Z} = AZ + BV + DC_{ch}$ et $y = \Omega = z_1 = CZ$	(3.1)
----------------------------------------------------------	-------

Avec le vecteur d'état  $Z = (z_1, z_2)^T = (\Omega, i)^T$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B \in \mathbb{R}^2$ ,  $D \in \mathbb{R}^2$  et  $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ .

**Q.3.2** Le système est-il commandable (on considérera le couple de charge nul, cas 1 de la partie 2) ? Justifier la réponse.

**Q.3.3** Le système est-il observable (on considérera le couple de charge nul, cas 1 de la partie 2) ? Justifier la réponse.

On désire que la vitesse du moteur  $\Omega$  suive une trajectoire de référence  $\Omega_{ref}$  au moins deux fois dérivable. Pour cela on va contraindre le système à évoluer sur une surface  $s(t)$  choisie comme suit :

$$s(t) = (\Omega - \Omega_{\text{réf}}) + \tau \frac{d(\Omega - \Omega_{\text{réf}})}{dt}$$

**Q.3.4** Calculer l'évolution de  $\xi = \Omega - \Omega_{\text{réf}}$  sur la surface de contrainte. On prendra comme condition initiale :  $\xi_0 = \Omega - \Omega_{\text{réf}} \neq 0$ .

**Q.3.5** Quelle est la condition sur  $\tau$  pour que l'écart  $\xi = \Omega - \Omega_{\text{réf}}$  entre les deux trajectoires tende vers zéro ?

**Q.3.6** Calculer la dérivée de  $s(t)$  (notée :  $\frac{ds(\cdot)}{dt}$ ) en fonction des variables  $V$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_{\text{ref}}$ ,  $\frac{d\Omega_{\text{ref}}}{dt}$ ,  $\frac{d^2\Omega_{\text{ref}}}{dt^2}$ ,  $i$ ,  $C_{\text{ch}}$  et de leurs dérivées.

Pour démontrer que la surface  $s(t)$  est attractive, nous pouvons définir une fonction  $\mathcal{G} = \frac{s(t)^2}{2}$  qui traduit l'écart entre l'état du système et la surface  $s(t) = 0$  (ceci est en relation avec le théorème de Lyapunov 1892).

**Q.3.7** Calculer la dérivée de  $\mathcal{G}$  (i.e  $s \frac{ds(\cdot)}{dt}$ ), pour que  $s(t)$  soit attractive il faut que la dérivée de  $\mathcal{G}$  soit négative.

A présent, nous posons  $V = V_{\text{connue}} + V_{\text{disc}}$ , avec  $V_{\text{connue}}$  la partie de la commande qui est en fonction de variables mesurées et de paramètres connus. **Attention**,  $V_{\text{connue}}$  n'est qu'une partie de la commande équivalente  $V_{\text{éq}}$ . En effet, seul les termes connus et/ou accessibles à la mesure de  $V_{\text{éq}}$  sont ici pris en compte. Ainsi, les termes évaluables grâce aux mesures sont  $i$  et  $\Omega$  et les paramètres connus avec une précision acceptable sont  $k$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $\tau$ . Dans la dérivée de  $\mathcal{G}$ , même si  $\frac{d\Omega_{\text{ref}}(\cdot)}{dt}$  et  $\frac{d^2\Omega_{\text{ref}}(\cdot)}{dt^2}$  sont connus car imposés par l'utilisateur, ils ne peuvent pas être utilisés dans  $V_{\text{connue}}$  car l'inertie  $J$  est un paramètre inconnu et variable mais borné  $J \in [0.1 \text{ Nms}^2 / \text{rad}, 1 \text{ Nms}^2 / \text{rad}]$ , ici nous considérons un contexte plus général qu'à la partie 2 (par exemple le cas où la charge entraînée est un rouleau de papier). Nous posons donc :

$$V_{\text{connue}} = k \Omega + \left( R - \frac{L}{\tau} \right) i$$

**Q.3.8** Soit  $V_{\text{disc}} = -\lambda \text{sign}(s)$  quelle est la condition sur  $\lambda$  pour que la dérivée de  $\mathcal{G}$  soit négative ?

En considérant  $\lambda$  bien choisi, en première approximation et en considérant le pire cas, nous obtenons :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = -\frac{s\lambda}{2} \text{sign}(s)$$

**Q.3.9** Exprimer le temps de convergence de  $\mathcal{G}$  vers zéro en fonction de  $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}_0$ .

**Q.3.10** Que ce passera t-il après ce temps ?

*Les convertisseurs, qu'ils soient multicellulaires ou non ont des fréquences d'échantillonnage finies ce qui provoque des oscillations autour de la surface  $s(t) = 0$ , ce phénomène est appelé broutement (chattering en anglais).*

**Q.3.11** Quel est l'avantage d'un convertisseur multicellulaire par rapport à un convertisseur statique classique vis-à-vis du phénomène de broutement ?

#### 4<sup>ème</sup> Partie : Commande d'ordre 2 et convertisseur multicellulaire.

Dans les années 80 l'école russe a proposé de nouvelles commandes par modes glissants qui permettent de s'affranchir du phénomène de broutement ou/et de commander des systèmes avec un degré relatif supérieur à 1 (i.e. différence entre l'ordre du dénominateur et du numérateur dans la fonction de transfert). C'est l'une de ces commandes que nous étudierons dans cette partie, nous montrerons aussi que le multicellulaire permet de la réaliser directement (sans passer par une Modulation de Largeur d'Impulsions).

##### Principe :

Nous désirons avoir une commande  $u$  continue et garantir une convergence en temps fini, pour cela nous pouvons utiliser la commande suivante ('twisting control' Levant 1993) :

$$\dot{u} = -u \quad \text{si } |u| > u_{\max} \quad (4.1)$$

$$\dot{u} = -\alpha_M \text{sign}(\sigma(t)) \quad \text{si } |u| \leq u_{\max} \quad \text{et} \quad \sigma \dot{\sigma} > 0 \quad (4.2)$$

$$\dot{u} = -\alpha_m \text{sign}(\sigma(t)) \quad \text{si } |u| \leq u_{\max} \quad \text{et} \quad \sigma \dot{\sigma} \leq 0 \quad (4.3)$$

Avec  $\sigma$  la nouvelle surface de contrainte.

##### Q.4.1 Quel est le rôle de l'équation (4.1) ?

Maintenant, pour étudier les propriétés de cette commande, nous l'appliquons à un simple intégrateur et nous obtenons la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.4)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.5)$$

Avec  $x_1$  la sortie de l'intégrateur,  $x_2 = u$  et la surface de contrainte  $\sigma = x_1 - x_{1des}$  où  $x_{1des}$  est une valeur constante de consigne désirée sur la sortie de l'intégrateur. Il nous faut donc atteindre le point d'équilibre  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$  et ceci en temps fini.

**Q.4.2** En supposant qu'à l'instant initial  $\sigma(0) = 0$  et  $\dot{\sigma}(0) = x_2(0) > 0$  avec  $u_{\max} > x_2(0)$  quelle sera, juste après l'instant initial, la commande constante ( $\alpha_m, -\alpha_m, \alpha_M$  ou  $-\alpha_M$ ) appliquée au système ?

**Q.4.3** Cette commande est appliquée jusqu'à l'instant  $t_1$  où la droite  $\dot{\sigma}(t) = 0$  est atteinte. Calculer cet instant  $t_1$  et la valeur de  $\sigma(t_1)$ .

**Q.4.4** Quelle sera, juste après l'instant  $t_1$  la commande constante ( $\alpha_m, -\alpha_m, \alpha_M$  ou  $-\alpha_M$ ) appliquée au système ?

**Q.4.5** Cette commande est appliquée jusqu'à l'instant  $t_2 + t_1$  où la droite  $\sigma(t) = 0$  est atteinte. Calculer en fonction de  $x_2(0)$ , les valeurs de  $t_2$  et de  $\sigma(t_2 + t_1)$ .

**Q.4.6** Quelle sera, juste après l'instant  $t_2 + t_1$  la commande constante ( $\alpha_m, -\alpha_m, \alpha_M$  ou  $-\alpha_M$ ) appliquée au système ?

**Q.4.7** Cette commande est appliquée jusqu'à l'instant  $t_1 + t_2 + t_3$  où la droite  $\sigma(t) = 0$  est atteinte. Calculer en fonction de  $x_2(0)$ , les valeurs de  $t_1$  et  $\sigma(t_1 + t_2 + t_3)$ .

**Q.4.8** Trouver les relations de récurrences liants respectivement  $t_{2k+1}$  à  $t_{2k-1}$  et  $t_{2k+2}$  à  $t_{2k}$ .

Afin de simplifier les notations, nous posons  $T_k = \sum_{i=1}^k t_i$ .

**Q.4.9** Trouver les relations de récurrences liant respectivement  $\sigma(T_{2k+1})$  à  $\sigma(T_{2k-1})$  et  $\sigma(T_{2k+2})$  à  $\sigma(T_{2k})$ .

**Q.4.10** Quelle est la condition sur  $\alpha_M$  et  $\alpha_m$  pour que  $\sigma(t)$  et  $\dot{\sigma}(t)$  convergent vers zéro ?

**Q.4.11** Calculer littéralement  $T_{+\infty}$ .

**Q.4.12** Quelle est la condition sur  $\alpha_M$  et  $\alpha_m$  pour que  $T_{+\infty} = \sum_{i=1}^{+\infty} t_i$  soit fini et donnez l'expression simplifiée de  $T_{+\infty}$ .

*Dans un convertisseur multicellulaire comme dans tous les convertisseurs de puissance pour des raisons technologiques évidentes, la période d'échantillonnage ne peut être nulle, soit  $\delta$  la valeur minimale de la période d'échantillonnage du convertisseur multicellulaire (la période vue de la charge et non la période d'échantillonnage de chaque cellule).*

**Q.4.13** Quel type d'erreur obtient-on sur  $\sigma(t)$  et  $\dot{\sigma}(t)$  ? Indiquer simplement en le justifiant si l'erreur est en  $O(\delta^0)$ ,  $O(\delta^1)$ ,  $O(\delta^2)$ ,  $O(\delta^3)$  ou  $O(\delta^4)$ .

*Pour des raisons évidentes de rejet de perturbations, dans un cas pratique  $\alpha_m$  doit être plus grand que l'influence des perturbations sur le système. De même, toujours pour des raisons de robustesse de considération du pire cas, le paramètre  $\alpha_M$  doit être choisi tel que  $\alpha_M > 4\alpha_m$ .*

**Q.4.14** De combien de cellules faut-il augmenter chaque multicellulaire de la figure PG.6 pour pouvoir réaliser une commande de type 'Twisting control' ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Concours : \_\_\_\_\_

Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Intitulé de l'épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)  
Prénoms : \_\_\_\_\_

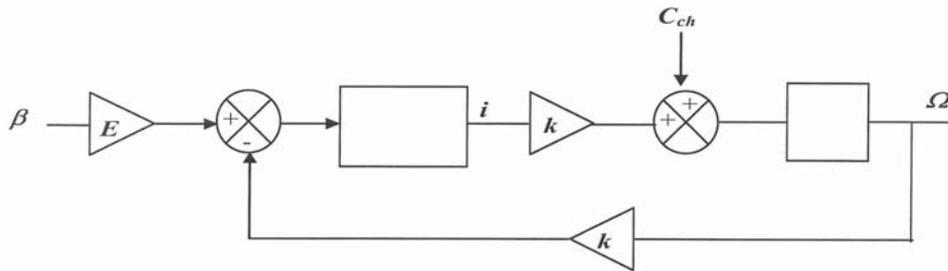
N° du candidat  

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

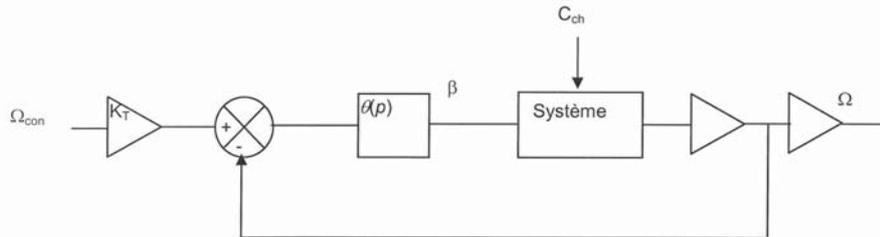
EAE GEE 1

DOCUMENT REPONSE N°1

Question 2.1



Question 2.11



NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Concours : \_\_\_\_\_

Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Intitulé de l'épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_

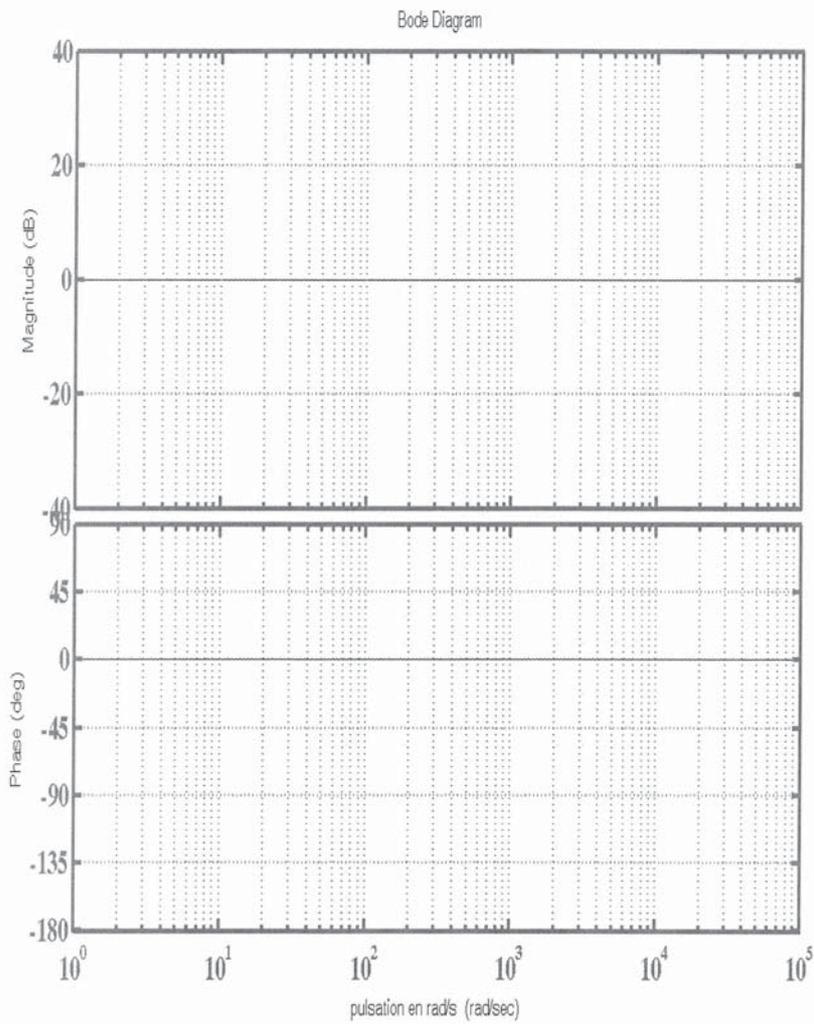
Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

EAE GEE 1

DOCUMENT REPOSE N°2

Question 2.14



Ⓚ

## ANNEXE

**TRANSFORMÉE de LAPLACE et TRANSFORMÉE en Z**

Pierre-Simon Laplace, mathématicien français (1749-1827). Laplace entra à l'université de Caen à 16 ans. Très vite il s'intéressa aux mathématiques et fut remarqué par d'Alembert. En analyse, il introduisit la fonction potentielle et les *coefficients de Laplace*. Il travailla également beaucoup sur les équations aux différences et sur les équations différentielles. Contrairement aux apparences, l'utilisation de la *transformée de Laplace* pour la résolution d'équations différentielles n'est pas due à Laplace, mais à Heaviside.

Soit  $f(t)$  une fonction du temps, sa transformée de Laplace  $F(p)$  est définie par :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-p.t} .dt$$

De même on peut définir la transformée de Laplace inverse donnant l'image  $f(t)$  de  $F(p)$  par :

$$L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2.\pi.j} . \int_{-\infty}^{+\infty} F(p).e^{p.t} .dp$$

Pour une fonction discrète  $f(kT)$ , sa transformée en  $z$   $F(z)$  est définie par :

$$F(z) = Z(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k.T).z^{-k}$$

Table des principales transformées

$f(t)$	$F(p)$	$F(z)$
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$a.t$	$\frac{a}{p^2}$	$\frac{a.T.z}{(z-1)^2}$
$b.e^{-a.t}$	$\frac{b}{p+a}$	$\frac{b.z}{z-e^{-a.T}}$
$\frac{c}{b-a} . (e^{-a.t} - e^{-b.t})$	$\frac{c}{(p+a).(p+b)}$	$\frac{c}{b-a} . \left( \frac{z}{z-e^{-a.T}} - \frac{z}{z-e^{-b.T}} \right)$
$\frac{1}{a-b} . (a.c.e^{-a.t} - b.c.e^{-b.t})$	$\frac{p.c}{(p+a).(p+b)}$	$\frac{1}{a-b} . \left( \frac{a.c.z}{z-e^{-a.T}} - \frac{b.c.z}{z-e^{-b.T}} \right)$
$\frac{1}{a-b} . ((c-a).e^{-a.t} - (c-b).e^{-b.t})$	$\frac{p+c}{(p+a).(p+b)}$	$\frac{1}{a-b} . \left( \frac{(c-a).z}{z-e^{-a.T}} - \frac{(c-b).z}{z-e^{-b.T}} \right)$