ministère Éducation nationale

EAI MAT 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2010

AGREGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

- Étant donnés deux entiers p et q tels que $p \leqslant q$, on note $[p, q]$ l'ensemble des **entiers** k vérifiant $p \leqslant k \leqslant q$.
- Dans ce problème K désigne un corps commutatif de caractéristique différente de deux.
- Pour tout polynôme P de $K[X]$, on note $d^\circ P$ le degré de P (on rappelle que, par convention, le polynôme 0 a pour degré $-\infty$).
- Un polynôme non nul P de $K[X]$ est dit normalisé si le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.
- Pour tout entier naturel m, $K_m[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $K[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à m.
- Si E est un K-espace vectoriel, on notera E^* son espace dual.
- Soient E et F deux K-espaces vectoriels. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans F. Pour toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle transposée de f l'application (linéaire) notée ${}^t f$ définie sur F^* et à valeurs dans E^* par :
$$\forall\, \varphi \in F^*,\ {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$
- On note $\mathcal{M}_p(K)$ l'algèbre des matrices carrées de taille p à coefficients dans K.
- On identifiera les vecteurs de K^p aux matrices correspondantes de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$.
- Si A et B sont deux polynômes de $K[X]$, avec B non nul, on note $A \bmod B$ le reste de la division euclidienne de A par B.
- Soient A, B, C des polynômes de $K[X]$. On écrira $A \equiv B \bmod C$ si C divise $A - B$.
- Pour tout couple $(A, B) \in K[X]^2$ avec $(A, B) \neq (0, 0)$, on note $A \wedge B$ le pgcd du couple (A, B) (c'est donc un polynôme normalisé).
- Soit E un K-espace vectoriel non nul. On note $\mathcal{S}(E)$ l'espace vectoriel des suites de E indexées par $\mathbf{N}$. On aura l'occasion d'utiliser l'application $\sigma : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E)$ qui à une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de E associe la suite $\sigma(u)$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ [\sigma(u)]_n = u_{n+1}$$
Cette application σ, nommée **décalage d'indices**, est clairement un endomorphisme de l'espace $\mathcal{S}(E)$.
- Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{r} p_k X^k \in K[X]$. On désigne par $P(\sigma)$ l'endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ défini par substitution de σ à X :
$$P(\sigma) = p_0 \operatorname{Id} + p_1 \sigma + \cdots + p_r \sigma^r$$
On rappelle que, pour tout couple $(P, Q) \in K[X]^2$ on a :
$$(P + Q)(\sigma) = P(\sigma) + Q(\sigma) \quad \text{et} \quad (PQ)(\sigma) = P(\sigma) \circ Q(\sigma)\,.$$
- Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, on appelle **annulateur** de u le sous-ensemble de $K[X]$, noté $\operatorname{Ann}(u)$, défini par :
$$\operatorname{Ann}(u) = \{P \in K[X] \ /\ P(\sigma)(u) = 0\}$$
- Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$ est dite **linéaire récurrente** s'il existe un entier $r \geqslant 0$ ainsi que des scalaires $q_0, q_1, \ldots, q_r$ tels que $q_0 \neq 0$ et :
$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ q_0 u_{n+r} + q_1 u_{n+r-1} + \cdots + q_{r-1} u_{n+1} + q_r u_n = 0$$

– Partie I : polynôme minimal d'une suite linéaire récurrente –

Dans cette partie E et F sont des K-espaces vectoriels non nuls.

1. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, $P = \sum\limits_{k=0}^{r} p_k X^k \in K[X]$. Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$, $[P(\sigma)(u)]_n$.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$.

(a) Démontrer que la suite u est linéaire récurrente si et seulement si $\mathrm{Ann}(u) \neq \{0\}$.
(b) Démontrer que si u est linéaire récurrente, alors il existe un unique polynôme normalisé noté π_u tel que $\mathrm{Ann}(u) = \pi_u.K[X]$.

*Le polynôme π_u s'appelle le **polynôme minimal** de la suite u.*

3. Dans cette question on prend $E = K = \mathbf{R}$.

(a) Démontrer que la suite $(2^n + 3^n)$ est linéaire récurrente et donner son polynôme minimal.
(b) Démontrer que la suite $(n^2 2^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente et donner son polynôme minimal.
(c) Est-ce que la suite $(n!)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente ?

4. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(E)$, on note $T(u)$ la suite de F définie par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ [T(u)]_n = T(u_n)$$

Démontrer que si u est linéaire récurrente, alors il en est de même de $T(u)$ et le polynôme $\pi_{T(u)}$ divise π_u.

5. On note $\mathcal{R}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}(E)$ formé des suites linéaires récurrentes. $\mathcal{R}(E)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$?

6. **Un exemple important :** dans cette question on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_p(K)$ ainsi que deux éléments non nuls V et W de K^p. On leur associe la suite scalaire $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = {}^tWA^nV$.

(a) Démontrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire récurrente et que le polynôme minimal de cette suite est égal au polynôme minimal de la matrice A.
Dans la suite ce polynôme minimal sera noté π_A.
(b) Vérifier que les suites $\beta = (A^nV)_{n\in\mathbf{N}}$ et u sont linéaires récurrentes et que :

$$\pi_u \mid \pi_\beta \quad \text{et} \quad \pi_\beta \mid \pi_A$$

Dans la suite π_β sera noté $\pi_{A,V}$ et π_u sera noté $\pi_{W,A,V}$.
(c) Donner un majorant du degré de $\pi_{W,A,V}$.
(d) Que peut-on dire de $\pi_{W,A,V}$, $\pi_{A,V}$, π_A lorsque $\pi_{W,A,V}(A)$ est nul ?

– Partie II : une caractérisation des suites linéaires récurrentes scalaires –

Dans cette partie on cherche à caractériser les suites récurrentes à valeurs dans le corps K. On introduit à cette fin les notations suivantes : pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ et pour tout entier $m \geqslant 0$, on note $H_m(u)$ la matrice de $\mathcal{M}_{m+1}(K)$ définie par $H_m(u) = [u_{i+j-2}]_{(i,j)\in[1,m+1]^2}$ et on désigne par $D_m(u)$ son déterminant (rappel : ce déterminant est de taille $m+1$).

1. On suppose ici que $K = \mathbf{R}$ et on choisit pour u la suite de Fibonacci définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1;\ \forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

(a) Calculer $D_m(u)$ pour tout entier $m \geqslant 0$.
(b) Quel est le polynôme minimal de la suite u ?

Tournez la page S.V.P.

2. On suppose ici que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ est une suite linéaire récurrente de polynôme minimal
$$\pi_u = X^s + q_1X^{s-1} + \cdots + q_{s-1}X + q_s$$
Démontrer que pour tout entier $m \geqslant s,\ D_m(u) = 0$.

3. Réciproquement soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ pour laquelle il existe un entier $s \geqslant 1$ vérifiant :
$$D_{s-1}(u) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall\, m \geqslant s,\ D_m(u) = 0$$
On se propose de démontrer que u est linéaire récurrente et de donner une méthode de calcul de son polynôme minimal.

(a) Quel est le rang de la matrice $H_s(u)$?

(b) Démontrer qu'il existe un unique s-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_s) \in K^s$ tel que :
$$H_s(u).\begin{bmatrix} q_s \\ q_{s-1} \\ \vdots \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) On pose, pour tout entier $m \geqslant s$:
$$\lambda_m = u_m + q_1u_{m-1} + \cdots + q_{s-1}u_{m-s+1} + q_su_{m-s}$$
Que vaut λ_m lorsque m appartient à l'intervalle $[s, 2s]$?

(d) Démontrer que :
$$D_{s+1}(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_s & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s-1} & u_s & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 \\ u_s & u_{s+1} & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \lambda_{2s+1} \\ u_{s+1} & u_{s+2} & \cdots & u_{2s} & \lambda_{2s+1} & \lambda_{2s+2} \end{vmatrix}$$
En déduire que $\lambda_{2s+1} = 0$.

(e) Plus généralement, soit $m \geqslant s+1$ pour lequel
$$\lambda_s = \lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_{2s} = \cdots = \lambda_{m+s-1} = 0$$
Démontrer que :
$$D_m(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{s-1} & \cdots & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_s & \cdots & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{m+s} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & & \iddots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_{m+s} & & \vdots \\ u_m & \cdots & \cdots & u_{m+s-1} & \lambda_{m+s} & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$
(On détaillera les opérations effectuées ainsi que l'ordre dans lequel elles sont faites).

(f) Conclure que la suite u est linéaire récurrente de polynôme minimal
$$\pi_u = X^s + q_1X^{s-1} + \cdots + q_{s-1}X + q_s$$

– Partie III : polynômes minimaux en algèbre linéaire –

Pour tout polynôme $P \in K[X]$, on note $\operatorname{coeff}(P,k)$ le coefficient d'indice k de P.

1. Soit $F \in K[X]$ un polynôme normalisé, de degré $m \geqslant 1$. On lui associe l'application
$$\Phi : K[X] \times K[X] \to K, \ (P,Q) \mapsto \operatorname{coeff}(PQ \bmod F, m-1)$$

(a) Vérifier que Φ est bilinéaire et symétrique.

(b) Soit $P \in K[X]$ tel que pour tout $Q \in K[X]$, $\Phi(P,Q) = 0$. Démontrer que F divise P. Étudier la réciproque.
Indication : on pourra introduire $r = d^\circ(P \bmod F)$.

(c) Soit Φ_{m-1} la restriction de Φ à $K_{m-1}[X] \times K_{m-1}[X]$. Φ_{m-1} est-elle dégénérée ?

(d) Soit $G \in K_{m-1}[X]$. On considère la suite $u = (u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par $u_k = \Phi\left(X^k, G\right)$.
i) Démontrer qu'un polynôme P appartient à $\operatorname{Ann}(u)$ si et seulement si pour tout entier i on a $\Phi\left(PG, X^i\right) = 0$.
ii) En déduire que u est linéaire récurrente et que son polynôme minimal est donné par :
$$\pi_u = \frac{F}{F \wedge G}$$

Dans la suite du problème on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ainsi qu'un vecteur $V \in K^n$ non nul. On utilise les notations des questions précédentes en prenant $F = \pi_{A,V}$, de degré m.

2. Soit E le sous-espace de K^n engendré par $\left\{A^k V,\ k \in \mathbf{N}\right\}$. Démontrer que l'application
$$\Theta : K_{m-1}[X] \to E, \ P \mapsto P(A).V$$
est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

3. Soit $\rho : K^n \to E^*$ l'application qui, à $W \in K^n$ associe la forme linéaire
$$\rho(W) : E \to K, \ z \mapsto {}^tW.z\ .$$
Montrer que ρ est linéaire et surjective.

4. Soit $\varphi : K_{m-1}[X] \to K_{m-1}[X]^*$ l'application définie par :
$$\forall\,(P,Q) \in K_{m-1}[X] \times K_{m-1}[X],\ \varphi(P)(Q) = \Phi\,(P,Q)$$
Expliquer pourquoi φ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

5. On note $\Gamma = \varphi^{-1} \circ {}^t\Theta \circ \rho$.

(a) Que peut-on dire de Γ ?

(b) Démontrer que pour tout $P \in K_{m-1}[X]$ et pour tout $W \in K^n$:
$$\Phi\,(\Gamma(W), P) = {}^tW.P(A).V$$

(c) Vérifier que cette relation est vraie pour tout polynôme P de $K[X]$.

(d) Conclure que pour tout $W \in K^n$:
$$\pi_{W,A,V} = \frac{\pi_{A,V}}{\pi_{A,V} \wedge \Gamma(W)}$$

(e) En déduire qu'il existe au moins un vecteur W de K^n pour lequel $\pi_{W,A,V} = \pi_{A,V}$.

Dans la fin de cette partie on cherche dans quelle mesure on peut « espérer » que $\pi_{W,A,V}$ soit égal à $\pi_{A,V}$.

Notations : on rappelle qu'un polynôme $P = P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ à n indéterminées est un élément de l'algèbre $K\left[X_1, X_2, \dots, X_n\right]$ qui peut se définir comme $(K[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}])[X_n]$ pour $n > 1$. On peut noter P ainsi :
$$P = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1,\dots,i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}\ .$$
Pour un tel polynôme, chacun de ses **monômes** $a_{i_1,\dots,i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ a pour degré total $i_1 + \cdots + i_n$, et le **degré total** de P est le plus grand des degrés totaux de ses monômes non nuls.

6. Soient $R \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ un polynôme **non nul** de degré total d, à n indéterminées et S un sous-ensemble fini non vide de K. Montrer que l'ensemble

$$\Omega_S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S^n \;/\; R(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0\}$$

possède au plus $d.\,[\operatorname{Card} S]^{n-1}$ éléments.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur n.

7. On admet le résultat suivant : étant donnés deux polynômes non nuls

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \quad B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in K[X]$$

avec $b_m \neq 0$, ces polynômes sont premiers entre eux si et seulement si le déterminant ci-dessous n'est pas nul :

$$\begin{array}{c}
\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & b_0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_0 & b_m & \vdots & \ddots & 0 \\
a_n & \vdots & & a_1 & 0 & b_m & & b_0 \\
0 & a_n & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m
\end{vmatrix} \\
\longleftarrow \; m \; \longrightarrow\longleftarrow \; n \; \longrightarrow
\end{array}$$

Ce déterminant s'appelle le **résultant** de (A, B). On le notera $\operatorname{Res}(A, B)$.

On considère comme dans la question **6** un sous-ensemble S de K qui est fini et admet au moins m éléments.

(a) Démontrer que l'ensemble :

$$\Big\{W = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in S^n \;/\; \pi_{A,V} \wedge \Gamma(W) = 1\Big\}$$

possède au moins $[\operatorname{Card} S]^n - m.\,[\operatorname{Card} S]^{n-1}$ éléments.

(b) On choisit au hasard (de manière équiprobable) un n-uplet W dans S^n. Déduire de ce qui précède un minorant de la probabilité pour que $\pi_{W,A,V} = \pi_{A,V}$.

– Partie IV : l'algorithme de Berlekamp-Massey –

Le but de cette partie est de fournir un algorithme efficace dans la recherche du polynôme minimal d'une suite linéaire récurrente scalaire lorsqu'on connait à l'avance une majoration du degré de ce polynôme. La méthode proposée est indépendante des parties II et III.

Dans cette partie A et B sont deux polynômes de $K[X]$ pour lesquels $d^\circ A = m$, $d^\circ B = n$, avec $m \geqslant n \geqslant 1$. On rappelle que l'algorithme d'Euclide fournit par divisions euclidiennes successives deux familles finies $(Q_i)_{i \in [1,l]}$ et $(R_i)_{i \in [0,l+1]}$ de $K[X]$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{rl}
R_0 & = A,\ R_1 = B \\
R_{i-1} & = Q_i R_i + R_{i+1} \quad \text{pour } i \in [1, l] \quad \text{avec} \quad \forall\, i \in [1, l[,\ 0 \leqslant d^\circ R_{i+1} < d^\circ R_i \\
R_l & = A \wedge B,\ R_{l+1} = 0
\end{array}\right.$$

On considère les deux familles finies de polynômes $(S_i)_{i \in [0,l+1]}$ et $(T_i)_{i \in [0,l+1]}$ définies par :

$$S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ T_0 = 0,\ T_1 = 1 \quad \text{et pour} \quad i \in [1, l], \left\{\begin{array}{l} S_{i+1} = S_{i-1} - Q_i S_i \\ T_{i+1} = T_{i-1} - Q_i T_i \end{array}\right.$$

1. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) Pour tout $i \in [0, l+1]$, $S_iA + T_iB = R_i$.
(b) Pour tout $i \in [0, l]$, $S_{i+1}T_i - S_iT_{i+1} = (-1)^{i+1}$. En déduire la valeur de $S_i \wedge T_i$, pour $i \in [0, l+1]$.
(c) Pour tout $i \in [0, l+1]$, $R_i \wedge T_i = A \wedge T_i$.
(d) $d^\circ T_1 \leqslant d^\circ T_2$, et pour tout $i \in [2, l]$, $d^\circ T_i < d^\circ T_{i+1}$.
(e) Pour tout $i \in [1, l+1]$, $d^\circ T_i = m - d^\circ R_{i-1}$.
On peut alors démontrer de même (mais cela n'est pas demandé) que pour tout $i \in [2, l+1]$, $d^\circ S_i = n - d^\circ R_{i-1}$.

2. On fixe ici un entier $k \in [0, m[$ et on s'intéresse aux deux problèmes suivants :
$(\mathcal{P}_1)$: trouver un couple $(R, T) \in K[X]^2$ vérifiant :
$$TB \equiv R \bmod A,\ T \wedge A = 1,\ d^\circ R < k,\ d^\circ T \leqslant m - k$$
$(\mathcal{P}_2)$: trouver un couple $(R, T) \in K[X]^2$ vérifiant :
$$TB \equiv R \bmod A,\ d^\circ R < k,\ d^\circ T \leqslant m - k$$
Soit $j \in [1, l+1]$ pour lequel $d^\circ R_j < k \leqslant d^\circ R_{j-1}$.

(a) Démontrer que le couple (R_j, T_j) est une solution de $(\mathcal{P}_2)$. À quelle condition est-il une solution de $(\mathcal{P}_1)$?
(b) Inversement, on suppose qu'il existe un couple (R, T) solution de $(\mathcal{P}_1)$. Démontrer que :
$$\begin{cases} R_j \wedge T_j = 1 \\ \text{il existe } P \in K[X] \setminus \{0\} \text{ tel que } R = PR_j,\ T = PT_j \\ P \wedge A = 1 \end{cases}$$
Indication : on pourra s'intéresser au polynôme $R_jT - RT_j$ puis à $S_jT - TS_j$.

3. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$. On lui associe la suite de polynômes $(B_r)_{r\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $B_r = \sum\limits_{k=0}^{2r-1} u_kX^k$. On suppose qu'il existe deux polynômes $H = \sum\limits_{k=0}^{s} q_kX^k$ et R vérifiant :
$$q_0 = 1,\ d^\circ R < s, \quad \text{et} \quad \forall\, r \geqslant s,\ HB_r \equiv R \bmod X^{2r}$$
Démontrer alors que u est linéaire récurrente et que $\sum\limits_{k=0}^{s} q_{s-k}X^k \in \operatorname{Ann}(u)$.

4. Réciproquement, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}(K)$ une suite linéaire récurrente non nulle dont $Q = \sum\limits_{k=0}^{s} q_kX^{s-k}$ (avec $q_0 = 1$) est un polynôme annulateur.

(a) Dans ces conditions, démontrer que :
i) il existe un polynôme R de degré strictement inférieur à s tel que pour tout entier $r \geqslant s$:
$$Q^*B_r \equiv R \bmod X^{2r}, \quad \text{où} \quad Q^*(X) = X^sQ(\tfrac{1}{X}) = \sum_{k=0}^{s} q_kX^k$$
ii) Si $Q = \pi_u$, alors $s = \max(1 + d^\circ R,\ d^\circ Q^*)$ et $Q^* \wedge R = 1$.
(b) On reprend les notations de la question **1** avec $A = X^{2r}$, $B = B_r$, pour $r \geqslant s$; on choisit $k = r$ et on considère un entier $j \in [1, l+1]$ tel que $d^\circ R_j < r \leqslant d^\circ R_{j-1}$.
i) Vérifier que
$$T_jB_r \equiv R_j \bmod X^{2r},\ R_j \wedge T_j = T_j \wedge X^{2r} = 1,\ d^\circ T_j \leqslant r,\ d^\circ R_j < r$$
ii) En déduire qu'il existe $P \in K[X] - \{0\}$ tel que :
$$\pi_u^* = PT_j,\ R = PR_j \quad \text{et} \quad P \wedge X^{2r} = 1$$
iii) Conclure que, quitte à multiplier T_j, R_j par un élément non nul de K, on peut supposer que $T_j(0) = 1$ et que le polynôme minimal π_u est alors donné par :
$$\pi_u(X) = X^sT_j(\tfrac{1}{X}) \quad \text{où} \quad s = \max(1 + d^\circ R_j,\ d^\circ T_j)$$

FIN DU SUJET