ministère Éducation nationale

EAI MAT 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2009

CONCOURS INTERNE DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS ET CONCOURS D'ACCÈS A L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

– NOTATIONS –

- n désigne un entier naturel non nul.
- $[n]$ désigne l'ensemble des n premiers entiers non nuls.
- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels. et $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. Son élément neutre pour la multiplication, la matrice identité, est notée 1_n.
- $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs.
- $\mathcal{P}_n^{>0}$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels strictement positifs.
- $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs et dont les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales à 1, c'est à dire le sous-ensemble de $\mathcal{P}_n$ formé par les matrices $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ telles que : $\forall i \in [n],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
- Soient x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$. On note $x \leqslant y$ si, pour tout i dans $[n]$, $x_i \leqslant y_i$.
- Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ dans $\mathcal{P}_n$. On note $A \leqslant B$ si, pour tous entiers i et j dans $[n]$, on a $a_{i,j} \leqslant b_{i,j}$.

Dans les espaces vectoriels de dimension finie considérés dans ce problème, la notion de limite est relative à l'unique topologie associée à une norme arbitraire sur ces espaces.

– PRÉLIMINAIRES –

Soient $t_1, \ldots, t_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in [n],\ |z_i| \leqslant 1, \\ \left|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right| = 1. \end{cases}$$

On se propose de démontrer qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que, pour tout i dans $[n]$, on ait $z_i = z$.

1. Dans le cas particulier où $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i z_i = 1$, démontrer que, pour tout i dans $[n]$, on a $z_i = 1$.
2. Démontrer le cas général (*Indication : on pourra, en posant $Z = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i$, considérer la partie réelle du nombre complexe $\sum_{i=1}^{n} t_i z_i / Z$.*)

– PARTIE I –

Dans cette partie, on suppose $n = 2$.

Soient x, y deux nombres réels ; on pose

$$P_{x,y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-x & 1+x \\ 1+y & 1-y \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de $P_{x,y}$ et, pour chaque valeur propre, son sous-espace propre associé. Pour quelles valeurs de (x, y), la matrice $P_{x,y}$ est-elle diagonalisable ?

2. On suppose désormais $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$.

   (a) Démontrer qu'il existe un nombre réel u tel que $-1 < u < 1$ et une matrice inversible U tels que

   $$P_{x,y} = U^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} U.$$

   (b) En déduire que la suite $(P_{x,y}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L. Quel est le rang de L ?

   (c) Démontrer que

   $$L = \frac{1}{2+y+x}\begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 1+y & 1+x \end{pmatrix}.$$

Soit A une matrice dans $\mathcal{P}_2^{>0}$. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

4. Exprimer le discriminant Δ_A du polynôme caractéristique de la matrice A en fonction de a, b, c, d.

5. Démontrer l'inégalité $\Delta_A > 0$.

6. En déduire que A possède deux valeurs propres réelles distinctes. En notant λ_1, λ_2 ces deux valeurs propres numérotées de façon à avoir $\lambda_1 > \lambda_2$, démontrer l'inégalité $\lambda_1 > |\lambda_2|$.

7. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admette une limite lorsque k tend vers $+\infty$. Dans le cas où cette limite existe et n'est pas nulle, que peut-on dire de son rang ? Proposer une méthode pour calculer cette limite.

8. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels tels que $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Exhiber une matrice A dans $\mathcal{P}_2^{>0}$ dont les valeurs propres sont λ_1 et λ_2 (*Indication : on pourra commencer par traiter le cas* $\lambda_1 = 1$).

– PARTIE II –

Les matrices de $\mathcal{M}_n$ sont considérées comme des endomorphismes de $\mathbf{C}^n$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$; on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A, c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres de A. Si x est un vecteur de $\mathbf{C}^n$, on notera Ax l'image du vecteur x par l'endomorphisme défini par la matrice A.

II A : On se propose de démontrer l'équivalence :

$$\rho(A) < 1 \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0 .$$

1. Soit β un nombre complexe tel que $|\beta| < 1$. Soit B une matrice nilpotente dans $\mathcal{M}_n$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel $\ell \geqslant 1$ tel que $B^\ell = 0$; soit C la matrice $\beta 1_n + B$.
   (a) Pour tout entier $k \geqslant \ell$, exprimer C^k en fonction de $1_n, B, \dots, B^{\ell-1}$.
   (b) En déduire que la suite $(C^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n$.
   (a) Soit α une valeur propre de A. On pose $F_\alpha = \cup_{k\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(A - \alpha 1_n)^k$.
      i. Justifier que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ et que $A(F_\alpha) \subset F_\alpha$.
      ii. Soit A_α l'endomorphisme de F_α défini par $A_\alpha(x) = Ax$, pour $x \in F_\alpha$. Dans le cas où $|\alpha| < 1$, démontrer que la suite $(A_\alpha^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.
   (b) On suppose $\rho(A) < 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.
   (c) Réciproquement, si la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, montrer que le module de toute valeur propre de A est strictement inférieur à 1.

II B :

1. Soit I_A l'ensemble formé par les nombres réels strictement positifs γ tels que la suite $\left((A/\gamma)^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ tende vers 0. Démontrer que I_A est l'intervalle $]\rho(A), +\infty[$.

2. On suppose que A admet la valeur propre 1 et qu'il existe deux vecteurs x et y non nuls tels que $Ax = x$ et $Ay = y + x$. Démontrer que la suite $(A^k y)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est contenue dans aucune partie compacte de $\mathbf{C}^n$.

3. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ a pour limite une matrice B non nulle.
   (a) Démontrer que $\rho(A) = 1$.
   (b) Soit α une valeur propre de module 1 de A. Démontrer que la suite $(\alpha^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{C}$ et en déduire que $\alpha = 1$.
   (c) Démontrer que le sous-espace vectoriel F_1 défini à la question IIA2(a) est égal à $\operatorname{Ker}(A - 1_n)$.

– PARTIE III –

Dans la suite du problème, on fait les conventions suivantes:
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ dans $\mathcal{M}_n$. Si x est un vecteur de $\mathbf{C}^n$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, les coordonnées du vecteur Ax sont notées $((Ax)_1, \ldots, (Ax)_n)$; autrement dit, pour tout entier i dans $[n]$,

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \, .$$

On note w le vecteur de $\mathbf{C}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

1. Soit $A \in \mathcal{P}_n$. Démontrer que A appartient à $\mathcal{S}_n$ si et seulement si $Aw = w$.

2. Soient A et B dans $\mathcal{P}_n$ (respectivement $\mathcal{S}_n$). Démontrer que AB est dans $\mathcal{P}_n$ (respectivement $\mathcal{S}_n$).

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n$.

   (a) Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble formé par les vecteurs v de coordonnées $(v_1, \ldots, v_n)$ tels que, pour tout i dans $[n]$, $|v_i| \leqslant 1$. Démontrer que $\mathcal{B}$ est conservé par A.

   (b) En déduire que $\rho(A) = 1$.

4. Soit A dans $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$.

   (a) Soit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un vecteur propre associé à une valeur propre α de module 1 de A. Démontrer que les coordonnées de v sont égales et déterminer α. (*Indication : on pourra utiliser une égalité* $1 = |\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{v_j}{v_i}|$ *pour* v_i *non nul convenablement choisi.*)

   (b) Soit v un vecteur de $\mathcal{B}$ tel qu'il existe μ dans $\mathbf{C}$ tel que $Av = v + \mu w$. En considérant la suite $(A^k v)_{k\in\mathbf{N}}$, démontrer que $\mu = 0$.

   (c) Démontrer que 1 est une racine simple du polynôme caractéristique de A.

   (d) Démontrer qu'il existe une matrice U inversible et une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}$ telles que $\rho(B) < 1$ et

   $$A = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} U \, .$$

   (e) En déduire que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L. Quel est le rang de L ?

   (f) Démontrer que la limite L de la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ s'écrit :

   $$L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} .$$

   où $u_1, \ldots, u_n$ sont des nombres réels strictement positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

Tournez la page S.V.P.

(g) Démontrer que Ker $({}^tA - 1_n)$ est la droite engendrée par le vecteur de coordonnées $(u_1, \dots, u_n)$.

(h) Dans le cas particulier où A et ${}^tA$ sont toutes deux dans $\mathcal{S}_n$, expliciter L.

5. Soit A dans $\mathcal{S}_n$.

   (a) Démontrer que A est la limite d'une suite de matrices de $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$. (*Indication : on pourra remarquer que si A et B sont dans $\mathcal{S}_n$ et si t est un nombre réel dans $[0,1]$, $tA + (1-t)B$ est dans $\mathcal{S}_n$.)*

   (b) En déduire que ${}^tA$ admet un vecteur propre relatif à la valeur propre 1 dont toutes les coordonnées sont positives.

   (c) Démontrer sur un exemple que 1 n'est pas en général une racine simple du polynôme caractéristique de A.

   (d) Démontrer sur un exemple que A peut avoir des valeurs propres de module 1 différentes de 1.

– PARTIE IV –

Dans toute cette partie, on considère une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$, et on suppose que $A \in \mathcal{P}_n^{>0}$.

IV A : On se propose de démontrer que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est une droite engendrée par un vecteur dont les coordonnées sont des nombres réels strictement positifs.

1. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées sont des nombres réels positifs. Démontrer que les coordonnées du vecteur Ax sont des nombres réels strictement positifs.

2. Soit α un nombre réel. Supposons que, pour tout i dans $[n]$, on ait $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \alpha$. Démontrer que α est une valeur propre de A et que $\alpha = \rho(A)$.

3. Soit B dans $\mathcal{P}_n^{>0}$ telle que $A \leqslant B$.

   (a) Pour tout vecteur x de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sont des nombres réels positifs, démontrer que
   $$Ax \leqslant Bx .$$

   (b) Soit k un entier naturel $\geqslant 2$. Démontrer que $A^k \leqslant B^k$.

   (c) En déduire l'inégalité $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

4. On pose $\alpha = \min_{i\in[n]}(\sum_{j=1}^n a_{i,j})$. Démontrer que $\alpha \leqslant \rho(A)$. On pourra considérer la matrice $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ telle que, pour tous entiers i et j dans $[n]$,
   $$b_{i,j} = \frac{\alpha a_{i,j}}{\sum_{k=1}^n a_{i,k}} .$$

5. On pose $\beta = \max_{i\in[n]}(\sum_{j=1}^n a_{i,j})$. Démontrer l'inégalité $\rho(A) \leqslant \beta$.

6. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des nombres réels strictement positifs. Soient γ et δ deux nombres réels strictement positifs tels que

$$\gamma x \leqslant Ax \leqslant \delta x\ .$$

   (a) Soit S la matrice diagonale :

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

   Justifier que S est inversible et déterminer les coefficients de la matrice $S^{-1}AS$.

   (b) En déduire les inégalités $\gamma \leqslant \rho(A) \leqslant \delta$.

   (c) Démontrer qu'il existe un indice i dans $[n]$ tel que $(Ax)_i \leqslant \rho(A)x_i$.

7. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des nombres réels strictement positifs. On suppose que $\rho(A)x \leqslant Ax$. Démontrer que $Ax = \rho(A)x$ (*Indication : on pourra considérer le vecteur* $A(Ax - \rho(A)x)$).

8. Soit α une valeur propre de A dont le module est égal à $\rho(A)$. Soit v un vecteur propre associé, de coordonnées $(v_1, \ldots, v_n)$, et soit x le vecteur de coordonnées $(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|)$.

   (a) Démontrer que x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$.

   (b) Démontrer que toutes les coordonnées de x sont strictement positives.

   (c) En utilisant la matrice S définie dans la question IVA6a associée à ce vecteur x, démontrer qu'il existe une matrice U inversible et une matrice B telles que $\rho(B) < \rho(A)$ et

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} U\ .$$

IV B : On étudie le comportement de la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$.

1. Démontrer qu'il existe un unique vecteur y de $\mathbf{C}^n$ ayant pour coordonnées des nombres réels strictement positifs dont la somme est égale à 1 et tel que $Ay = \rho(A)y$. De même, démontrer qu'il existe un unique vecteur z de $\mathbf{C}^n$ ayant pour coordonnées des nombres réels strictement positifs dont la somme est égale à 1 et tel que ${}^tAz = \rho(A)z$.

2. On suppose $\rho(A) = 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers la matrice L,

$$L = (y_i z_j)_{(i,j)\in[n]\times[n]},$$

   où $(y_1, \ldots, y_n)$ et $(z_1, \ldots, z_n)$ sont respectivement les coordonnées des vecteurs y et z de la question IVB1.

3. On suppose $\rho(A) > 1$. Pour tout entier naturel k, on note $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$. Pour tout i et j dans $[n]$, démontrer que la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

– PARTIE V –

Dans cette partie, on prend $n = 3$.
Pour toute matrice B dans $\mathcal{M}_3$, $\mathrm{Tr}\,(B)$ désigne la trace de la matrice B, somme de ses coefficients diagonaux.
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[3]\times[3]} \in \mathcal{P}_3^{>0}$. On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les trois valeurs propres complexes de A, distinctes ou confondues, numérotées de telle façon que $\alpha_1 = \rho(A)$.

1. Démontrer les inégalités $\mathrm{Tr}\,(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$. En déduire l'inégalité $3\,\mathrm{Tr}\,(A^2) > \mathrm{Tr}\,(A)^2$.

2. Exprimer $\mathrm{Tr}\,(A)$ et $\mathrm{Tr}\,(A^2)$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

3. On suppose que l'on a $\alpha_1 = 1$ et que α_2 et α_3 sont deux nombres complexes conjugués $\alpha_2 = re^{it}$ et $\alpha_3 = re^{-it}$ où t et r sont des nombres réels et $0 \leq r < 1$.

   (a) Démontrer l'égalité $3\,\mathrm{Tr}\,(A^2) - \mathrm{Tr}\,(A)^2 = 2(1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}))(1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}))$.

   (b) En déduire que α_2 est à l'intérieur d'un triangle inscrit sur le cercle unité ; préciser la nature et les sommets de ce triangle.

4. Réciproquement, posons $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = re^{it}$ et $\alpha_3 = re^{-it}$, où t et r sont des nombres réels et $0 \leq r < 1$. On suppose que α_2 est à l'intérieur du triangle trouvé à la question V3. Démontrer que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les valeurs propres d'une matrice de $\mathcal{P}_3^{>0}$. *Indication : On pourra considérer la matrice :*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2r\cos(t) & 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) & 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) \\ 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) & 1 + 2r\cos(t) & 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) \\ 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) & 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) & 1 + 2r\cos(t) \end{pmatrix}.$$

5. On admet que, si α_1, α_2 et α_3 sont trois nombres réels qui satisfont aux conditions

$$\alpha_1 = 1,\ |\alpha_2| < 1,\ |\alpha_3| < 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0,$$

   il existe une matrice A dans $\mathcal{P}_3^{>0}$ dont les valeurs propres sont α_1, α_2 et α_3.

   Compte tenu de cela et des questions précédentes, décrire l'ensemble $\mathcal{S}$ formé par les triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $\mathbf{C}^3$ tels qu'il existe une matrice A dans $\mathcal{P}_3^{>0}$ dont les trois valeurs propres complexes distinctes ou confondues, sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, numérotées de telle façon que $\alpha_1 = \rho(A)$.

——— FIN DU SUJET ———

IMPRIMERIE NATIONALE – 9 155 – D'après documents fournis