ministère
éducation
nationale
jeunesse
vie associative

EBE MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2012

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Problème 1 : anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Notations :

* Pour un ensemble fini F, on note $\text{card}(F)$ son cardinal.
* Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, on note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ et $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des éléments non inversibles.
* Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, "a divise b" est noté $a|b$, ce qui équivaut à : $\exists k \in \mathbb{Z},\ b = ka$.
* Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, le plus grand commun diviseur dans $\mathbb{N}$ de a et b est noté $a \wedge b$.
* Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\overline{a}$ la classe de a dans l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Rappels : on considère $(G, .)$ un groupe fini d'élément neutre 1_G.

* Soit $a \in G$. On appelle ordre de a, que l'on note $\omega(a)$, le plus petit élément de l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, a^k = 1_G\}$.
  On a alors : $0 < \omega(a) \leqslant \text{card}(G)$ et $a^{\omega(a)} = 1_G$.
* Le groupe G est cyclique si et seulement si il existe $a \in G$ tel que $\text{card}(G) = \omega(a)$.

Éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Démontrer que $\overline{a}$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ si et seulement si $a \wedge n = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Montrer que $(\mathcal{I}_n, \times)$ est un groupe commutatif.
3. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathcal{I}_{10}$ avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathcal{I}_{10}, \times)$ est-il cyclique ?
4. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathcal{I}_{12}$ avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathcal{I}_{12}, \times)$ est-il cyclique ?
5. Pour les algorithmes demandés, on utilisera uniquement les opérations $\times, +, \wedge$ et la fonction de deux variables `reste` où `reste(a,b)` donne le reste de la division euclidienne de a par b pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

   On pourra également utiliser des boucles de type

   - `for`
   - `while`
   - et la construction `if...then...else...`.

   On précisera le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé.

   5.1. Écrire une procédure `Test( , )` ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant "1" si $\overline{k} \in \mathcal{I}_n$ et "0" sinon.

   5.2. Écrire une procédure `Card( )` ayant comme argument un entier n avec $n > 1$ affichant le cardinal de $\mathcal{I}_n$.

   5.3. Écrire une procédure `Ord( , )` ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant la valeur de $\omega\left(\overline{k}\right)$, l'ordre de $\overline{k}$ dans $(\mathcal{I}_n, \times)$, si $\overline{k} \in \mathcal{I}_n$ et `"Erreur"` sinon.

Éléments non inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que n est primaire lorsqu'il existe un nombre premier p et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p^{\alpha}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ et n ne soit pas primaire.

   6.1. Établir qu'il existe deux entiers, que l'on notera n_1 et n_2, tels que $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 < n$ et $n_1 \wedge n_2 = 1$.

   On pourra utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

   6.2. Montrer alors que $(n_1 + n_2) \wedge n = 1$.

6.3. Établir également que : $\overline{n_1} \notin \mathcal{I}_n$ et $\overline{n_2} \notin \mathcal{I}_n$

7. On considère p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $k \in \mathbb{Z}$. Prouver que : $\overline{k} \in \mathcal{N}_{p^\alpha} \iff p|k$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$.
   Démontrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si n est primaire.

Problème 2 : isométries du plan et de l'espace

On considère $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n \in \{2, 3\}$) muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien.
Rappels et notations :

- Pour un ensemble fini F, on note $\mathrm{card}(F)$ son cardinal.
- E est muni canoniquement d'une structure affine.
- Une application affine de E est une application $f : E \longrightarrow E$ telle qu'il existe une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow E$ vérifiant : pour tout $(A, B) \in E^2$, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

  f étant donnée, l'application φ est unique, elle est appelée *partie linéaire* de f et on la note $\overrightarrow{f}$.
- Une isométrie de E est une application $f : E \longrightarrow E$ vérifiant :

$$\text{pour tout } (A, B) \in E^2, \quad f(A)f(B) = AB$$

- Une isométrie de E est une application affine de E.
- Si f est une isométrie de E, on dit que f est un déplacement de E lorsque $\det\left(\overrightarrow{f}\right) > 0$.
- On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries de E, $Is^+(E)$ l'ensemble des déplacements et $Is^-(E) = Is(E) \setminus Is^+(E)$.
- L'image d'une droite (resp. d'un plan) de E par une isométrie de E est une droite (resp. un plan).
- Une isométrie de E est une bijection de E sur E.
- $(Is(E), \circ)$ est un groupe et $Is^+(E)$ est un sous-groupe de $(Is(E), \circ)$.
- Si $f \in Is^-(E)$ et $g \in Is^-(E)$, alors $f \circ g \in Is^+(E)$.
- Si $f \in Is^+(E)$ et $g \in Is^-(E)$, alors $f \circ g \in Is^-(E)$.
- Pour une isométrie f de E, on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ l'application identité de E, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et f^{-1} la bijection réciproque de f.
- On considère F une partie non vide de E. On note $G(F)$ (respectivement $G^+(F)$) l'ensemble des isométries (respectivement déplacements) de E laissant globalement invariant l'ensemble F.
  Ainsi pour tout $f \in Is(E)$ on a : $f \in G(F) \iff f(F) = F$.
  De plus, on a : $G^+(F) = G(F) \cap Is^+(E)$.
  On définit enfin $G^-(F) = G(F) \setminus G^+(F)$.

Partie A : généralités

1. Soit $f \in Is(E)$.
   Établir que $f \in G(F)$ si et seulement si pour tout $M \in F$, on a $\begin{cases} f(M) \in F \\ f^{-1}(M) \in F \end{cases}$.
2. Montrer que $G(F)$ et $G^+(F)$ sont des sous-groupes de $(Is(E), \circ)$.

3. Soit $s \in Is(E)$ telle que s soit une symétrie.
   Établir que $s \in G(F)$ si et seulement si pour tout $M \in F$, on a $s(M) \in F$.
   On rappelle qu'une symétrie σ de E est une application affine telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$.
4. On suppose qu'il existe $\varphi \in G^-(F)$. On note $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} G^+(F) & \longrightarrow & G^-(F) \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array} \right.$.
   4.1. Justifier que Φ est une application bien définie.
   4.2. Montrer que Φ est une bijection.
5. Démontrer que si $G(F)$ est fini alors $\operatorname{card}(G(F)) = \operatorname{card}(G^+(F))$ ou $\operatorname{card}(G(F)) = 2\operatorname{card}(G^+(F))$.

Partie B : exemples dans le plan euclidien

Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 2$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ orienté.
On rappelle que $Is^+(\mathcal{P})$ est constitué des rotations et des translations et que les réflexions (symétries orthogonales par rapport à des droites) sont des éléments de $Is^-(\mathcal{P})$.

Un singleton

Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$.

1. On considère une application $f \in Is^-(\mathcal{P})$ telle que $f(\Omega) = \Omega$.
   1.1. Justifier qu'il existe $I \in \mathcal{P}$ tel que $f(I) \neq I$. On appelle r la réflexion ayant pour axe la médiatrice de $[I, f(I)]$.
   1.2. Montrer que $r(\Omega) = \Omega$ puis que $r \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.
   1.3. En déduire que f est une réflexion.
2. Démontrer que les éléments de $G(\{\Omega\})$ sont les rotations de centre Ω et les réflexions d'axe passant par Ω.

Une paire

On considère une paire de points du plan, $\mathcal{U} = \{P_1, P_2\}$ où $P_1 \neq P_2$.
On note I le milieu dù segment $[P_1, P_2]$.

3. Soit $f \in G(\mathcal{U})$. Montrer que $f(I) = I$.
4. Soit $f \in G^+(\mathcal{U})$ tel que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Prouver que f est la symétrie centrale de centre I.
5. Montrer alors que $G(\mathcal{U})$ est formé de quatre éléments : $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, la symétrie centrale de centre I et deux réflexions.

Une ellipse

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les axes de coordonnées sont notés : (Ox) et (Oy).

On considère l'ellipse Γ d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$.

On note $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ les sommets principaux de l'ellipse Γ. On note s la symétrie centrale de centre O, r_1 la réflexion d'axe (Ox) et r_2 la réflexion d'axe (Oy), de sorte que, d'après de qui précède :

$$G(\{A, A'\}) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, s, r_1, r_2\}$$

6. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y). Donner les coordonnées des points $s(M), r_1(M)$ et $r_2(M)$.
7. Montrer alors que $G(\{A, A'\}) \subset G(\Gamma)$.

On note $\Delta = \{M \in \mathcal{P} \,/\, OM \leqslant a\}$ le disque fermé de centre O et de rayon a et Λ le cercle de centre O et de rayon a.

8. Pour $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$, représenter sur un même graphique l'ellipse Γ et le cercle Λ.
9. Établir que $\Gamma \subset \Delta$.
10. Montrer que $\Gamma \cap \Lambda = \{A, A'\}$.
11. Soient P et P' deux points de Γ.
    (a) Montrer que : $PP' \leqslant 2a$.
    (b) Établir de plus que : $PP' = 2a \iff \{P, P'\} = \{A, A'\}$.
12. En déduire que : $G(\Gamma) = G(\{A, A'\})$.

Partie C : étude d'isométries de l'espace

Pour la fin du problème, on se place dans le cas où $n = 3$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct : $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. Les axes de coordonnées sont notés $(Ox), (Oy)$ et (Oz).
On rappelle qu'un automorphisme u de $\mathcal{E}$ est orthogonal si et seulement si pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathcal{E}$: $\|u(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$ où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathcal{E}$.
$O(\mathcal{E})$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de $\mathcal{E}$.
On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ${}^tAA = I_3 = A\,{}^tA$ où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.
L'ensemble des matrices orthogonales (resp. orthogonales de déterminant 1) est noté $O_3(\mathbb{R})$ (resp. $SO_3(\mathbb{R})$).

1. Soit $f \in Is(\mathcal{E})$.
   1.1. Montrer que $\overrightarrow{f} \in O(\mathcal{E})$.
   On note alors A la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormale directe $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, X, X' et B les matrices colonnes respectives des coordonnées des points $M(x, y, z), M'(x', y', z')$ et $f(O)(\alpha, \beta, \gamma)$ dans le repère $\mathcal{R}$.
   1.2. Montrer que : $f(M) = M' \iff X' = AX + B$.
   (C'est l'expression analytique de f relativement au repère $\mathcal{R}$.)
   1.3. Montrer que : $A \in O_3(\mathbb{R})$ puis que : $f \in Is^+(\mathcal{E})$ si et seulement si $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ on considère les matrices carrées :

$$A_0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $A_i \in O_3(\mathbb{R})$.
3. Pour quelles valeurs de $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, a t-on $A_i \in SO_3(\mathbb{R})$?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice colonne $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et on définit les applications t_λ, v_λ, s et r de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ par leur expression analytique :

$$t_\lambda : X' = X + B_\lambda, \qquad v_\lambda : X' = A_1X + B_\lambda, \qquad s : X' = A_2X, \qquad r : X' = A_3X$$

De plus, on note $v = v_0$.
On rappelle que $Is^+(\mathcal{E})$ est constitué des translations, des rotations axiales et des vissages. Les réflexions de $\mathcal{E}$ (symétries orthogonales par rapport à un plan) sont des éléments de $Is^-(\mathcal{E})$.

4. Sans justification, donner la nature des transformations t_λ, v, s et r ainsi que leur(s) élément(s) caractéristique(s).
5. Montrer que $v_\lambda = v \circ t_\lambda = t_\lambda \circ v$ et reconnaître cette transformation en précisant ses éléments caractéristiques.
   On pourra utiliser un calcul matriciel.
6. Soient γ et $\delta \in \mathbb{R}$. Montrer que $v_\gamma \circ v_\delta = t_{\gamma+\delta}$ et que $t_\gamma \circ v_\delta = v_{\gamma+\delta}$.

Partie D : un cylindre à base elliptique

On considère deux réels strictement positifs a et b tels que $a > b$.
On considère le cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

On considère Π le plan d'équation $z = 0$ et Γ l'intersection du cylindre $\mathcal{C}$ et du plan Π.

Tournez la page S.V.P.

On remarque que la courbe Γ est l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ dans $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ repère orthonormé du plan Π.

Pour $\theta\in\mathbb{R}$ fixé, on considère la droite d_θ de $\mathcal{E}$ d'équations : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cos(\theta) \\ y & = & b\sin(\theta)\end{array}\right.$.

On va montrer que les éléments de $G(\mathcal{C})$ peuvent s'écrire en composant certaines isométries de la partie précédente.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que t_λ, v_λ, s et r sont des éléments de $G(\mathcal{C})$.
2. Montrer que $\mathcal{C}=\displaystyle\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} d_\theta$.
3. Soit $\mathcal{D}$ une droite non parallèle à d_0.
   - 3.1. Établir que $\mathcal{D}$ admet un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ tel que α et β ne sont pas simultanément nuls.
     On pourra commencer par donner un vecteur directeur de d_θ pour $\theta\in\mathbb{R}$.
   - 3.2. On note $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $\mathcal{D}$.
     Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ obtenue à l'aide de $\overrightarrow{u}$ et de M_0.
   - 3.3. Montrer alors que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en au plus deux points.
4. Soit $f\in G(\mathcal{C})$. Déduire de la question précédente que $f(d_0)$ est parallèle à la droite d_0.
5. Soit $f\in G(\mathcal{C})$. Montrer que $\overrightarrow{k}$ est un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$.
6. Soit $\varphi\in O(\mathcal{E})$ admettant $\overrightarrow{k}$ comme vecteur propre.
   - 6.1. Établir que φ admet dans la base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ une matrice de $O_3(\mathbb{R})$, donnée par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{M}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ où $M\in O_2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$.
   - 6.2. Vérifier que $\varepsilon=\det(\varphi)\det(M)$.
7. Soit $f\in G^+(\mathcal{C})$ tel que $f(O)\in\Pi$. On admet que $f(\Pi)=\Pi$.
   On peut donc définir $g:\left\{\begin{array}{ccc}\Pi & \longrightarrow & \Pi \\ M & \longmapsto & g(M)=f(M)\end{array}\right.$, application induite par f sur Π.
   - 7.1. Établir que g est une isométrie de Π vérifiant $g(\Gamma)=\Gamma$.
   - 7.2. À l'aide de la partie B, énoncer les quatre possibilités pour g puis en déduire que $f(O)=O$.
   - 7.3. Écrire les quatre possibilités pour la matrice de $\overrightarrow{g}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
   - 7.4. Vérifier alors que l'on peut trouver i et $j\in\{0,1\}$ tels que $f=v^j\circ s^i$.
     On pourra utiliser l'expression analytique de f et la question 6.
8. Soit $f\in G^+(\mathcal{C})$ tel que $f(O)\notin\Pi$
   On note O' le projeté orthogonal de $f(O)$ sur le plan Π, t la translation de vecteur $\overrightarrow{f(O)O'}$ et $h=t\circ f$.
   - 8.1. Montrer que $h\in G^+(\mathcal{C})$ et $h(O)\in\Pi$.
     On pourra commencer par justifier que t peut s'écrire $t=t_\mu$ avec $\mu\in\mathbb{R}^*$ et utiliser la question 1.
   - 8.2. Montrer que l'on peut trouver $\lambda\in\mathbb{R}^*$, i et $j\in\{0,1\}$ tels que $f=t_\lambda\circ v^j\circ s^i$.
9. Soit $f\in G^-(\mathcal{C})$.
   - 9.1. Établir que $r\circ f\in G^+(\mathcal{C})$.
   - 9.2. En déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$, i et $j\in\{0,1\}$ tels que $f=r\circ t_\lambda\circ v^j\circ s^i$.

Partie E : une hélice.

On reprend dans cette partie les notations de la partie précédente.

On considère l'arc paramétré $M : \left\{ \begin{array}{rcc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ t & \longmapsto & M(t)\,(a\cos(t), b\sin(t), t) \end{array} \right.$

On note $\mathcal{H}$ la trajectoire de cet arc paramétré.

1. Montrer que $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ une droite telle que $\mathcal{D}$ coupe la courbe $\mathcal{H}$ en au moins trois points.
   Montrer alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} = d_\theta$.
   On pourra utiliser les questions 2. et 3. de la partie D.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $d_\theta \cap \mathcal{H} = \{M(\theta + 2k\pi) \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Soient $f \in G(\mathcal{H})$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $f(d_\theta) = d_\omega$.
5. En déduire que $G(\mathcal{H}) \subset G(\mathcal{C})$.
6. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $t_{2k\pi} \in G(\mathcal{H})$.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $t_\lambda \in G(\mathcal{H})$. Prouver qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = 2k\pi$.
   On pourra utiliser le fait que $t_\lambda\,(M(0)) \in \mathcal{H}$.
8. Justifier brièvement que s et $v_{-\pi} \in G(\mathcal{H})$.
9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_\lambda \in G(\mathcal{H})$. Prouver qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = (2k+1)\pi$.
   On pourra utiliser le fait que $v_\lambda\,(M(0)) \in \mathcal{H}$.
10. Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. Démontrer que :

$$f \in G^+(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists i \in \{0,1\}\,,\ \begin{cases} f = t_{2k\pi} \circ s^i \\ \qquad \text{ou} \\ f = v_{(2k+1)\pi} \circ s^i \end{cases}$$

11. On veut montrer que $G(\mathcal{H}) = G^+(\mathcal{H})$.
    Pour cela, on suppose que $G(\mathcal{H}) \neq G^+(\mathcal{H})$.
    - 11.1. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, i et $j \in \{0,1\}$ tels que $r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i \in G^-(\mathcal{H})$.
    - 11.2. En déduire que l'on peut trouver un réel noté μ tel que $r \circ t_\mu \in G^-(\mathcal{H})$.
    - 11.3. Calculer les coordonnées du point $r \circ t_\mu\,(M\,(0))$.
    - 11.4. En déduire que l'on peut trouver $m \in \mathbb{Z}$ tel que $r \circ t_{2m\pi} \in G^-(\mathcal{H})$.
    - 11.5. En déduire que $r \in G^-(\mathcal{H})$.
    - 11.6. Calculer les coordonnées du point $r\left(M\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
    - 11.7. Conclure.