ministère
Éducation
nationale

EAI MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2010

AGREGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

SECONDE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

La lettre $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes ; les espaces vectoriels considérés seront toujours des espaces vectoriels sur ce corps $\mathbf{C}$, et les symboles $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ont leur signification habituelle. On note $\mathbf{N}^*$ (resp. $\mathbf{C}^*$) l'ensemble des entiers $\geqslant 1$ (resp. l'ensemble des complexes non-nuls).
La lettre $\mathscr{P}$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (« polynômes » et « fonctions polynômes » seront toujours confondus, puisqu'on travaille sur le corps $\mathbf{C}$, infini). La partie réelle (resp. la partie imaginaire) du nombre complexe z sera notée $\mathrm{Re}(z)$ (resp. $\mathrm{Im}(z)$) en un endroit du problème.
On rappelle que le symbole de Kronecker δ_{ij} vaut 1 et $i = j$ et 0 sinon (i et j étant deux entiers).
Enfin, pour une partie A d'un espace vectoriel normé $\mathscr{E}$ on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A.
L'objectif du problème est l'étude de l'équation de Guichard :

$$(G) \quad f(z+1) - f(z) = g(z)$$

dans un certain espace $\mathscr{E}$ de fonctions définies sur $\mathbf{C}$, qui contient $\mathscr{P}$. Dans cette équation, $g \in \mathscr{E}$ est la donnée, $f \in \mathscr{E}$ l'inconnue.
La partie I étudie l'équation (G) sur $\mathscr{P}$, et donne une application.
La partie II définit l'espace $\mathscr{E}$ et établit quelques-unes de ses propriétés qui seront utiles par la suite.
La partie III étudie l'équation (G) sur $\mathscr{E}$.
La partie IV, enfin, étudie une variante multiplicative de (G), à savoir l'équation (sur $\mathscr{E}$) :

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z)$$

dans laquelle q est un nombre complexe non nul ($q \in \mathbf{C}^*$). Cette partie fait intervenir des considérations « diophantiennes », en ce sens que la vitesse d'approximation d'un irrationnel par des rationnels doit être prise en compte.

– Partie I : L'équation (G) sur $\mathscr{P}$ et les opérateurs nilpotents –

Soit $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ l'opérateur de différence première défini par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad (\Delta P)(z) = P(z+1) - P(z), \text{ où } \Delta P = \Delta(P) \tag{1}$$

1. **(a)** Démontrer que $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une application linéaire *localement nilpotente*, c'est-à-dire (en notant $\Delta^n = \Delta \circ \ldots \circ \Delta$ (n fois) et $\Delta^0 = \mathrm{id}$) :

$$\forall\, P \in \mathscr{P},\ \exists\, n \in \mathbf{N} \text{ tel que } \Delta^n P = 0\,.$$

(b) Existe-t-il un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta^p = 0$?

2. Démontrer que $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ n'est pas injective et décrire son noyau.

3. On définit la suite $(H_n)_{n\geqslant 0}$ des *polynômes de Hilbert* sur $\mathbf{C}$ par :

$$H_0(z) = 1;\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ H_n(z) = \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}\,.$$

(a) Démontrer que $\Delta H_0 = 0$, $\Delta H_n = H_{n-1}$ si $n \geqslant 1$, et $(\Delta^k H_n)(0) = \delta_{n,k}$.

(b) Démontrer que $(H_n)_{n\geqslant 0}$ est une base de $\mathscr{P}$ et que, plus précisément :

$$\forall P \in \mathscr{P},\ P = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^n P)(0) H_n \tag{2}$$

Expliciter les coefficients du polynôme $z \to z^3$ sur la base (H_n).

(c) Démontrer que $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est surjective. Comment conciliez-vous cela avec la question 2) ?

4. **(a)** Soit p un entier fixé ; on écrit $z^p = f(z+1) - f(z)$, avec $f \in \mathscr{P}$ et $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} n^p = f(N+1) \tag{3}$$

(b) Donner une formule simple pour calculer $\sum_{n=0}^{N} n^3$ en fonction de N.

5. **(a)** Pour $P \in \mathscr{P}$, on pose $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{P}$.

(b) L'application linéaire $\Delta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est-elle continue pour la norme précédente ?

(c) Montrer qu'il existe une norme sur $\mathscr{P}$ pour laquelle Δ est continue.
Indication : on pourra utiliser le caractère localement nilpotent de Δ pour définir à partir de la formule (2) une norme faisant de Δ une application linéaire de norme 1.

6. On rappelle le *lemme de Baire pour les espaces vectoriels normés complets ou « espaces de Banach »* (admis ici) : Si $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fermés d'un espace de Banach dont la réunion est tout l'espace, alors l'un au moins de ces fermés, F_p, est d'intérieur non-vide ($\overset{\circ}{F}_p \neq \emptyset$). On se donne X un tel espace de Banach (ici sur $\mathbf{C}$).

(a) Soit Y un sous-espace vectoriel de X ; montrer que $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset \Longrightarrow Y = X$.

(b) Soit $T : X \to X$ une application linéaire continue *localement nilpotente* :

$$\forall x \in X, \; \exists n \in \mathbf{N} : T^n(x) = 0 \,.$$

Démontrer que T est nilpotente : il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n = 0$.

7. **(a)** L'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il complet pour la norme construite au **5)c)** ?

(b) L'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il complet pour au moins une norme ?

– Partie II : L'espace $\mathscr{E}$ des fonctions entières –

Soit $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui s'écrivent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où la série entière figurant au second membre a un rayon de convergence infini. On a immédiatement $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$.

1. **(a)** Démontrer que les a_n sont déterminés de façon unique par f et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0, \; \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} \, \mathrm{d}t \,. \tag{4}$$

(b) On pose $M(f,r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Démontrer que :

$$\forall r > 0, \; \forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n| \leqslant \frac{M(f,r)}{r^n} \,. \tag{5}$$

(c) Démontrer que $\mathscr{P}$ n'est pas égal à $\mathscr{E}$ (il suffira de donner un exemple d'une fonction $f \in \mathscr{E}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, qui n'est pas un polynôme ; on justifiera la réponse).

(d) Démontrer que les seules fonctions de $\mathscr{E}$ qui sont bornées sont les constantes.

(e) Démontrer que

$$f \in \mathscr{P} \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{C} \text{ tout entier.}$$

2. Cette question a pour but de mettre en place quelques propriétés importantes de l'espace $\mathscr{E}$.

(a) Soit (f_k) une suite de fonctions de $\mathscr{E}$, $f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n$. On suppose que (f_k) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{C}$. Démontrer que f appartient à $\mathscr{E}$.
Indication : on pourra commencer par démontrer que :

$$\forall R > 0,\ \exists M > 0 \quad / \quad \forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ |a_n^{(k)}| \leqslant \frac{M}{R^n}\ .$$

(b) Démontrer qu'une fonction f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement s'il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f sur tout compact de $\mathbf{C}$.

(c) Démontrer que $\mathscr{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que $f, g \in \mathscr{E} \Longrightarrow fg \in \mathscr{E}$.

(d) Soit $f \in \mathscr{E}$, $a \in \mathbf{C}$ et $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $g(z) = f(z+a)$. Montrer que $g \in \mathscr{E}$. Ainsi, $\mathscr{E}$ est stable par translation.

3. Une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ de complexes est dite un *multiplicateur* de $\mathscr{E}$ si, pour toute fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{E}\ ,$$

la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$ définit un élément de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire a un rayon de convergence infini.
On se propose de montrer qu'on a équivalence entre :
i) (λ_n) est un multiplicateur de $\mathscr{E}$;
ii) il existe des constantes $A, B > 0$ telles que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |\lambda_n| \leqslant AB^n$.

(a) Démontrer que ii) implique i).

(b) On suppose que ii) n'est pas réalisée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_j)_{j\geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 1$ avec : $\forall j \geqslant 1,\ |\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$. Puis montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{E}$, de la forme $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}$, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j}$ ne soit pas infini. En déduire que ii) implique i).

4. (a) Démontrer que Δ, défini par $(\Delta f)(z) = f(z+1) - f(z)$, envoie $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.

(b) Décrire le noyau $\ker \Delta$ de $\Delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, et montrer que ce noyau est de dimension infinie. Ainsi, $\Delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est très loin d'être injective. On verra dans la partie III qu'elle est cependant surjective.

5. On rappelle que pour $\rho > 0$ et f définie et continue sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ ($|w| = \rho$), à valeurs complexes, l'intégrale curviligne

$$I = \int_{|w|=\rho} f(w)\,\mathrm{d}w$$

est par définition :

$$I = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) i\rho e^{it}\,\mathrm{d}t\ . \tag{6}$$

(a) Démontrer que $|I| \leqslant 2\pi\rho\, M(f,\rho)$.
(b) Montrer que si f appartient à $\mathscr{E}$ alors $I = 0$.
(c) Soit un élément h de $\mathscr{E}$ et un entier $k \in \mathbf{Z}$. On pose :

$$J_k(h,\rho) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=\rho} w^k h(w)\,\mathrm{d}w\ .$$

Démontrer que $J_{-1}(h,\rho) = h(0)$ et $J_k(h,\rho) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$.

6. **(a)** Montrer qu'il existe une fonction g de $\mathscr{E}$ telle que

$$w \in \mathbf{C} \Longrightarrow e^w = 1 + w + w^2 g(w) \quad \text{avec de plus} \quad |g(w)| \leqslant e-2 \quad \text{si} \quad |w| = 1\ .$$

(b) Soit $k \in \mathbf{Z}$, et

$$I_k = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=1} \frac{w^k}{e^w - 1}\,\mathrm{d}w\ .$$

i) Démontrer que I_k est bien définie.
ii) Démontrer que $I_0 = 1$ et que $I_k = 0$ si $k \geqslant 1$.
Indication : on pourra par exemple faire intervenir une série géométrique.

– Partie III : L'équation de Guichard dans $\mathscr{E}$ –

A) Les polynômes de Bernoulli et une application :

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$, on pose :

$$B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|w|=1} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1)}\,\frac{\mathrm{d}w}{w^n}\ . \tag{7}$$

1. Démontrer que

$$B_n(z) = n!\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_{k-n}}{k!} z^k$$

puis que B_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Calculer B_0.

2. **(a)** Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ B_n'(x) = nB_{n-1}(x)\ . \tag{8}$$

(b) Démontrer que

$$\forall z \in \mathbf{C},\quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}\ , \tag{9}$$

et que $B_n(1) = B_n(0)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

3. **(a)** Démontrer que

$$\forall n \geqslant 1,\ \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\ . \tag{10}$$

(b) Calculer B_1, B_2, B_3.

Les deux questions suivantes proposent une application (à l'ordre 2) des polynômes B_n.

4. Soit $h : [0,1] \to \mathbf{C}$, de classe $\mathscr{C}^2$.

(a) Démontrer que

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h(0) + h(1)}{2} - \int_0^1 h'(t)B_1(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

(b) Montrer ensuite que

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h(0)+h(1)}{2} + \frac{h'(0)-h'(1)}{12} + \frac{1}{2}\int_0^1 h''(t)B_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

5. Soit $\varphi : [1,\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^1, et N un entier non nul. On pose :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) \;\text{ et }\; I_N = \int_1^N \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On désigne par π_2 la fonction 1-périodique valant $\frac{B_2}{2}$ sur $[0,1[$.

(a) Montrer qu'on a, pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varphi(n)+\varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n)-\varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t)\pi_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(b) Démontrer que

$$S_N = I_N + \frac{1}{2}\Big(\varphi(1)+\varphi(N)\Big) + \frac{1}{12}\Big(\varphi'(N)-\varphi'(1)\Big) - \int_1^N \varphi''(t)\pi_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) On suppose que $|\varphi''|$ est intégrable sur $[1,\infty[$ et que $\varphi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\varphi(n)$ et l'intégrale généralisée (impropre) $\int_1^\infty \varphi(t)\,dt$ sont de même nature.

(d) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$?

B) Solution de l'équation (G) de Guichard

1. **(Question préliminaire) :** Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $g \in \mathscr{E}$. On veut résoudre l'équation $\Delta f = g$, avec $f \in \mathscr{E}$. Pourquoi est-il plausible de prendre

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{B_{n+1}}{n+1}\ ?$$

Qu'est-ce qui pourrait empêcher ce choix ?

La suite de cette partie est consacrée à une modification des polynômes de Bernoulli destinée à contourner cet obstacle.

2. On se propose d'abord de montrer par l'absurde le fait suivant :

$$\text{Il existe } c>0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbf{N},\ |w| = (2n+1)\pi \Longrightarrow |e^w - 1| \geqslant c\,. \tag{11}$$

On suppose donc qu'une telle constante c n'existe pas.

i) Montrer qu'on peut trouver des suites $(n_j)_{j\geqslant 1}$ d'entiers positifs et $(w_j)_{j\geqslant 1}$ de complexes telles que $|w_j| = (2n_j+1)\pi$ et $\lim_{j\to\infty} e^{w_j} = 1$.

ii) Démontrer que l'on a : $\lim_{j\to\infty} \mathrm{Re}(w_j) = 0$ et $\lim_{j\to\infty} \Big(|\mathrm{Im}(w_j)| - (2n_j+1)\pi\Big) = 0$.

iii) Montrer qu'il existe une suite (ε_j), à valeurs dans $\{+1,-1\}$ et telle que la quantité $\delta_j = w_j - i\varepsilon_j(2n_j+1)\pi$ tende vers 0 quand j tend vers $+\infty$.

iv) Conclure que (11) est vrai.

Dans ce qui suit, on pose, pour $n \in \mathbf{N}$ *et* $z \in \mathbf{C}$ *:*

$$\rho_n = (2n+1)\pi;\ A_n(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|w|=\rho_n} \frac{e^{zw}}{(e^w-1)}\frac{\mathrm{d}w}{w^n}\,. \tag{12}$$

3. Démontrer que A_n est dans $\mathscr{E}$, et que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in \mathbf{C},\quad (\Delta A_n)(z) = nz^{n-1}\ .$$

4. Montrer qu'il existe des constantes a et b strictement positives telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in \mathbf{C},\ |A_n(z)| \leqslant ae^{nb|z|}\ . \qquad (13)$$

5. Soit $g \in \mathscr{E}$. Démontrer que l'équation de Guichard (G) : $f(z+1) - f(z) = g(z)$ possède au moins une solution dans $\mathscr{E}$. Décrire toutes les solutions de (G).

– Partie IV : La version multiplicative (H) de l'équation de Guichard –

Soit $q \in \mathbf{C}^*$. On considère dans cette partie l'équation « aux q-différences »

$$(H)\quad f(qz) - f(z) = g(z),\quad \text{avec } g \in \mathscr{E}\ .$$

1. On suppose $|q| \neq 1$. Démontrer que (H) possède une solution $f \in \mathscr{E}$ si et seulement si $g(0) = 0$. Décrire alors l'ensemble de toutes les solutions.

Dans la suite, on suppose $|q| = 1$ et plus précisément $q = e^{2i\pi\theta}$, où $\theta \notin \mathbf{Q}$.

2. **(Question préliminaire) :** Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche :

$$\|x\| = d(x, \mathbf{Z}) = \inf_{m\in\mathbf{Z}} |x - m| = \min_{m\in\mathbf{Z}} |x - m|\ .$$

Démontrer que $\|x\| \leqslant \frac{1}{2}$, et qu'on a la double inégalité :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad 4\|x\| \leqslant |e^{2i\pi x} - 1| \leqslant 2\pi\|x\|\ .$$

Indication : on rappelle que $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin u \geqslant \frac{2}{\pi}u$.

3. On dit que θ est *lentement approchable* (par des rationnels) s'il existe $a > 0$ et $b > 1$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \|n\theta\| \geqslant ab^{-n}\ . \qquad (14)$$

On dit que θ est *vite approchable* si $\theta \notin \mathbf{Q}$ et si θ n'est pas lentement approchable. On note A l'ensemble des irrationnels lentement approchables, et B l'ensemble des irrationnels vite approchables.

(a) Démontrer que $\sqrt{2} \in A$.

(b) Montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(p_k)_{k\geqslant 1}$ telle que l'on ait :

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} \in B\ .$$

Indication : on pourra définir les p_k de proche en proche afin d'avoir une croissance suffisamment rapide.

4. Soit θ un irrationnel, et $q = e^{2i\pi\theta}$.

(a) Montrer la double inégalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad 4\|n\theta\| \leqslant |q^n - 1| \leqslant 2\pi\|n\theta\|\ .$$

(b) Montrer qu'on a équivalence entre :

i) θ est *lentement approchable*, autrement dit $\theta \in A$;

ii) pour toute $g \in \mathscr{E}$ avec $g(0) = 0$, l'équation (H) possède une solution $f \in \mathscr{E}$.

Indication : on pourra utiliser la question **3)** de la partie **II** sur les multiplicateurs de $\mathscr{E}$.

FIN DU SUJET

IMPRIMERIE NATIONALE – 10 0029 – D'après documents fournis