ministère
Éducation
nationale

CAPES
CONCOURS EXTERNE ET CAFEP

Section : MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE D’ADMISSION

Thème : les transformations

L'exercice

Soit ABC un triangle isocèle en A et soit E un point de $[AB]$. On considère le point F de $[AC]$ tel que $AF = BE$. On note (D) la médiatrice de $[EF]$. On se propose de montrer que, lorsque E décrit $[AB]$, la médiatrice de $[EF]$ passe par un point fixe.

1) Mettre en évidence la propriété à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2) Démontrer la conjecture obtenue dans la question précédente.

La solution proposée par un élève à la question 2)

Lorsque E est en B, F est en A et donc la médiatrice de $[EF]$ est la médiatrice de $[AB]$. Lorsque E est en A, F est en C et donc la médiatrice de $[EF]$ est la médiatrice de $[AC]$. Le point fixe est donc le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ c'est à dire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le travail à exposer devant le jury

1- Indiquer les compétences, les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

2- Analyser la réponse proposée par l'élève.

3- Donner une rédaction complète d'un corrigé de la question 2) en considérant une transformation qui convient.

4- Proposer plusieurs exercices faisant appel aux transformations en tant qu'outils de démonstration.

Thème : fonctions

L'exercice

On trouve dans le manuel *Déclic - Terminale S, enseignement obligatoire* (Hachette 2006), dans le chapitre « Fonctions - Variations et continuité », l'énigme suivante :

> *Le marcheur*
> Un marcheur a parcouru 10 km en une heure. Existe-t-il un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km ?

Un extrait de manuel

Pour guider les élèves dans la résolution de l'énigme, le manuel Déclic propose l'exercice ci-dessous.

Le marcheur

Pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, on désigne par $f(t)$ la distance, en kilomètres, parcourue à l'instant t, en heures.

Il est naturel de faire l'hypothèse que f est une fonction continue sur $[0\,;1]$.

1° Préciser $f(0)$ et $f(1)$.

2° Écrire l'équation traduisant le problème.

3° Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par :

$$g(t) = f\left(t+\frac{1}{2}\right) - f(t).$$

Démontrer que l'équation $g(t) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

4° Conclure.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quels sont les savoirs et les méthodes mis en jeu par l'énigme initiale ?

2- Comment peut-on envisager d'introduire dans une classe l'exercice destiné aux élèves ? Citer quelques difficultés que peuvent éprouver certains élèves face à cette situation. Quelles autres formes d'aide sont envisageables ?

3- Présenter les explications que vous donneriez à une classe au moment de corriger la question 2° de l'exercice.

4- Proposer plusieurs problèmes à support concret faisant appel à la continuité ou à la dérivabilité des fonctions.

Thème : géométrie plane

L'exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

On considère le carré $ABCD$ et les points E et F tels que ABE et CBF soient des triangles équilatéraux directs.

1) Déterminer les coordonnées des points E et F.
2) Montrer que les points D, E et F sont alignés.
3) Calculer les distances DE, EF et DF et en déduire une égalité algébrique.

Un extrait des programmes officiels

Mathématiques - Terminale scientifique
arrêté du 20-7-2001. BO n° 4 du 30 août 2001
(...)
II. 2 Géométrie
L'objectif de ce paragraphe est d'entretenir la pratique des objets usuels du plan et de l'espace et de fournir quelques notions nouvelles permettant de parfaire l'approche entreprise dans les classe antérieures sur la géométrie vectorielle ou repérée. Dans le prolongement du repérage polaire introduit en première, les nombres complexes, outre leur intérêt historique, algébrique et interdisciplinaire pour la poursuite des études, fournissent un outil efficace dans les problèmes faisant intervenir les transformations planes. L'extension à l'espace du produit scalaire permet de résoudre de nouveaux problèmes et, de ce fait, d'approfondir la vision de l'espace.
Bien que, comme dans les programmes antérieurs, le libellé de cette partie soit relativement concis, on prendra le temps de mettre en œuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire pour l'étude de configurations du plan ou de l'espace, le calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes, etc. Ces travaux seront répartis tout au long de l'année afin que les élèves acquièrent une certaine familiarité avec le domaine géométrique ; on privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode et on entraînera les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent parmi ceux dont ils disposent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique).

Le travail à exposer devant le jury

1- Pour quelles raisons l'exercice s'inscrit-il bien dans le cadre des objectifs du programme ?

2- Présenter une solution de la question 3) de l'exercice.

3- Donner un énoncé permettant de traiter la question 2) par une autre méthode.

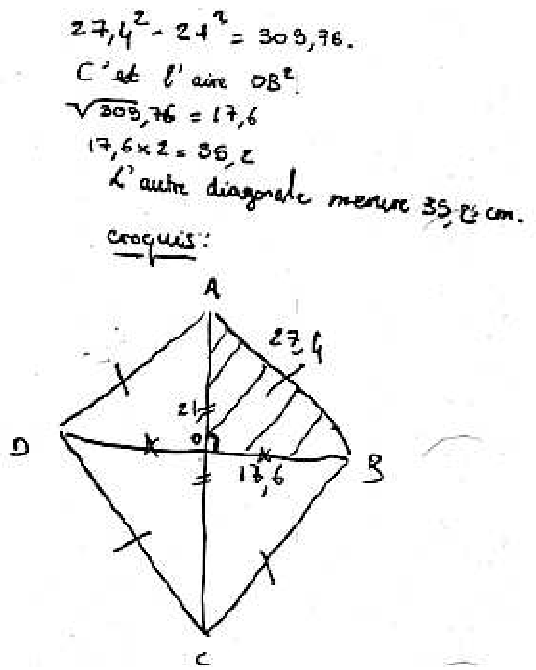
4- Proposer plusieurs exercices de géométrie plane entraînant les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent.

Thème : géométrie au collège

L'exercice

1) Un losange $ABCD$ a pour côté 27,4 cm.La diagonale $[AC]$ mesure 42 cm. combien mesure l'autre diagonale ?
2) E et F désignent les points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[CD]$ tels que $AE = \dfrac{AB}{3}$ et $CF = \dfrac{CD}{3}$. La droite (EF) coupe (AD) en I et (BC) en J.
Démontrer que BDI et BDJ sont des triangles rectangles.

La réponse d'un élève à la question 1)



Le travail à exposer devant le jury

1- Analyser la production de l'élève selon les quatre compétences suivantes :
- ◇ rechercher et organiser l'information ;
- ◇ calculer, mesurer, appliquer les consignes ;
- ◇ engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer ;
- ◇ communiquer à l'aide d'un langage mathématique adapté.

2- Présenter une animation qui permettrait d'introduire la question 2) dans un contexte plus général. Donner une correction écrite détaillée de celle-ci en précisant le public visé.

3- Proposer plusieurs exercices mettant en jeu les grands théorèmes de géométrie étudiés au collège.

Thème : courbes paramétrées

L'exercice proposé au candidat

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour tout réel t, on note $M(t)$ le point de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos(t) \\ y(t) = e^t \sin(t) \end{cases}$$

et on note $\vec{V}(t)$ le vecteur de coordonnées $\big(x'(t), y'(t)\big)$.

1) Montrer que pour tout réel t, $\overrightarrow{OM(t)} \neq \vec{0}$.
2) On note $r(t)$ et $s(t)$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM(t)}$ et $\overrightarrow{V(t)}$.
   2.a) Montrer que le complexe $z = \dfrac{s(t)}{r(t)}$ est indépendant de t.
   2.b) Déterminer un argument de z.
3) Quelle propriété géométrique le résultat précédent donne-t-il sur la courbe (C) décrite par le point $M(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$?

Le travail à exposer devant le jury

1- À quel niveau de la scolarité peut-on proposer un tel exercice ?

2- Quels sont les méthodes et les savoirs mis en jeu ?

3- Présenter une solution de la question 3) de l'exercice en l'illustrant à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

4- Proposer plusieurs exercices se rapportant au thème « courbes paramétrées », ayant une origine historique ou offrant un lien avec une autre discipline.

Thème : arithmétique

L'exercice

1) Quel est le chiffre des unités de 2^{50} ?
2) Déterminer les entiers naturels k tels que $2^k - 1$ soit un multiple de 51.

Les solutions de la question 1) proposées par cinq élèves de collège

-A-

$2^{50} = (2^{10})^5$
$= 1024^5$

$4^5 = 1024$

Donc 2^{50} se termine par 4.

-B-

III) Pour que le calcul soit plus simple, je fais :

$2^{25} \times 2^{25} = 33554432$
$\times 33554432$

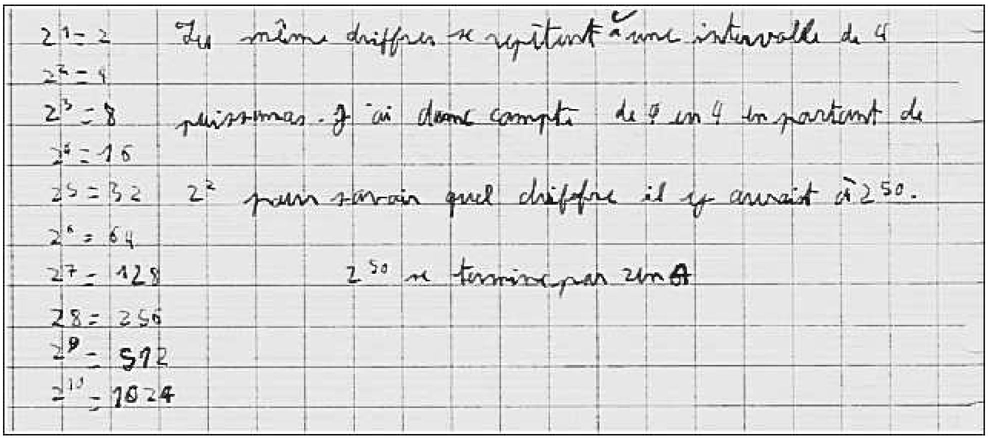
....4
.....0
...00

2^{50} se fini par 4

-C-

Quand on multiplie indéfiniment 2 par 2 on obtient toujours une succesion de série de chiffres se terminant par 2, 4, 8, 6. Donc 2^{50} est un succesion de 12 séries. Il reste encore à multiplier 2 fois par 2. Donc 2^{50} se terminera par 4.

-D-

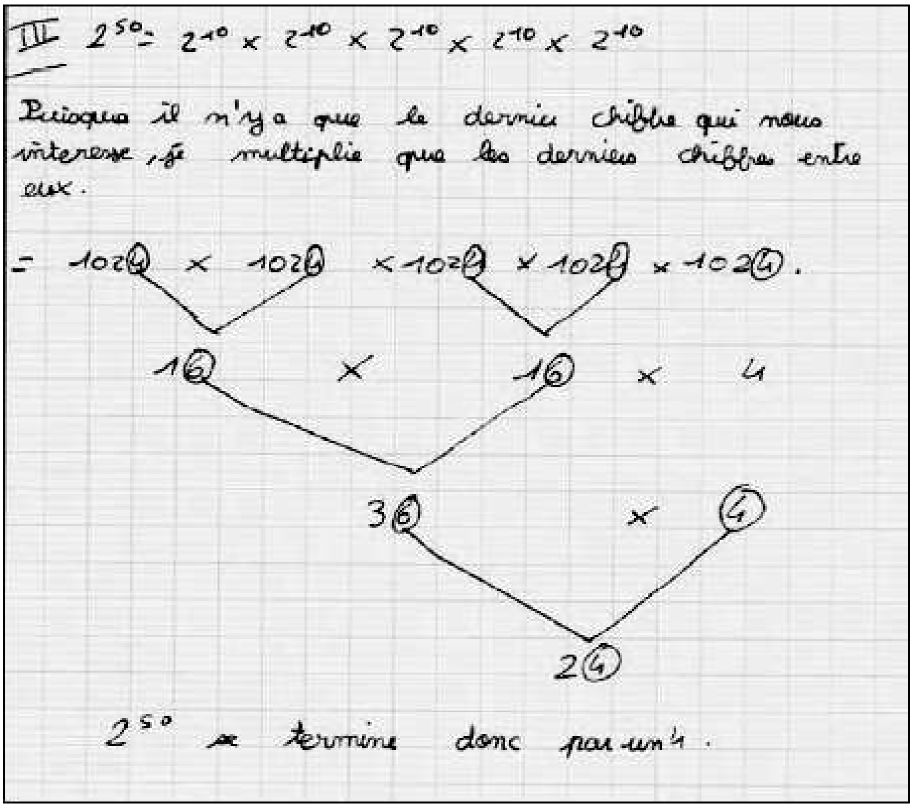


$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$

Les mêmes chiffres se répètent à une intervalle de 4 puissances. J'ai donc compté de 4 en 4 en partant de 2^2 pour savoir quel chiffre il y aurait à 2^{50}.

2^{50} se termine par un 4

-E-



III $2^{50} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$

Puisque il n'y a que le dernier chiffre qui nous interesse, je multiplie que les derniers chiffres entre eux.

$= 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024.$

$16 \times 16 \times 4$

36×4

24

2^{50} se termine donc par un 4.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analyser les travaux des élèves et et la démarche mise en œuvre par chacun d'eux pour répondre à la question posée.

2- Donner une solution des deux questions de l'exercice pour une classe de terminale scientifique.

3- Proposer plusieurs exercices sur le thème de l'arithmétique, pouvant donner lieu à un traitement différent selon le niveau considéré.

Thème : différents types de raisonnement

L'exercice

Les propositions suivantes sont indépendantes. Préciser pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1) Pour tout entier n, le nombre $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.
2) Toute suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
3) L'ensemble des nombres premiers admet un plus grand élément.

Un extrait des programmes officiels

Mathématiques - Série scientifique
BO n° 7 du 31 août 2000
(...)
Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations. Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis,...).
La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe de terminale.
La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration

Le travail à exposer devant le jury

1- En prenant appui sur l'extrait du bulletin officiel, montrer de quelle manière l'exercice permet d'illustrer certains objectifs du programme du cycle terminal de la série scientifique.

2- Indiquer le type de raisonnement qu'il est possible de mettre en œuvre pour traiter chacune des propositions de l'exercice.

3- Proposer plusieurs exercices mettant en jeu différents types de raisonnement, dont un énoncé détaillé permettant à un élève de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.