ministère éducation nationale jeunesse vie associative

Secrétariat Général

Direction générale des ressources humaines

Sous-direction du recrutement

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Concours du second degré – Rapport de jury

Session 2011

CAPES Externe de MATHÉMATIQUES

Rapport de jury présenté par M. Xavier SORBE
Président de jury

Les rapports des jurys des concours sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

Conseil aux futurs candidats

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités du concours.

Les renseignements généraux (conditions d'accès, épreuves, carrière, etc.) sont donnés sur le site du ministère de l'éducation nationale (système d'information et d'aide aux concours du second degré) :

http://www.education.gouv.fr/pid63/siac2.html

Pour faciliter la recherche d'informations spécifiques, le jury du CAPES externe de Mathématiques met à disposition des candidats et des formateurs un site dédié au concours :

http://capes-math.org

Les épreuves écrites de la session 2011 se sont déroulées les 18 et 19 novembre 2010.

Les épreuves orales se sont tenues du 23 juin au 9 juillet 2011,
dans les locaux du lycée Jean Lurçat, Paris 13^{e}.
Que soient ici remerciés Madame le Proviseur et l'ensemble des personnels du lycée
pour la qualité de leur accueil et leur disponibilité.

Table des matières

1 PRÉSENTATION DU CONCOURS 2011

1.1 Composition du jury

ABADIE Marie-Luce	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
AGUER Bernard, vice-président	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
ALARIC Bernard	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
AMMAR KHODJA Farid	maître de conférences
ANDRIEUX Jean-Claude, vice-président	professeur agrégé
BARACHET Françoise	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BARKA Odile, vice-présidente	maître de conférences
BARLIER Philippe	professeur agrégé
BARNET Christophe	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BARRIÉ Mireille	professeur agrégé
BENZIDIA Abdelaziz	professeur agrégé
BLOND Elisabeth	professeur agrégé
BLUTEAU-DAVY Véronique	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BOUCHEL Olivier	professeur agrégé
BOUDARN Dalia	professeur agrégé
BOURDEAU Marie-Françoise	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BOURHRARA Mostafa	professeur agrégé
BOZON Marie-Pierre	professeur agrégé
BRANDEBOURG Patrick	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
BRETONNIÈRE Laurent	professeur agrégé
BRISOUX François	professeur agrégé
CANTINEAU Christine	professeur agrégé
CAPY François	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
CHARPENTIER-TITY Charles	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
CORTEZ Aurélie	maître de conférences
COURBON Denise	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
CROUZIER Anne	professeur agrégé
DÉAT Joëlle	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
DEBARGE Régis	professeur agrégé
DEGAND Caroline	professeur agrégé
DELLINGER Marie	professeur agrégé
DESROUSSEAUX Pierre-Antoine	professeur agrégé
DIGER Alain	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
DOMBRY Clément	maître de conférences
DUBOULOZ Georges	professeur agrégé
DUDOGNON Marylène	professeur agrégé
DUSSART Delphine	professeur agrégé
FAURE Christian	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
FERACHOGLOU Robert	professeur agrégé
FÉVOTTE Philippe	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GARCIA Gilles	professeur agrégé
GAUCHARD Xavier	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GÉRARD Danièle	professeur agrégé
GIRAULT Dominique	professeur agrégé
GOSSE Michel, vice-président	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
GOUY Michel	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional

GRILLOT Michèle	maître de conférences
GRUNER Ilme	professeur agrégé
HÉZARD David	professeur agrégé
HUBERT Nicolas	professeur agrégé
HUNAULT Ollivier	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
JACQUES Isabelle	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
JACQUIN Martine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
JOURDEN Gilbert	professeur de chaires supérieures
LA FONTAINE François	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LAFARGUE Benoît	professeur agrégé
LAOUES Mourad	professeur agrégé
LASSALLE Olivier	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LAURENT Céline	professeur agrégé
LE GALL Pol	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LEGROS Stéphane	professeur de chaires supérieures
LEGRY Ludovic	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LETORT Pierre-Yves	professeur agrégé
LORIDON Geneviève	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
LOUVRIER Pascale	professeur agrégé
MAGNIN Nicolas	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MALLEGOL Pascale	professeur agrégé
MALLET Nathalie	professeur agrégé
MARINO Alexandre	professeur agrégé
MAROTTE Fabienne	maître de conférences
MARQUIER Soisick	professeur agrégé
MARTEAU Jean Luc	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MARTINEZ-LABROUSSE Isabelle	professeur agrégé
MASSELIN Vincent	professeur agrégé
MÉDARD-CHALAYE Natacha	professeur agrégé
MÉGARD Marie, vice-présidente	inspecteur général de l'éducation nationale
MÉLET Séverine	professeur agrégé
MESSÉANT Véronique	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MICHALAK Pierre	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
MICHAU Nadine	professeur agrégé
MOUCAUD Michèle	professeur agrégé
MOURLAN Sandrine	professeur agrégé
NADIR Hachemi	professeur agrégé
NEVADO Alain	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
NOÉ Laurent	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
NOGUES Maryse	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
OBERT Marie-Christine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
OLLIVIER Gilles	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PAGOTTO Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PASSERAT Stéphane	professeur agrégé
PAYET Willy	professeur de chaires supérieures
PETIT Francis	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
PICAMOLES Xavier	professeur agrégé
PICARD Sandrine	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
POMAGEOT Loïc	professeur agrégé
RASKINE Anne	professeur agrégé

RENIER Guillaume	professeur agrégé
RODOZ-PLAGNE Sophie	professeur agrégé
ROIGNAN SOARES Nathalie	professeur agrégé
ROLAND Audrey	professeur agrégé
SABBAN Chloé	professeur agrégé
SALVI Karine	professeur agrégé
SASSI Taoufik	professeur des universités
SCATTON Philippe	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SERRA Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SIDOKPOHOU Olivier	professeur agrégé
SIGWARD Eric	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SINTUREL Emile	professeur agrégé
SLAMA Caroline	professeur agrégé
SORBE Xavier, président du jury	inspecteur général de l'éducation nationale
SOROSINA Eric	professeur agrégé
STRAUB Odile	inspecteur d'académie - inspecteur pédagogique régional
SZWARCBAUM Elia	professeur agrégé
TERRACHER Pierre-Henri	maître de conférences
TESTUD Benoît	maître de conférences
TRAYNARD Alice	professeur agrégé
TREFOND Marie-Christine	professeur de chaires supérieures
TUDESQ Christian	professeur agrégé
VANROYEN Jean-Philippe	professeur agrégé
VANTROYS Fanny	professeur agrégé
ZARRABI Mohamed	maître de conférences
ZWERTVAEGHER Karine	professeur agrégé

1.2 Définition des épreuves

Arrêté du 28 décembre 2009 fixant les sections et les modalités d'organisation des concours du certificat d'aptitude au professorat du second degré (MENH0931286A)

Section mathématiques

A. — Épreuves d'admissibilité

1° Première composition écrite (durée : cinq heures, coefficient 3).
2° Deuxième composition écrite (durée : cinq heures, coefficient 3).
Le sujet de chaque composition est constitué d'un ou de plusieurs problèmes.
Le programme de ces épreuves est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE).
L'usage de calculatrices scientifiques est autorisé selon la réglementation en vigueur.

B. — Épreuves d'admission

1° Leçon portant sur les programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.
Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.
Le candidat choisit un thème, parmi deux qu'il tire au sort.
Dans un premier temps (quinze minutes maximum), le candidat expose un plan d'étude détaillée du sujet qu'il a choisi.
Dans un second temps (quinze minutes maximum), le candidat développe une partie de ce plan d'étude, choisie par le jury.
L'épreuve se termine par un entretien avec le jury portant sur ce développement, puis sur d'autres aspects relevant du sujet choisi par le candidat.
Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.

2° Epreuve sur dossier comportant deux parties : 14 points sont attribués à la première partie et 6 points à la seconde. Durée de la préparation : deux heures et demie ; durée totale de l'épreuve : une heure ; coefficient 3.
Première partie : épreuve d'exercices ; durée : quarante minutes.
L'épreuve permet au candidat de montrer :

- sa culture mathématique et professionnelle ;
- sa connaissance des contenus d'enseignement et des programmes ;
- sa réflexion sur l'histoire et les finalités des mathématiques et leurs relations avec les autres disciplines.

L'épreuve s'appuie sur un dossier fourni par le jury, portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège, du lycée ou des sections de techniciens supérieurs. Ce thème est illustré par l'énoncé d'un exercice, pouvant être complété par des extraits de manuels, des productions d'élèves ou des passages des programmes officiels. Le dossier comprend des questions permettant d'apprécier la réflexion pédagogique du candidat. Ces questions portent sur l'énoncé de l'exercice et sa résolution ou d'autres aspects pédagogiques liés au contenu du dossier.
Pendant vingt minutes, le candidat expose ses réponses aux questions posées dans le dossier et propose, en motivant ses choix, plusieurs exercices s'inscrivant dans le thème du dossier.
Cette première partie se termine par un entretien avec le jury, portant sur l'exposé du candidat, en particulier sur les exercices qu'il a proposés, aussi bien en ce qui concerne leur résolution que les stratégies mises en œuvre.
Pendant le temps de préparation et lors de l'interrogation, le candidat bénéficie du matériel informatique mis à sa disposition. Il a également accès aux ouvrages de la bibliothèque du concours et peut, dans les conditions définies par le jury, utiliser des ouvrages personnels.
Le programme de cette première partie d'épreuve est constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs.
Seconde partie : interrogation portant sur la compétence Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable . (Présentation dix minutes, entretien avec le jury : dix minutes.)
Le candidat répond pendant dix minutes à une question, à partir d'un document inclus dans le dossier qui lui a été remis au début de l'épreuve, question pour laquelle il a préparé les éléments de réponse durant le temps de préparation de l'épreuve. La question et le document portent sur les thématiques regroupées autour des connaissances, des capacités et des attitudes définies, pour la compétence désignée ci-dessus, dans le point 3 « les compétences professionnelles des maîtres » de l'annexe de l'arrêté du 19 décembre 2006.
L'exposé se poursuit par un entretien avec le jury pendant dix minutes.

1.3 Programme

Bulletin officiel spécial n°7 du 8 juillet 2010

Épreuves écrites
Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée (STS et CPGE) en vigueur au titre de l'année scolaire 2010-2011 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2009-2010.

Épreuves orales
Le programme est constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de techniciens supérieurs en vigueur au titre de l'année scolaire 2010-2011 et de ceux en vigueur au titre de l'année scolaire 2009-2010.

2. QUELQUES STATISTIQUES

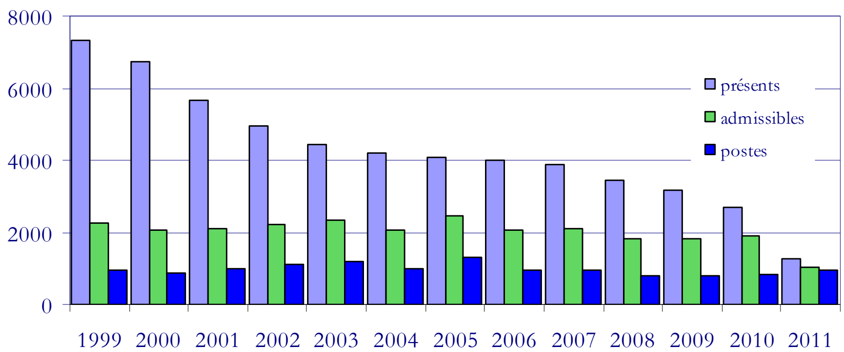
2.1 Historique

La session 2011 des concours externes de recrutement d'enseignants a été marquée par la mise en œuvre des décrets du 28 juillet 2009 modifiant les conditions d'inscription.
Pour se présenter au CAPES, il faut désormais être titulaire d'un master ou d'un diplôme équivalent, ou bien être inscrit en dernière année d'études en vue de l'obtention d'un tel diplôme (décret 2009-915 du 28 juillet 2009, MENH0910221D, arrêté du 31 décembre 2009, MENH0931169A) : ces nouvelles dispositions ont provoqué pour cette session une baisse mécanique du nombre d'inscrits.

Avec moins de la moitié de l'effectif de l'année précédente, le CAPES externe de Mathématiques a atteint un ratio candidats / postes particulièrement faible : 1,4.
Compte tenu de cette situation inédite et des besoins des académies en enseignants titulaires, le concours 2011 a été exceptionnellement ouvert, puisque 45% des candidats présents à l'écrit ont été admis.

CAPES	postes	présents aux deux épreuves écrites	admissibles	admis
1999	945	7332	2274	945
2000	890	6750	2067	890
2001	990	5676	2109	990
2002	1125	4948	2213	1125
2003	1195	4428	2328	1195
2004	1003	4194	2040	1003
2005	1310	4074	2473	1310
2006	952	3983	2043	952
2007	952	3875	2102	952
2008	806	3453	1802	806
2009	806	3160	1836	806
2010	846	2695	1919	846
2011	**950**	**1285**	**1047**	**574**

présents / postes	admis / présents
7,8	13%
7,6	13%
5,7	17%
4,4	23%
3,7	27%
4,2	24%
3,1	32%
4,2	24%
4,1	25%
4,3	23%
3,9	26%
3,2	31%
1,4	**45%**



Pour le CAFEP, le ratio a été de 3 candidats présents pour un poste.

CAFEP	postes	présents aux deux épreuves écrites	admissibles	admis
1999	210	847	107	57
2000	206	1030	145	78
2001	215	889	200	113
2002	230	745	192	118
2003	230	636	214	116
2004	177	658	205	103
2005	177	644	279	139
2006	135	689	283	126
2007	160	693	267	123
2008	155	631	200	90
2009	109	633	268	109
2010	155	554	308	119
2011	**90**	**276**	**198**	**90**

2.2 Répartition des notes

Les données suivantes concernent les concours CAPES et CAFEP confondus.
Sauf mention contraire, les notes indiquées sont sur 20.

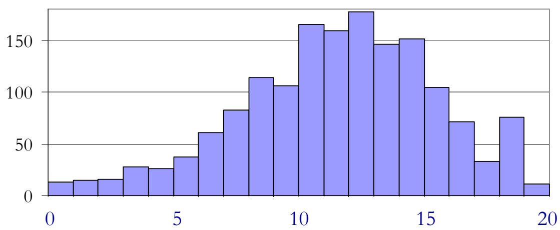
2.2.1 Épreuves d'admissibilité

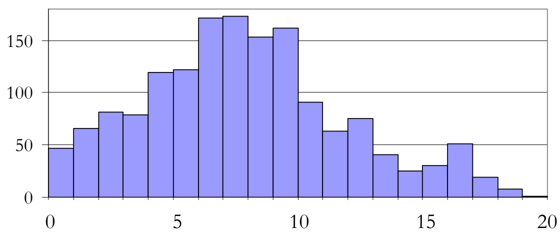
Première composition

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
11,54	3,89	9,12	11,79	14,30

Deuxième composition

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
7,83	4,06	5,03	7,62	10,16

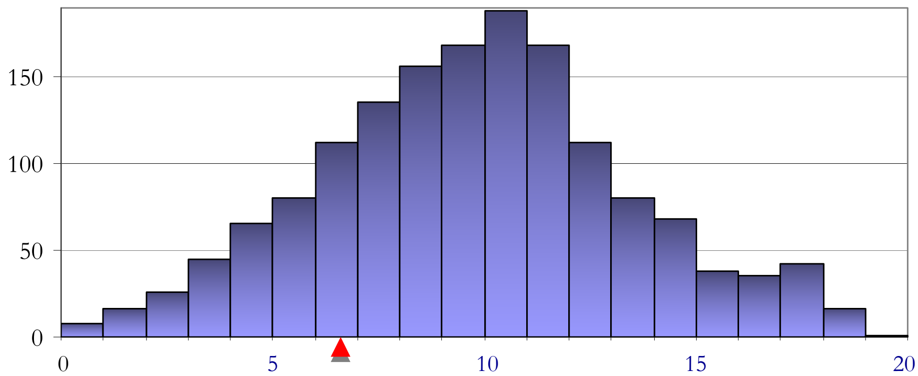




Le coefficient de corrélation linéaire entre les notes des deux épreuves écrites est 0,76.

Moyenne écrit

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,76	3,66	7,32	9,80	12,00

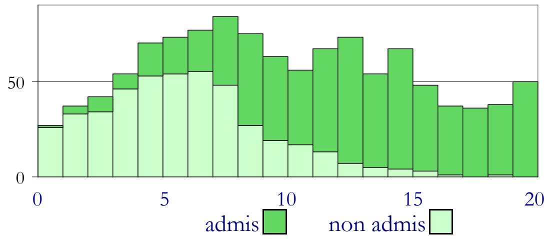


La barre d'admissibilité (ci-dessus en rouge) a été fixée à 39,87 sur 120, soit 6,65 sur 20.

2.2.2 Épreuves d'admission

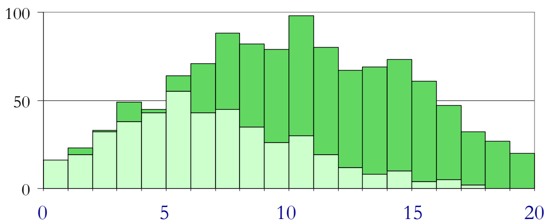
Leçon

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,53	5,18	5,55	9,00	13,80



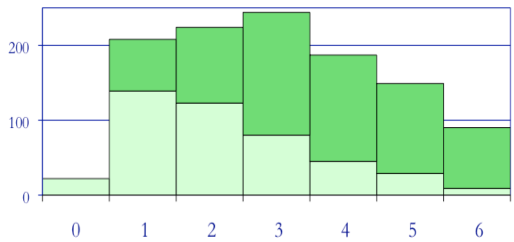
Dossier / Exercice

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,79	4,58	6,00	10	13,05



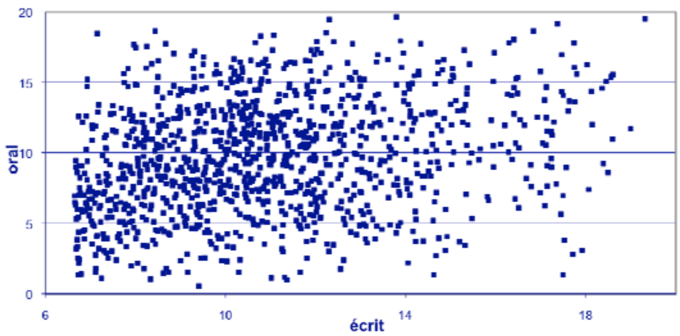
Dossier / Agir en fonctionnaire (notes sur 6)

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
3,04	1,59	2	3	4



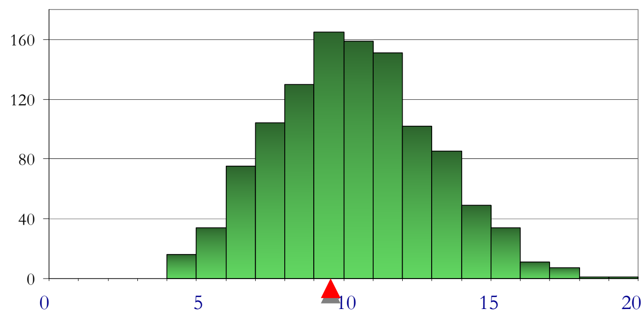
La note sur 20 de l'épreuve sur dossier est constituée de la partie « Exercice » sur 14 (représentée ici sur 20) et de la partie « Agir en fonctionnaire » sur 6.

Le nuage ci-dessous donne une répartition des candidats en fonction de leurs moyennes à l'écrit et à l'oral. Les épreuves d'admission ont joué pleinement leur rôle dans le classement final.



Moyenne générale (écrit et oral)

Moyenne	Écart-type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
10,33	2,66	8,49	10,23	12,09



La barre d'admission (ci-dessus en rouge) a été fixée a 113,88 sur 240, soit 9,49 sur 20.
Compte tenu de l'exigence de qualité que requiert le recrutement de professeurs certifiés, il n'a pas été possible de pourvoir l'ensemble des postes mis au concours du CAPES externe, ce qui ne s'était pas produit depuis la session 1996.

Tous les postes du CAFEP ont été pourvus, pour la deuxième fois depuis la création de ce concours (barre à 120,69 sur 240, soit 10,06 sur 20).

2.3 Autres données

Les données suivantes concernent les concours CAPES et CAFEP confondus, en distinguant les candidats présents aux épreuves écrites, les admissibles et les admis (CAPES : 574 admis et un à titre étranger, CAFEP : 90 admis).

Sexe	présents		admissibles		admis	
Femmes	721	46%	571	46%	336	51%
Hommes	840	54%	674	54%	329	49%
	1561		1245		665	

Âge	présents		admissibles		admis	
entre 20 et 25 ans	427	27%	387	31%	273	41%
entre 25 et 30 ans	648	42%	538	43%	284	43%
entre 30 et 35 ans	202	13%	136	11%	50	8%
antre 35 et 40 ans	120	8%	72	6%	29	4%
entre 40 et 45 ans	87	6%	59	5%	19	3%
entre 45 et 50 ans	38	2%	25	2%	6	1%
plus de 50 ans	39	2%	28	2%	4	1%

Académie d'inscription	présents		admissibles		admis	
AIX-MARSEILLE	91	6%	67	5%	33	5%
AMIENS	30	2%	24	2%	13	2%
BESANCON	29	2%	24	2%	15	2%
BORDEAUX	84	5%	73	6%	42	6%
CAEN	37	2%	29	2%	19	3%
CLERMONT-FERRAND	27	2%	22	2%	17	3%
CORSE	3	0%	2	0%	0	0%
DIJON	31	2%	26	2%	14	2%
GRENOBLE	53	3%	43	3%	27	4%
GUADELOUPE	36	2%	16	1%	5	1%
GUYANE	2	0%	0	0%	0	0%
LA REUNION	30	2%	20	2%	6	1%
LILLE	95	6%	77	6%	44	7%
LIMOGES	18	1%	15	1%	7	1%
LYON	67	4%	59	5%	41	6%
MARTINIQUE	21	1%	15	1%	7	1%
MAYOTTE	3	0%	2	0%	0	0%
MONTPELLIER	54	3%	36	3%	23	3%
NANCY-METZ	41	3%	33	3%	21	3%
NANTES	78	5%	64	5%	40	6%
NICE	54	3%	46	4%	22	3%
NOUVELLE CALEDONIE	10	1%	7	1%	1	0%
ORLEANS-TOURS	42	3%	35	3%	17	3%
PARIS -CRETEIL-VERSAILLES	299	19%	244	20%	104	16%
POITIERS	46	3%	40	3%	23	3%
POLYNESIE FRANCAISE	6	0%	4	0%	1	0%
REIMS	37	2%	29	2%	14	2%
RENNES	87	6%	70	6%	36	5%
ROUEN	42	3%	31	2%	16	2%
STRASBOURG	44	3%	37	3%	24	4%
TOULOUSE	64	4%	55	4%	33	5%

Catégorie	présents		admissibles		admis	
étudiant en IUFM	464	30%	395	32%	246	37%
étudiant hors IUFM	470	30%	414	33%	248	37%
maitre-auxiliaire	63	4%	35	3%	11	2%
contractuel 2d degré	147	9%	97	8%	34	5%
vacataire du 2d degré	36	2%	24	2%	11	2%
assistant d'éducation	76	5%	54	4%	21	3%
autres (éducation nationale ou supérieur)	63	4%	43	3%	20	3%
cadres du secteur privé	47	3%	38	3%	21	3%
sans emploi	130	8%	98	8%	39	6%
autres	65	4%	47	4%	14	2%

3. ANALYSES ET COMMENTAIRES

Les nouvelles épreuves définies par l’arrêté du 28 décembre 2009 renforcent la prise en compte de la dimension professionnelle dans le recrutement des enseignants.

La possibilité de proposer plusieurs problèmes dans chaque épreuve écrite permet de diversifier les objectifs des sujets.
La nouvelle conception des épreuves orales rapproche le candidat de la situation d’enseignement, en plaçant l’élève au cœur des préoccupations, en donnant la possibilité d’accéder à différentes ressources et en élargissant la réflexion au fonctionnement du système éducatif.

3.1 Épreuves écrites

Le sujet de la première épreuve était composé de trois problèmes : un de géométrie élémentaire et deux d’analyse.

La résolution du premier problème reposait exclusivement sur des connaissances du collège et du lycée. Cette partie de l’épreuve a mis en difficulté un nombre non négligeable de candidats, dont certains ne dominent pas le vocabulaire de base de la géométrie plane. Une très grande majorité se contente par ailleurs de fournir une recette de construction sans s’assurer qu’elle répond au problème posé.

Le deuxième problème, très proche du cours, était consacré à la démonstration et à une application du théorème des valeurs intermédiaires ainsi qu’à la démonstration du théorème de Darboux sur les fonctions dérivées. On a décelé dans cette partie de l’épreuve des lacunes importantes dans la mise en œuvre des concepts de base de l’analyse :

- confusion entre hypothèse et conclusion ;
- maîtrise insuffisante des définitions de la limite d’une suite et de la continuité ;
- difficulté à écrire la négation d’une proposition et à organiser un raisonnement cohérent avec des quantificateurs ;
- conservation des inégalités strictes par passage à la limite.

Le troisième problème était consacré à l’étude de quelques propriétés des polynômes de Laguerre. Seule la partie I a été abordée de façon significative.
De nombreux candidats se montrent à l’aise dans les parties calculatoires. On déplore en revanche un manque de précision dans les notations utilisées.

Un effort important est à faire dans la rigueur des raisonnements, notamment dans l’utilisation des quantificateurs, des implications et des équivalences.

Le problème de la sa seconde épreuve démontrait un résultat de John-Lœwner : tout convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ est inclus dans un unique ellipsoïde de volume minimal. La première partie, indépendante des suivantes, portait sur la recherche de l’ellipse d’aire minimale circonscrite à un triangle équilatéral dans le plan.

La partie I utilisait certains résultats de l’enseignement secondaire. On pouvait s’attendre à ce qu’elle soit bien traitée par de futurs enseignants de collège et lycée. Elle a été abordée significativement par les deux tiers des candidats. La plupart d’entre eux traitent convenablement la question 2. Par contre, il est regrettable que les question 3 et surtout 4.a) i n’aient pas été plus souvent traitées correctement, car elles n’utilisaient que des connaissances élémentaires. De plus, certains candidats produisent une bonne copie sans aborder cette première partie pourtant plus proche de ce qu’ils auront à enseigner.
Dans cette même partie, la perception géométrique a été mal utilisée. Certains candidats font de longs calculs pour déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral IJK. Par contre, une figure faite dans un cas particulier a abusé des candidats pour exprimer par découpage l’aire de ABC dans la question I.4.a). Cette dernière n’a d’ailleurs presque jamais été traitée de façon totalement correcte.

Dans la partie II, on retrouvait des questions classiques sur les matrices symétriques positives (respectivement définies positives), partie abordée par quasiment tous les candidats.

La partie III est le cœur du sujet. Très peu de copies l'ont traitée de manière significative. Quelques questions éparses et plus simples ont été abordées sans que l'on retrouve de réflexion approfondie.

Des lacunes ont été relevées dans les situations de raisonnement (réciproques, analyses-synthèses, disjonction de cas) et les demandes d'exemples et contre-exemples, qui sont au centre de l'enseignement des mathématiques.
À un niveau plus élevé mais tout autant regrettable pour des étudiants de master, on note un manque de rigueur dans l'utilisation des théorèmes ; l'étude du maximum de la fonction de deux variables dans la partie I en est un exemple frappant. La condition nécessaire d'extremum sur un ouvert devient souvent une condition suffisante de maximum (sur un compact).
En ce qui concerne le calcul matriciel, la traduction de la non nullité (et le lien avec l'inversibilité) est en général assez floue.
Dans cette épreuve également, la manipulation des inégalités laisse à désirer.

De façon générale, il est regrettable de trouver fréquemment des copies mal rédigées, entachées d'incorrections syntaxiques et orthographiques.
On attend d'un futur professeur qu'il maîtrise parfaitement les connaissances au programme de l'enseignement secondaire et qu'il soit capable d'exposer de façon claire des raisonnements rigoureux.

3.2 Épreuve de leçon

L'épreuve de leçon consiste en un travail de synthèse des connaissances sur un sujet relevant de l'enseignement secondaire ou des sections de technicien supérieur.
Les trois temps de l'épreuve présentent des spécificités :

- le plan, clairement structuré, se situe à un niveau différent de celui de l'exposé des épreuves antérieures ; il n'est pas détaillé à l'extrême mais contient cependant les énoncés des définitions et propriétés utiles, ainsi que des illustrations du sujet par des exemples et exercices bien choisis ; il offre des pistes possibles pour le choix d'un développement par le jury ;
- en prenant appui sur un point particulier, le développement atteste de la maîtrise du sujet traité à travers la démonstration d'un théorème, la résolution d'un exercice, la mise en œuvre d'un logiciel, etc. ; il témoigne de la bonne compréhension de certains éléments exposés dans le plan ;
- dans un registre interactif, l'entretien donne l'occasion de préciser certains éléments du plan, de revenir si besoin sur le développement et de valoriser ses connaissances en faisant preuve de réactivité et d'un certain recul par rapport au thème abordé.

L'élaboration d'un plan ne s'improvise pas le jour de l'interrogation sur la base des ressources disponibles pendant la préparation. Celles-ci ne peuvent se substituer aux connaissances personnelles.
Un plan de qualité se caractérise par sa cohérence d'ensemble, la richesse des contenus (notamment la présence d'exemples ou contre-exemples et d'applications) et une bonne articulation entre eux, ainsi que par sa présentation hiérarchisée, en distinguant notamment ce que l'on va dire et ce que l'on devra écrire.
Il est essentiel de faire pendant l'année, à partir de la liste des sujets, un effort de préparation et de mémorisation afin de ne pas s'en remettre à des manuels consultés au dernier moment. La recopie de quelques passages prélevés ici ou là ne peut faire illusion et ne résiste pas aux questions posées lors de l'entretien. Une réflexion préalable garantissant la maîtrise des contenus et leur bonne organisation est indispensable. Cette recommandation vaut *a fortiori* pour les sujets « transversaux », nécessitant une synthèse sur différents niveaux ou chapitres.
De même, il est indispensable d'anticiper sur des développements possibles pour les préparer avec soin.

Pour gérer convenablement le temps imparti (quinze minutes pour le plan), il convient de s'en tenir aux recommandations données plus haut, en sachant que certains détails relèvent du développement ou éventuellement de l'entretien. À l'inverse, il est tout à fait illusoire d'espérer tromper le jury en « jouant la montre » ou en se limitant à un plan très succinct pour éviter des questions dérangeantes.
De nombreux candidats ont avantageusement tiré profit du matériel informatique pour assurer une présentation dynamique et efficace, tout en évitant de s'égarer dans la mise en forme du document. Sur l'ensemble des deux épreuves orales, 38% ont proposé un diaporama ou utilisé un traitement de texte.

Pour autant, l'utilisation des ordinateurs ne se limite pas à l'usage d'outils de présentation. Lorsque le sujet s'y prête, le jury apprécie que le candidat ait préparé une illustration convaincante au moyen d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'un tableur et qu'il ait réfléchi aux apports de ces outils. Concernant la géométrie, il s'agit d'apporter une vision dynamique des problèmes en faisant varier la position des points considérés et non de se contenter d'une figure statique. Les logiciels de géométrie ont été utilisés dans 34% des interrogations et le tableur 26%, les logiciels de calcul formel dans seulement 2,5% des cas.
L'introduction de l'informatique au concours ne doit pas faire perdre de vue l'exigence de rigueur mathématique. Certaines expressions incorrectes ou erreurs de logique sont inadmissibles à ce niveau (par exemple, raisonner par récurrence ne consiste pas à prouver l'existence d'un entier n tel que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$).

L'aisance dans la communication est un élément primordial pour l'ensemble des épreuves orales.
En premier lieu, la capacité à écouter et à comprendre les questions posées par le jury est essentielle. De plus, il convient d'utiliser clairement le tableau, de s'exprimer avec conviction et de manière intelligible dans une langue correcte, en adoptant une posture ouverte laissant présager des relations constructives avec une classe.
Signalons enfin que les candidats qui, au moment de l'interrogation, se sont montrés trop dépendants de leurs notes ou d'un manuel ont été pénalisés par le jury. Outre qu'une telle attitude est peu propice au dialogue, elle trahit un manque d'assurance préjudiciable dans la perspective d'assurer la responsabilité d'un service d'enseignement.

3.3 Épreuve sur dossier

3.3.1 Exercice

La partie *Exercice* de l'épreuve sur dossier s'inscrit pleinement dans une approche professionnelle, étant entendu que l'acte d'enseignement est à destination d'élèves :

- l'explicitation des connaissances et compétences mises en jeu dans l'exercice proposé nécessite de prendre du recul par rapport à la simple résolution de celui-ci, qui est par ailleurs systématiquement demandée, parfois selon plusieurs méthodes ;
- l'analyse de productions d'élèves, d'extraits des programmes officiels ou des spécificités d'un énoncé amène à porter un regard pédagogique conforme aux exigences du métier d'enseignant ;
- le choix d'exercices sur un thème donné contraint à s'interroger sur les critères retenus en fonction des objectifs visés.

On a constaté une certaine difficulté à s'inscrire dans la durée prévue pour répondre aux questions posées (vingt minutes).
Outre un entraînement en temps limité, l'utilisation à bon escient du vidéoprojecteur peut favoriser une présentation dynamique et efficace. De plus, il importe de ne pas s'empêtrer dans les questions portant sur les compétences développées chez les élèves. Celles-ci sont trop souvent considérées comme une sorte de rituel donnant lieu à des réponses vagues et inutilement longues, laissant penser que le candidat cherche à gagner du temps en alignant des généralités convenues.
La lecture des objectifs généraux des programmes officiels ou des documents relatifs au socle commun permet de mieux cerner ce qu'il convient d'entendre par « compétence ».

L'étude de productions d'élèves est un aspect essentiel des nouvelles épreuves. Faisant appel à une certaine clairvoyance et à des qualités de bon sens, elle a été réussie par les candidats ayant su non seulement déceler les erreurs et émettre des hypothèses sur leurs causes, mais ayant également repéré les aspects positifs de la démarche. Dans son futur métier, le candidat sera en effet amené à repérer et corriger les erreurs mais aussi à valoriser les connaissances et compétences mises en œuvre par les élèves.

Soulignons ici que la notion de conjecture, désormais très présente dans l'enseignement secondaire, mérite une meilleure diffusion, tout comme l'intérêt d'utiliser dans cet perspective certains logiciels.

La correction de l'exercice du jury a pu mettre en difficulté quelques candidats. Certains n'ont pas su s'écarter des pistes données dans le dossier par la solution d'un élève.
La demande de correction d'une question « comme vous l'exposeriez devant une classe » a trop rarement été comprise comme devant donner lieu à un effort particulier de clarté, d'explication et d'anticipation sur des erreurs éventuelles, tel qu'on l'attendrait en présence d'élèves. Pour satisfaire les attentes du jury sur ce point, le candidat a tout intérêt à jouer le jeu en manifestant ses qualités d'exposition, plutôt que de recopier ses notes en murmurant face au tableau comme le font certains.

La proposition des exercices par le candidat obéit à plusieurs règles :

- en nombre suffisant et de nature variée (distincts de celui du jury !), ils doivent présenter un intérêt mathématique allant au-delà d'applications triviales et s'inscrire dans le thème indiqué (ainsi, présenter des exercices dont la résolution fait appel au calcul intégral ne consiste pas à proposer des calculs d'intégrales) ;
- leur présentation au jury ne revient pas à copier des énoncés au tableau. On attend du candidat qu'il en précise l'objet de façon vivante, motive ses choix en explicitant les objectifs visés, les compétences développées et envisage d'éventuels aménagements des énoncés ;
- enfin, il va sans dire que le candidat doit impérativement se montrer capable de résoudre sans difficulté les exercices qu'il a choisis, faute de quoi son choix se trouve largement discrédité.

Pour réussir cette étape importante, il est nécessaire d'assurer un travail de préparation en amont des épreuves orales. Il ne serait pas sérieux de prétendre faire un choix éclairé réunissant les qualités précédemment citées en se contentant d'adopter au hasard des exercices découverts dans des manuels quelques minutes avant l'interrogation.

3.3.2 Agir en fonctionnaire de l'État

Chaque sujet de la partie *Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable* repose sur une étude de cas, présentée brièvement et complétée par un ou plusieurs documents (extraits de textes officiels, analyses statistiques, articles divers, etc.). Les thèmes abordés lors de cette session concernaient des problèmes d'éducation (absentéisme, maltraitance, conduites addictives), d'enseignement (échec scolaire, maîtrise de la langue, évaluation, TICE) ou d'orientation.

Cette partie de l'épreuve sur dossier permet d'apprécier si le candidat a conscience des obligations du fonctionnaire et s'est approprié les principales valeurs du service public. Elle lui donne l'occasion d'exprimer sa conception du travail en équipe ou des relations hiérarchiques et de faire part de sa vision d'ensemble des missions du professeur.
Si l'on ne peut exiger qu'ils maîtrisent dans les détails le fonctionnement de l'institution scolaire, il est attendu de futurs enseignants une certaine connaissance de l'organisation des établissements, ainsi qu'une forme de culture autour des grands enjeux et débats sur le système éducatif.

Le jury a apprécié que de nombreux candidats aient visiblement consacré du temps pour se préparer à cette partie de l'épreuve. Certains d'entre eux ont su valoriser l'expérience acquise durant leurs stages en établissements et ont fait valoir leurs potentialités en témoignant de leur capacité à s'engager.
La plupart conçoivent assez spontanément que la mission d'un enseignant comprend un rôle d'éducateur.
D'autres au contraire, restent exclusivement centrés sur la discipline, ne s'intéressent pas aux élèves, n'ont aucune conscience de l'évolution des missions au-delà de l'acte d'enseignement, ni aucune idée de l'organisation du système éducatif ou des réformes en cours, ce qui est bien entendu sanctionné par le jury.
Les examinateurs ont aussi dénoncé le travers consistant à évacuer les problèmes vers les autres acteurs (chef d'établissement, CPE, infirmière, etc.).

Comme pour les autres épreuves, un exposé structuré est souhaité. Celui-ci atteste d'un certain niveau d'information. Paraphraser les documents fournis ou bien réciter un catalogue de sigles ou d'instances sans rapport avec le sujet ne présente aucun intérêt.
L'argumentation doit se fonder sur des références objectives et non sur ses propres émotions.
Au-delà de la compétence *Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable* les candidats sont vivement encouragés à s'approprier les dix compétences professionnelles des maîtres publiées au bulletin officiel n°29 du 22 juillet 2010.

Notons que cette partie de l'épreuve sur dossier a eu un réel impact sur les résultats.
84% des candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 5 sur 6 ont été reçus.

Grâce à l'expérience de cette première session, les centres de préparation vont pouvoir se concentrer sur des objectifs clairement identifiés, directement en rapport avec les attentes du concours.

4. ÉNONCÉS

4.1 Énoncés des épreuves écrites

4.1.2 Première composition

ministère Éducation nationale

EBE MAT 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2011

CAPES
CONCOURS EXTERNE
TROISIEME CONCOURS
ET CAFEP CORRESPONDANTS

Section : MATHÉMATIQUES
Section : LANGUES RÉGIONALES : BRETON

ÉCRIT 1

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Problème 1 : construction de triangles

Dans un plan affine euclidien orienté, on considère deux points distincts B et C et un point M n'appartenant pas à la droite (BC).

Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point A qui la vérifie.

On précisera pour chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.

1. M est le centre de gravité du triangle ABC.
2. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. M est l'orthocentre du triangle ABC.
4. M est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Problème 2 : autour du théorème des valeurs intermédiaires

> *Darboux*[1] *systématisera dans son mémoire de 1875 la démarche amorcée dans sa correspondance où il expose au coup par coup [...] les propriétés implicites de la pratique commune de la notion de fonction continue.*
> *Il cherche à dégrossir le concept de fonction continue et à le dépouiller de tout ce qui n'est pas strictement induit par sa définition, et que l'« usage », l'activité mathématique passée lui avait donc conféré. Cauchy*[2] *avait cassé le cadre fonction continue/fonction analytique. Darboux cherche à casser les assimilations suivantes : fonction continue/fonction monotone, fonction continue entre a et b/ fonction qui passe par toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$, fonction continue/fonction dérivable.*
> *En réduisant à sa juste mesure la classe des fonctions continues, Darboux donne une réalité, une épaisseur aux classes des fonctions qui ne le sont pas. Il libère le concept de fonction du carcan de la continuité.*[3]

On se propose dans ce qui suit de mettre en lumière quelques points évoqués par le texte précédent.

Partie I : préliminaires

On pourra utiliser les résultats suivants :

- ◇ toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ;
- ◇ soient a et b des réels tels que $a < b$; toute application continue $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes ;
- ◇ toute suite croissante et majorée est convergente, toute suite décroissante et minorée est convergente ;
- ◇ si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et si pour tout entier n on a $u_n \leqslant v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

1. Gaston Darboux (1842-1917)
2. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
3. Principes de l'analyse chez Darboux et Houël : textes et contextes (Hélène Gispert in Revue d'histoire des sciences, 1990, Tome 43, n° 2-3. pp 181-220)

Les résultats suivants sont à démontrer ; ils ne doivent pas être considérés ici comme des propriétés connues.

1. Démontrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite ℓ alors, pour tout entier n, on a $w_n \geqslant \ell$ (*on raisonnera par l'absurde*).

2. **Théorème des suites adjacentes**

   On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes, c'est à dire telles que :

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite croissante} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante} \\ \text{la suite } (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \end{cases}$$

   2.1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   2.2. En déduire que, pour tout entier n, on a : $v_n - u_n \geqslant 0$.

   2.3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

   2.4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3. **Suite et application continue**

   Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers un réel ℓ. Soit f une application, définie sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie et continue en ℓ.
   Montrer que la suite $\big((f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Partie II : propriété des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I d'intérieur non vide. On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout $(a,b)\in I^2$ tel que $a<b$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$.

Cette propriété sera notée $\mathcal{P}$ dans la suite.

1. **Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires**

   On se propose dans ce qui suit de démontrer le théorème suivant (théorème des valeurs intermédiaires) :

   si f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$ alors f possède la propriété $\mathcal{P}$.

   Soit $(a,b)\in I^2$ tel que $a<b$. La conclusion étant immédiate si $f(a)=f(b)$, on peut toujours supposer (quitte à remplacer f par $-f$) que $f(a)<f(b)$; dans la suite on supposera cette hypothèse vérifiée.

   On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0=a$, $b_0=b$ et pour tout entier n :

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda \quad \text{alors} \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda \quad \text{alors} \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

   1.1. Justifier que, pour tout entier n, $a_n\in[a,b]$ et $b_n\in[a,b]$

   1.2. Montrer que, pour tout entier n :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

   1.3. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   1.4. Conclure.

2. **Application 1 : un théorème du point fixe**

   Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

3. **Application 2 : première formule de la moyenne**

   Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que si g est positive sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

4. **Application 3**

   Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

   4.1. Montrer que, pour tout entier n non nul, il existe $c_n \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que :

$$f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right)$$

   indication : on pourra considérer la fonction f_n définie sur $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ par

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

   et écrire $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

   4.2. Montrer que si on remplace $\dfrac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$ le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]$$

Partie III : réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

> *Bien avant Darboux, [...] Bolzano[4] avait critiqué comme incorrect l'acceptation du concept de continuité d'une fonction dans le sens où la propriété des valeurs intermédiaires est vérifiée par la fonction. Mais Lebesgue[5] note dans ses leçons sur l'intégration qu'« on avait pris en France l'habitude de définir une fonction continue celle qui ne peut passer d'une valeur à l'autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires, et l'on considérait cette définition comme équivalente à celle de Cauchy. Darboux, qui construisait dans son « Mémoire » des fonctions dérivées non continues au sens de Cauchy, a pu montrer que les deux définitions de la continuité étaient forts différentes ».*[6]

1. **Un exemple**

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \qquad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

   Montrer que la fonction f vérifie la proposition $\mathcal{P}$ mais n'est pas continue en 0.

4. Bernard Bolzano (1781-1848)
5. Henri Lebesgue (1875-1941)
6. Gispert, op. cit., p2

2. **Une classe de fonctions qui vérifient $\mathcal{P}$: un théorème de Darboux**

   Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $(a,b) \in I^2$ $(a < b)$. On se propose de montrer que f' vérifie $\mathcal{P}$.

   On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

   2.1. Justifier qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)$.

   2.2. Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$.

   2.3. Conclure.

   2.4. En déduire un exemple d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne possède pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

3. **Une condition pour qu'une fonction qui vérifie $\mathcal{P}$ soit continue.**

   Soit f une fonction définie sur un intervalle I d'intérieur non vide et telle que :
   - f vérifie $\mathcal{P}$
   - pour tout $x \in I$, $f^{-1}(\{f(x)\})$ est fermé dans I.

   Montrer que f est continue sur I.

Problème 3 : quelques propriétés des polynômes de Laguerre[7]

On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$$

Partie I : étude de la famille (L_n)

1. Justifier les écritures précédentes, c'est-à-dire que L_n est bien définie pour tout entier n.
2. Calculer L_0, L_1 et L_2 explicitement.
3. En précisant le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé, écrire une procédure permettant d'afficher L_n pour une valeur de n donnée.
4. Montrer que pour tout entier n, L_n est une fonction polynomiale et déterminer son degré.

   Dans toute la suite, on identifiera la fonction polynomiale L_n et le polynôme associé.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   5.1. Calculer $h_n^{(n)}$ et $h_n^{(n+1)}$ en fonction de L_n et L_n'.

   5.2. Donner une relation simple entre h_{n+1} et h_n.

   5.3. En déduire que : $L_{n+1} = \dfrac{X}{n+1} L_n' + \left(1 - \dfrac{X}{n+1}\right) L_n$.

6. En remarquant que $\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)} = \left(\left(h_{n+1}\right)^{(n+1)}\right)'$, montrer la relation :

   $$L_{n+1}' = L_n' - L_n\,.$$

7. En utilisant les différents résultats obtenus, montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ XL_n'' + (1-X)L_n' + nL_n = 0$$

   et que :

   $$\forall n \geq 1\ ,\ (n+1)L_{n+1} + (X - 2n - 1)L_n + nL_{n-1} = 0\,.$$

7. Edmond Laguerre (1834-1886)

Partie II : application à un calcul de somme de coefficients binomiaux

1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du polynôme L_n.
2. 2.1. Soient n un entier naturel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^{n+2} \sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

   Démontrer que f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 mais que f' n'admet pas de développement limité à l'ordre 0 en 0.

   2.2. Soient f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 et k un entier naturel tel que $k \leqslant n$. Donner une condition suffisante pour que $f^{(n-k)}$ admette un développement limité à l'ordre k en 0

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq n$.

   3.1. Déterminer le développement limité à l'ordre $n+N$ en 0 de h_n.

   3.2. En déduire le développement limité à l'ordre N en 0 de $h_n^{(n)}$.

   3.3. Montrer alors que l'on a au voisinage de 0 :

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{N} c_p x^p + o(x^N) \text{ où } \forall p \in [\![0, N]\!] \text{ , } c_p = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k}.$$

   3.4. En déduire que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = \begin{cases} (-1)^p \dbinom{n}{p} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}.$$

Partie III : étude des polynômes de Laguerre comme base orthonormée

Pour tous P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\, dx$$

1. Montrer que φ est bien définie.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.
4. 4.1. Montrer que : $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $\exists\, Q_k \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x)$.

   4.2. Établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ , } \forall P \in \mathbb{R}[X] \text{ , } \forall p \in [\![0, n]\!] \text{ , } \varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x)\, dx\, .$$

5. En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

4.1.3 Deuxième composition

ministère Éducation nationale

EBE MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2011

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

ÉCRIT 2

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

n désigne un entier naturel non nul.

Ce problème a pour objet de démontrer que tout compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide est inclus dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

La partie I est indépendante du reste du problème.

Notations et définitions

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à n lignes et à p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$, et on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $GL_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, $0_{n,p}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note M_k la matrice $(m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq k}} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tM = M$.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$. On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, ${}^tXMX > 0$. On notera $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^n$) est un **ellipsoïde**, s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{E} = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tXAX \leq 1\}$$

  Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ellipsoïde $\{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tXAX \leq 1\}$ sera noté $\mathcal{E}_A$.

Partie I : cas d'un triangle équilatéral

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$.
Cette partie a pour objet de démontrer l'existence et l'unicité d'une ellipse d'aire minimale circonscrite à un triangle équilatéral.
Le terme ellipse désigne une courbe bornée admettant dans un repère une équation du type
$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$ avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

1. Étant donné un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points :
$$I(1, 0)\,,\ J\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
   (a) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O et d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que $d = e = 0$.

   (b) Montrer que le cercle circonscrit à IJK est l'unique ellipse de centre O contenant les points I, J et K.
2. Soit ABC un triangle équilatéral et R le rayon de son cercle circonscrit. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de R.
3. Résoudre le système d'équations $\left\{\begin{array}{l}\cos(y-x) = \cos x\\ \cos(y-x) = \cos y\end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telle que $0 < x < y < 2\pi$.
4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $R > 0$. On note O son centre.

   (a) Étant donné un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(R, 0)$, $B(R\cos\beta, R\sin\beta)$ et $C(R\cos\gamma, R\sin\gamma)$, avec $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$.

      i. Montrer que l'aire du triangle ABC est $\dfrac{R^2}{2}(\sin(\gamma-\beta) - \sin\gamma + \sin\beta)$. Dans la suite, cette aire sera notée $f(\beta, \gamma)$.

ii. Montrer que f admet un maximum atteint en un point (β_0, γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

iii. Déterminer β_0 et γ_0. Quelle est alors la nature du triangle obtenu ?

(b) Déterminer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$.

5. Démontrer que si $\mathcal{C}$ est un cercle d'aire $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle $\mathcal{T}$ d'aire $\mathcal{A}_\mathcal{T}$, alors $\dfrac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geq \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

6. Montrer que parmi les ellipses circonscrites au triangle IJK défini dans la question 1, il en existe une et une seule délimitant une surface d'aire minimale. *On rappelle que toute ellipse peut-être transformée en un cercle par une affinité orthogonale et qu'une affinité orthogonale conserve les rapports d'aires.*

Partie II : étude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, alors $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de A sont strictement positives.

   (b) Enoncer le théorème permettant d'affirmer qu'il existe des matrices D diagonale et P orthogonale telles que $A = {}^tPDP$.

   (c) Montrer que, si les valeurs propres de A sont strictement positives, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie ?

5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\det(A_k) > 0$.

6. Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que
$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ O_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$$

7. Etant donné un entier naturel m non nul, $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ désignent $m+1$ nombres réels. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ définie par :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}$$

   (a) Démontrer par récurrence sur m que $\det(M) = \alpha - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$.

   (b) Pour $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, expliciter ${}^tXMX$ en fonction des composantes de X et en déduire que si $\det(M) > 0$ alors $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

8. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ $\det(A_k) > 0$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser les questions 6. et 7.

9. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme.

Partie III : inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III.1 Réduction simultanée

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application Φ_A qui à $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ associe $\Phi_A(X, Y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si les colonnes d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour Φ_A, alors ${}^tPAP = I_n$.
3. Montrer que l'application f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe $f(X) = A^{-1}BX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, symétrique pour Φ_A.
   Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?
4. En déduire qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telles que $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQDQ$.
   Que représentent les coefficients diagonaux de D ?
5. On suppose que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont inférieures ou égales à 1.
   (b) En déduire que si $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ alors $A = B$.

III.2 Convexité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si u_1 et u_2 sont deux éléments de E, le segment $[u_1; u_2]$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $tu_1 + (1-t)u_2$ lorsque t décrit $[0; 1]$.
On rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est convexe lorsque, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$,$[u_1; u_2] \subset \mathcal{C}$.
Étant donnée une partie $\mathcal{C}$ de E convexe, une application $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe lorsque pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$ tel que $u_1 \neq u_2$ et pour tout $t \in]0; 1[$, $\varphi(tu_1 + (1-t)u_2) < t\varphi(u_1) + (1-t)\varphi(u_2)$.

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe.
2. On suppose de plus E normé. On considère une partie $\mathcal{C}$ non vide, convexe et compacte de E et $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une application strictement convexe et continue sur $\mathcal{C}$.
   (a) Montrer que φ admet un minimum, atteint en un unique point.
   (b) Montrer que φ admet un maximum. Sans justification, donner un exemple pour lequel ce maximum est atteint en une infinité de points.

III.3 Volume d'un ellipsoïde

On admet qu'il existe une constante k_n ne dépendant que de n telle que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le volume de $\mathcal{E}_A$ est $\dfrac{k_n}{\sqrt{\det(A)}}$.
On s'intéresse à la fonction ν définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par $\nu(A) = \dfrac{1}{\sqrt{\det(A)}}$.

1. Déterminer k_2 et k_3.
2. Montrer (sans considération de volume) que, si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$, alors $\nu(A) \leq \nu(B)$.
3. Montrer que ν est continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. (a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $t \in]0; 1[$, $\ln(t + (1-t)\lambda) \geq (1-t)\ln(\lambda)$. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\lambda = 1$.
   On pourra, pour t fixé dans $]0\,; 1[$, étudier la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
   $$\psi(\lambda) = \ln(t + (1-t)\lambda) - (1-t)\ln \lambda.$$
   (b) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [0; 1]$, $e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b$.
   (c) i. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   ii. Soient A et B appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. En reprenant les notations de III.1.4, exprimer $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(tA + (1-t)B)$ en fonction de $\det(Q)$ et des coefficients diagonaux de D.
   iii. Montrer que ν est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
5. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
   On considère l'ensemble $M(\mathcal{E}_A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \exists X \in \mathcal{E}_A,\ Y = MX\}$ qu'on pourra aussi écrire sous la forme $\{MX;\ X \in \mathcal{E}_A\}$. Montrer que $M(\mathcal{E}_A)$ est un ellipsoïde ; déterminer la matrice symétrique définie positive B telle que $M(\mathcal{E}_A) = \mathcal{E}_B$. Donner une relation entre le volume de $\mathcal{E}_A$ et celui de $M(\mathcal{E}_A)$.

III.4 Inclusion dans un ellipsoïde

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne usuelle et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée :
si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||X|| = \sqrt{{}^tXX}$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \sup\limits_{X\neq 0} \dfrac{||AX||}{||X||}$.

On considère un compact K de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'intérieur non vide. Il existe alors $X_0 \in K$ et ε un réel strictement positif tels que la boule fermée $B(X_0, \varepsilon)$ soit incluse dans K.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $K \subset \mathcal{E}_A$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}_A$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On pourra utiliser que $X \mapsto ({}^tXAX)^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que si $X \in \mathcal{E}_A$, alors $-X \in \mathcal{E}_A$.
   (c) Montrer que pour tout $X \in B(0,\varepsilon)$, $X_0 + X$ et $-X_0 + X$ appartiennent à $\mathcal{E}_A$ et en déduire que $B(0,\varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$.
   (d) Montrer que, si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.
   On pourra considérer un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ.
   (e) Montrer que $|||A||| \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.
2. Montrer qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ tel que $K \subset \mathcal{E}$.

   Dans la suite, on fixe $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $K \subset \mathcal{E}_{A_0}$ et on considère l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) \geq det(A_0) \ \text{ et } \forall X \in K,\ 0 \leq {}^tXAX \leq 1\}$$

3. (a) Montrer que $\mathcal{M}$ est inclus dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{M}$ est borné.
   (c) Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie convexe.
   On pourra utiliser la convexité de ν sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ démontrée en III.3.4.
4. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde $\mathcal{E}$ de volume minimal contenant K.
5. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / x \in [-1;1] \text{ et } y = 0\}$.
   (a) Quel est l'intérieur de K ?
   (b) Existe-t-il une ellipse d'aire minimale contenant K ?

4.2 Sujets de l'épreuve de leçon

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des sections de technicien supérieur. La capacité du candidat à illustrer le sujet par des exemples est valorisée.

1. Résolution de problèmes à l'aide de graphes.
2. Techniques de dénombrement.
3. Coefficients binomiaux.
4. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
5. Variable aléatoire discrète.
6. Loi binomiale, loi de Poisson, loi normale.
7. Variable aléatoire réelle à densité.
8. Statistique descriptive à une variable.
9. Séries statistiques à deux variables numériques.
10. Estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance, d'un paramètre, tests d'hypothèse.
11. Multiples, diviseurs, division euclidienne.
12. PGCD, PPCM de deux entiers naturels.
13. Égalité de Bézout.
14. Nombres premiers, décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
15. Congruences dans Z.
16. Équations du second degré à coefficients réels ou complexes.
17. Module et argument d'un nombre complexe.
18. Transformations planes et nombres complexes.
19. Exemples d'utilisation des nombres complexes.
20. Algèbre linéaire en section de technicien supérieur.
21. Proportionnalité et linéarité.
22. Pourcentages.
23. Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations.
24. Droites du plan.
25. Droites et plans de l'espace.
26. Droites remarquables du triangle.
27. Le cercle.
28. Solides de l'espace.
29. Barycentre.
30. Produit scalaire.
31. Théorème de Thalès.
32. Trigonométrie.
33. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle.
34. Produit vectoriel, produit mixte.
35. Homothéties et translations.
36. Isométries planes.
37. Similitudes planes.
38. Problèmes de constructions géométriques.
39. Problèmes de lieux géométriques.
40. L'orthogonalité.
41. Suites monotones.
42. Convergence de suites réelles.
43. Suites arithmétiques, suites géométriques.
44. Suites de terme général a^n, n^p et $\ln n$ ($a \in \mathrm{R}^{+*}$; $p \in \mathrm{N}$; $n \in \mathrm{N}^*$).
45. Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence.
46. Problèmes conduisant à l'étude de suites.
47. Limite d'une fonction réelle de variable réelle.

48. Théorème des valeurs intermédiaires.
49. Dérivabilité.
50. Fonctions polynômes du second degré.
51. Fonctions logarithmes.
52. Fonctions exponentielles.
53. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^a$, $x \mapsto \ln x$.
54. Courbes planes définies par des équations paramétriques.
55. Intégrales, primitives.
56. Techniques de calcul d'intégrales.
57. Équations différentielles.
58. Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles.
59. Problèmes conduisant à l'étude de fonctions.
60. Développements limités.
61. Séries numériques.
62. Séries de Fourier.
63. Transformation de Laplace.
64. Courbes de Bézier.
65. Exemples d'études de courbes.
66. Aires.
67. Exemples d'algorithmes.
68. Exemples d'utilisation d'un tableur.
69. Les différents types de raisonnement en mathématiques.
70. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

4.3 Énoncés de l'épreuve sur dossier

4.3.1 Exercice

Thème : probabilités

L'exercice

1) On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note la somme des deux faces obtenues.
   1.a) Donner un univers associé à cette expérience.
   1.b) A-t-on plus de chances d'obtenir 6 ou d'obtenir 7 ? Justifier.
2) On lance maintenant trois dés et on note la somme des faces obtenues. A-t-on autant de chances d'obtenir 9 que 10 ?

La solution proposée par trois élèves à la question 1.b)

Élève 1

Non, on a pas plus de chances d'obtenir 6 ou d'obtenir 7 car le lancer de dés est du pur hasard.

Élève 2

la probabilité de 6 est $\frac{3}{11}$

la probabilité de 7 est $\frac{3}{11}$

Il y a autant de chance car leur probabilité sont égaux.

Élève 3

On a pas plus de chances d'obtenir 6 et 7 car pour avoir 6 il faut 1 et 5 ; 2 et 4 ; 3 et 3. Pour 7 il faut 1 et 6 ; 2 et 5 ; 3 et 4.

Les issues ont les mêmes probabilités, on parle alors d'une situation d'équiprobabilité.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quelles sont les connaissances et les compétences mises en œuvre dans cet exercice ?
2- Pour chacune des réponses, indiquez le raisonnement que l'élève a pu suivre et l'origine de ses éventuelles erreurs.
3- Proposez une correction de la question 2) telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème des probabilités, dont un au moins met en jeu une simulation.

Thème : suites et fonctions

L'exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2.a) Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2.b) Montrer que, pour tout entier n on a : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2.c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2.d) Conclure.

La solution proposée par un élève à la question 2.b)

$1 \leqslant u_n \leqslant 2$
Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$.
$u_0 = 2$ *or* $2 \leqslant 2$ *et même* $2 = 2$. *La propriété s'initialise.*

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour tout entier $p \geqslant 0$.
On veut montrer qu'elle est encore vraie au rang $p+1$ *donc*

$$1 \leqslant u_p \leqslant 2$$
$$2 \leqslant 2u_p \leqslant 4$$
$$3 \leqslant 2u_p + 1 \leqslant 5 \text{ et } 2 \leqslant u_p + 1 \leqslant 3$$
comme les nombres sont positifs, on peut diviser donc
$$1 \leqslant \frac{3}{2} \leqslant \frac{2u_p+1}{u_p+1} \leqslant \frac{5}{3} \leqslant 2$$

Conclusion : la propriété s'initialise pour $n = 0$ *et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout* $n \geqslant 0$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quelles sont les connaissances et les compétences mises en œuvre dans cet exercice ?
2- Analysez la production d'élève, en particulier la pertinence de la démarche engagée, la clarté de la rédaction, l'origine des erreurs éventuelles.
3- Proposez une correction de la question 2.c) telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
4- Présentez deux ou trois exercices faisant intervenir des suites.

Thème : optimisation

L'exercice

Soit $[AB]$ un segment de longueur 1 et soit M un point de $[AB]$ distinct de A et B. On construit, du même côté du segment $[AB]$, les triangles équilatéraux AMP et MBQ.

1) Existe-t-il une position du point M telle que le triangle MPQ ait une aire maximale ?

2) Expliquez pourquoi cette position du point M rend minimale l'aire du quadrilatère $ABQP$.

La solution proposée par un élève à la question 1) dans un devoir à la maison

Comme je ne trouvais rien malgré le temps qui passait, j'ai cherché « aire d'un triangle » sur Wikipédia et j'ai trouvé trois formules :

- *une qui utilise base fois hauteur mais je ne connais pas la hauteur de PQM alors je l'ai éliminée ;*
- *une autre la formule de Héron mais il faut connaître les trois côtés et je n'en connais que deux donc j'ai utilisé la troisième $S = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$*

Je trouve

$$S = \frac{1}{2}x(1-x)\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

Le maximum est obtenu au sommet de la parabole pour $x = -\frac{b}{2a} = 0,5$ et ce maximum vaut $f(0,5) = \frac{\sqrt{3}}{16}$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quelles sont les connaissances et les compétences mises en jeu dans l'exercice ?

2- Analysez la production de l'élève. En particulier

- que dire de sa démarche ?
- son raisonnement vous semble-t-il valable ?
- comment pourriez-vous amener l'élève à justifier au niveau de la classe de seconde la formule de l'aire du triangle qu'il utilise ?

3- Proposez une correction de la question 2) comme vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « optimisation ».

Thème : optimisation

L'exercice

À partir de l'extrait d'un manuel donné ci-dessous, un professeur a proposé à ses élèves l'exercice suivant :

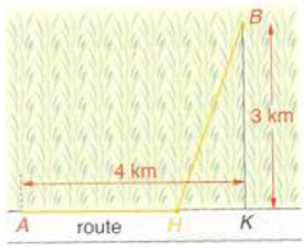
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{40} + \frac{1}{20}\sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

1. *Expliquez pourquoi la fonction f est dérivable et calculer sa dérivée.*
2. *Dressez le tableau de variation de f. Déterminer pour quelle valeur x_0 cette fonction admet un minimum.*
3. *Donnez les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} de x_0 et de $f(x_0)$.*

Un extrait de manuel

Une voiture 4×4 doit aller d'un point A situé sur une route à un point B en traversant un champ.



Sachant que sa vitesse sur la route est de 40 km · h⁻¹, et que sa vitesse à travers champs est de 20 km · h⁻¹, déterminer la position du point H pour que le temps mis pour aller de A à B soit minimal.

Déclic Terminale S - 2006

Le travail à exposer devant le jury

1- Comparez les compétences développées par les deux versions de l'exercice (professeur/manuel).

2- Citez différents logiciels permettant d'émettre une conjecture sur la solution de l'exercice du manuel et développez la mise en œuvre de l'un d'entre eux.

3- Proposez la correction de la question 2) de l'exercice du professeur comme vous la présenteriez à des élèves.

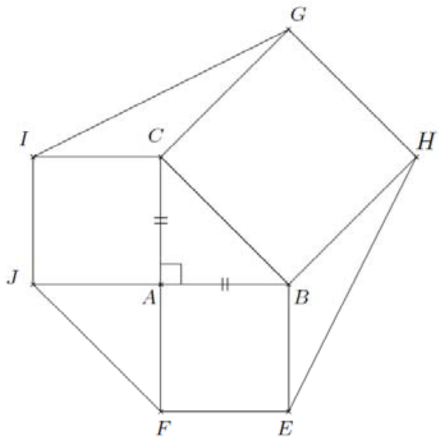
4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « optimisation ».

Thème : calculs de longueurs, d'aires, de volumes

L'exercice

Soit ABC un triangle. On construit extérieurement sur les côtés du triangle trois carrés $ABEF$, $BCGH$ et $AJIC$.

1) Dans cette question le triangle ABC est rectangle et isocèle en A. Montrez que les aires des triangles ABC, AFJ, CIG et BHE ont la même aire.



2) Lorsque le triangle ABC est quelconque, quelle conjecture peut-on faire sur les aires des quatre triangles ABC, AFJ, CIG et BHE ?

3)

3.a) Montrez que l'aire d'un triangle quelconque MNP est :

$$\text{aire}(MNP) = \frac{1}{2} \times MN \times MP \times \sin(\widehat{NMP})$$

3.b) Confirmez ou infirmez la conjecture faite à la question 2.

La réponse d'un élève à la question 1)

Dans le triangle FEH, B est le milieu de $[FH]$ donc forcément (EB) coupe le triangle FEH en deux parties égales donc BHE a la même surface que BEF et elle est égale à ABC.

Conclusion : les deux triangles BEH et ABC ont la même aire et pareil pour les deux autres.

Le travail à exposer devant le jury

1- Précisez les connaissances et les compétences mises en jeu dans l'exercice.

2- Analysez la production de l'élève.

3- Proposez une correction de la question 3) comme vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « calcul longueurs, d'aires, de volumes ».

Thème : arithmétique

L'exercice

1) Après avoir vérifié que le couple d'entiers $(-8, 11)$ est solution de l'équation $37x + 27y = 1$, déterminez l'ensemble des couples (x, y) d'entiers solutions de : $37x + 27y = 1000$.
2) Un restaurateur sert des repas à 27 euros et à 37 euros. À la fin du service sa recette s'élève à 1000 euros. Combien a-t-il servi de repas de chaque sorte ?
3) Aurait-il pu obtenir la même recette avec des menus à 27 euros et à 36 euros ?

La réponse d'un élève à la question 1)

On pose $(x_0, y_0) = (-8000, 11000)$. *Soient* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, *on a :*

$$\begin{cases} 37x + 27y = 1000 \\ 37x_0 + 27y_0 = 1000 \end{cases}$$

donc $37(x - x_0) = -27(y - y_0)$.
Donc 37 divise $-27(y - y_0)$, *comme 37 et 27 sont premiers entre eux le théorème de Gauss permet de dire que 37 divise* $y - y_0$.
Donc $y - y_0 = 37k$ *c'est à dire* $y = 11000 + 37k$.
Donc $x - x_0 = -27k$, *c'est à dire* $x = -8000 - 27k$.
Donc les solutions de l'équation sont $(-8000 - 27k, 11000 + 37k)$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Précisez les connaissances et les compétences mises en jeu dans l'exercice.

2- Analysez la production de l'élève.

3- Proposez une correction des questions 2) et 3) comme vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

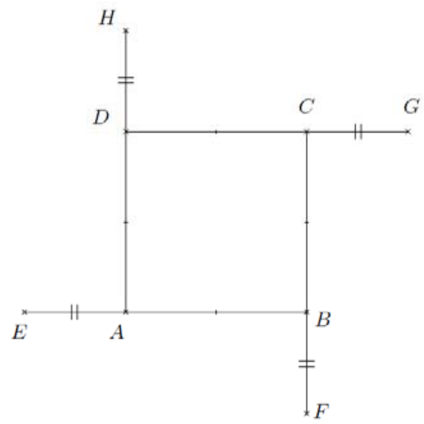
4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « arithmétique » dont un au moins nécessite la mise en œuvre d'un algorithme.

Thème : configurations planes

L'exercice

Soit $ABCD$ un carré. On prolonge ses côtés par quatre segments de même longueur et d'extrémités E, F, G et H, comme indiqué ci-dessous.

Montrer que le quadrilatère $EFGH$ est un carré de même centre que $ABCD$.



Le travail à exposer devant le jury

1- Proposez plusieurs méthodes pour la résolution de l'exercice et indiquez pour chacune à quel niveau elle pourrait être envisagée. Vous vous réfèrerez pour cela aux programmes de collège et de lycée mis à votre disposition sur les ordinateurs du concours.

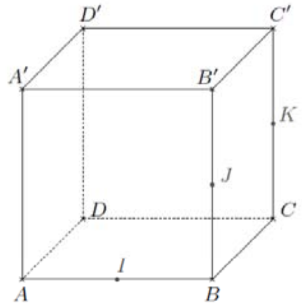
2- Développez l'une de ces méthodes comme vous le feriez devant une classe du niveau considéré.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « configurations planes ».

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BB']$ et $[CC']$.



Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1) Les points I, J et K sont alignés.
2) Les droites (AC) et $(A'K)$ sont sécantes.
3) Les droites (IJ) et $(A'D')$ sont parallèles.
4) Les droites (AJ) et (DK) sont parallèles.

La réponse d'un élève

> *1) Les points I, J et K ne sont pas alignés car ils n'appartiennent pas tous au même plan.*
>
> *2) Les droites (AC) et $(A'K)$ sont sécantes car elles ne sont pas parallèles.*
>
> *3) D' n'est pas sur la face $ABA'B'$ donc les droites (IJ) et $(A'D')$ ne peuvent pas être parallèles.*
>
> *4) Les droites sont parallèles car elles appartiennent à deux plans parallèles.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les réponses de l'élève aux questions 1), 2) et 3).

2- Proposez une correction de la question 4) telle que vous la présenteriez en classe de seconde.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « géométrie dans l'espace » dont l'un au moins vise à remédier aux difficultés de l'élève.

Thème : suites numériques

L'exercice

1) Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$$

2) Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère l'expression :

$$P_n = \frac{n^2+1}{n^2} \times \frac{n^2+2}{n^2} \times \cdots \times \frac{n^2+n}{n^2}$$

   a) En utilisant le résultat obtenu à la question 1), démontrer que pour tout nombre entier n non nul, on a :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} < \ln(P_n) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

   On admettra que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

La solution proposée par un élève à la question 1)

Pour tout $x > 0$, soit $g(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, $h(x) = \ln(x+1)$, $f(x) = x$.
Par conjecture, avec la calculette, on a visiblement :

$$g(x) < h(x) < f(x)$$

Déterminons la position de la courbe g par rapport à celle de h :

$$g(x) - h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)$$

J'ai beau chercher, je n'arrive pas à démontrer que cette expression est négative, nous allons donc l'admettre.

Soit $x > 0$, $x + 1 < e^x$ car e^x croît plus vite que x.
donc $\ln(x+1) < \ln(e^x)$ c'est à dire $\ln(x+1) < x$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quelles sont les connaissances et compétences mises en jeu dans cet exercice ?

2- Analysez la production de l'élève du point de la démarche et du point de vue de la rédaction.

3- Exposez une correction de la question 2)b) comme vous le feriez devant une classe de terminale scientifique.

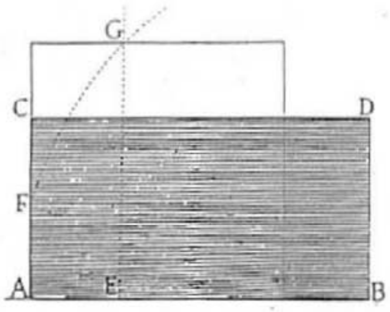
4- Présentez deux ou trois exercices conduisant à l'étude de suites numériques par diverses méthodes.

Thème : problèmes de construction

L'exercice

Voici une traduction en langage contemporain d'un document du XVII^e siècle écrit par le mathématicien hollandais Samuel Marolois (1572-1627).

Soit $ABDC$ un rectangle et F le milieu de $[AC]$. Le cercle de centre A et de rayon AF coupe $[AB]$ en E. Le cercle de centre B et de rayon BF coupe la perpendiculaire à (AB) passant par E en G.



GE est la longueur du côté d'un carré dont l'aire est égale à l'aire du rectangle $ABDC$.

Justifier la dernière affirmation du texte.

Les solutions proposée par deux élèves

Élève 1

Je fais une figure avec 4 cm et 7 cm et je vais démontrer que l'aire du carré vaut $28\,\text{cm}^2$.
Avec le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BAF j'ai :

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 = 49 + 4$$

Donc $BF^2 = 53$, $BF = \sqrt{53} = 7,28$.
dans le triangle rectangle EBG j'ai $GB^2 = EB^2 + EG^2$, $7,28^2 = 25 + EG^2$. J'obtiens $EG = 5,29$ donc l'aire du carré est 27,98. Les deux aires sont égales.

Élève 2

J'ai mesuré sur le dessin et j'ai trouvé 2,8 cm et 5,3 cm.
Je vais démontrer que $GE^2 = 14,84\,\text{cm}^2$.
Pythagore dans le triangle EGB : $14,84 = GB^2 - EB^2 = FB^2 - 15,21$.
Or $FB^2 = 30,05$ (Pythagore dans le triangle FAB). D'où $14,84 = 30,05 - 15,21$ vrai.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises et celles non acquises.

2- Quel peut être selon vous l'intérêt d'étudier des notions à travers une approche historique ?

3- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de troisième.

4- Présentez deux ou trois problèmes de construction, dont l'un au moins met en jeu un logiciel de géométrie dynamique.

Thème : calcul intégral

L'exercice

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x(1-x^2)$.
On note (C)la courbe représentative de f dans le plan muni d 'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On note $(\mathcal{D})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant x(1-x^2)$.

1) Calculer l'aire du domaine $(\mathcal{D})$.
2) Existe-t-il une droite (Δ) passant par l'origine et partageant le domaine $(\mathcal{D})$ en deux parties de même aire.

   Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La réponse d'un élève à la question 2)

On veut couper la partie en deux parties de même aire donc $\frac{1}{8}$. *Une droite qui passe par l'origine a pour équation* $y = ax$.
Je cherche le point M *d'intersection avec la courbe :*

$$x(1-x^2) = ax$$
$$1-x^2 = a$$
$$x^2 = 1-a$$
$$x = \sqrt{1-a}$$
$$M\left(\sqrt{1-a}, a\sqrt{1-a}\right)$$

L'aire entre la courbe et la droite doit être égale à $\frac{1}{8}$ *donc :*

$$\int_0^{\sqrt{1-a}} x(1-x^2)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{1-a}} ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$$

c'est trop compliqué, j'arrête.
Je vois que l'aire entre la courbe et la droite vaut 0 *quand* M *est en* O *et vaut* $\frac{1}{4}$ *quand* M *est en* $I(1;0)$ *donc forcément elle vaut* $\frac{1}{8}$ *à un moment.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'élève. Quels sont selon vous ses acquis ? Sa démarche vous paraît-elle pertinente et quelles erreurs avez-vous repérées ?

2- En vous appuyant sur la démarche de l'élève, proposez une correction de la question 2) telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices dont la résolution fait appel au calcul intégral.

Thème : problèmes avec prise d'initiative

L'exercice

Le directeur d'une salle de spectacle de 8000 places organise un concert. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser sa recette. Une étude de marché lui apprend que :

- ◇ si le prix du billet est de 50 euros il vend 3000 billets ;
- ◇ chaque baisse de 0,60 euros sur le prix du billet lui permet de vendre 100 billets supplémentaires.

Déterminez le prix du billet pour que la recette soit maximale.

Objectif général du programme de seconde

L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

- *modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;*
- *conduire un raisonnement, une démonstration ;*
- *pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;*
- *faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;*
- *pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;*
- *utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;*
- *communiquer à l'écrit et à l'oral.*

Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines.

Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes.

Le travail à exposer devant le jury

1- Proposez une résolution de l'exercice par deux méthodes différentes, comme vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

2- Ciblez précisément les compétences mentionnées dans le programme de seconde que ces méthodes de résolution permettent de développer.

3- Présentez deux ou trois problèmes avec prise d'initiative.

Thème : équation différentielle

L'exercice

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8e^x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.
2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2e^x$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Extrait du formulaire BTS[1] (groupement A) : équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique si $\Delta < 0$, $f(t) = \big(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique

La réponse d'un étudiant de section de technicien supérieur

1) On reconnaît $ax'' + bx' + cx = 0$ avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$

donc $x = \dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$.
Donc $f(t) = (\lambda t + \mu)e^t$ d'après le formulaire.

2) $h'(x) = 8xe^x$ et $h''(x) = 8e^x$.

$$8e^x - 2 \times 8xe^x + 4x^2e^x =$$

On doit trouver 0 mais ça ne marche pas. Je prends le résultat pour la question 3.

3) $y'' - 2y' + y = 8e^x = h''(x) - 2h'(x) + h(x)$
donc $y'' - h''(x) - 2y' + 2h'(x) + y - h(x) = 0$
donc $y = (\lambda t + \mu)e^t + 4x^2e^x$ c'est les solutions de l'équation.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'étudiant en mettant en évidence les différents types d'erreurs que vous relevez.

2- Proposez une correction de la question 3) comme vous l'exposeriez devant une classe de STS (section de technicien supérieur).

3- Présentez deux ou trois exercices qui conduisent à la résolution d'une équation différentielle.

1. brevet de technicien supérieur

Thème : statistiques

L'exercice

L'observatoire météorologique de Paris-Montsouris relève en permanence depuis 1872 la température extérieure et fournit des moyennes annuelles à partir de ces relevés. Une analyse des températures moyennes annuelles entre 1881 et 1980 montre que ce sont des données gaussiennes de moyenne $m = 11,49°C$ et d'écart-type $\sigma = 0.54°C$.

Le tableau ci dessous donne la série des moyennes des températures annuelles en degrés Celsius des années 1981 à 2000.

Année	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Températures moyennes	11,50	12,40	12,30	11,85	11,10	11,25	11,15	12,40	12,95	13,10

Année	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Températures moyennes	11,75	12,30	11,85	13,10	12,85	11,40	12,90	12,40	13,05	12,90

1)

1.a) Déterminer la médiane ainsi que les premier et troisième quartiles de la série des températures durant la période 1981-2000.

1.b) Construire pour cette série le diagramme en boîte. On fera figurer la médiane, les premier et troisième quartile, le minimum et le maximum de la série de températures.

1.c) Déterminer la moyenne de la série des températures annuelles de 1981 à 2000 (on arrondira le résultat au dixième).

2) Déterminer la plage de normalité à 68% de la série des températures moyennes annuelles entre 1881 et 1980.

3) Comparer les températures moyennes observées à Paris dans les vingt dernières années du XX^{e} siècle à celles observées au cours des cent années précédentes.

d'après baccalauréat série L septembre 2006 (Polynésie)

Le travail à exposer devant le jury

1- Un professeur propose l'exercice ci-dessus en supprimant les questions 1 et 2. Quelles compétences cherche-t-il selon vous à développer chez ses élèves ?

2- Proposez une correction de la question 3) telle que vous la présenteriez à des élèves de première.

3- Présentez deux ou trois exercices de statistique descriptive à une ou deux variables dont l'un au moins amène à comparer plusieurs séries statistiques.

4.3.2 Agir en fonctionnaire de l'État

Thème : maîtrise de la langue

Exposé du cas

Devant le nombre d'élèves signalés en conseil de classe pour leurs difficultés en lecture et en écriture, le principal de votre collège attire l'attention de l'ensemble de la communauté éducative sur la note citée en référence dont il a communiqué l'extrait ci-dessous (cf. Documentation fournie avec le sujet). Il souhaite que l'accent soit mis sur le repérage et l'accompagnement spécifique de ces élèves dans toutes les disciplines.

Question

En tant que professeur de mathématiques, quels peuvent être vos moyens d'action et vos propositions pour remédier à ces difficultés ?

Documentation fournie avec le sujet

Extrait de la note d'information 10-11 d'août 2010 (Ministère de l'éducation nationale, DEPP).

[...] En 2009, près de huit participants à la JAPD sur dix sont des lecteurs habiles. Un peu plus de un sur dix rencontre des difficultés de compréhension. Les autres ont une maîtrise fragile de la lecture. L'administration des épreuves de lecture qu'offre la JAPD a connu en 2009 une amélioration très significative de sa fiabilité par le passage automatisé des tests. Ce dispositif plus moderne garantit la standardisation des conditions de passation et de correction. La qualité des données recueillies est optimale. En outre, cette nouvelle forme d'interrogation provoque de nouveaux comportements et réduit considérablement les attitudes négatives qui, jusque là, pouvaient brouiller la mesure des performances de certains profils. Grâce à la nouvelle formule, l'évaluation de la JAPD donne une mesure plus fine du niveau d'illettrisme chez les jeunes français qui est d'environ 10% et dont la moitié est quasi-analphabète. [...] 29,6% des jeunes qui n'ont pas atteint la fin du collège sont en difficulté de lecture. Parmi les jeunes en difficulté 75% n'ont pas dépassé le collège ou un cursus professionnel court, alors que pour l'ensemble des participants à la JAPD, ces parcours ne concernent que 36% d'entre eux.[...]

Thème : conduites addictives

Exposé du cas

Dans le collège où vous enseignez, une enquête a été menée par l'infirmière scolaire. Cette enquête donne les résultats suivants :

- 70% des collégiens ont consommé au moins une fois de l'alcool (4% des élèves de sixième) ;
- 33% fument occasionnellement, certains devant le collège dont 2 élèves de sixième ;
- 5 élèves disent consommer régulièrement du cannabis ;
- de nombreux élèves disent manquer de sommeil suite à la pratique de jeux vidéo tard dans la soirée.

Question

Quelles propositions pourriez-vous faire pour tenter de répondre aux problèmes révélés par cette étude ?

Documentation fournie avec le sujet

Extrait du document : Synthèse du Plan de prise en charge et de prévention des addictions (Ministère de la Santé et des Solidarités, décembre 2006).

[...] La notion de conduite addictive comprend à la fois les addictions aux substances psycho-actives mais également les addictions comportementales, sans substances psycho-actives. L'addiction se caractérise en effet par la dépendance, soit l'impossibilité répétée de contrôler un comportement et la poursuite de ce comportement en dépit de la connaissance des conséquences négatives.

Toutes les addictions sont à prendre en compte, qu'elles soient liées ou non aux substances : tabac, alcool, drogues illicites, médicaments, ou jeu. Elles atteignent gravement ceux qui en dépendent, mais aussi leur entourage et l'ensemble de la société. Elles sont aussi souvent à l'origine de handicaps, d'isolement, de violence et de précarité.[...]

Thème : orientation des élèves

Exposé du cas

Le jour de la prérentrée le principal du collège dans lequel vous venez d'être affecté(e), prenant appui sur les données ci-dessous, fait le commentaire suivant :

« Dans notre département, les élèves et leurs familles privilégient les poursuites d'études qui ne nécessitent pas un éloignement. Cela se traduit dès le collège par un manque d'ambition dans les choix d'orientation à l'issue de la classe de 3e. Il convient que nous nous mobilisions sur cette question. »

Décisions d'orientation en fin de 3e (département)	2006	2007	2008	2009	France 2009
Orientation vers la seconde générale ou technologique	52%	56%	43,2%	42,3%	55,1%
Orientation vers une seconde professionnelle	36%	28%	40,5%	44,7%	37,8%

Question

En tant que professeur de mathématiques, de quelles manières pouvez-vous aider vos élèves à réfléchir sur leur orientation ?

Documentation fournie avec le sujet

Conclusion du rapport sur le collège du Haut Conseil de l'Éducation - octobre 2010

La question du collège est aujourd'hui encore source de profonds clivages et d'incessants débats entre les partisans du « collège unique » et ses adversaires. Après des décennies de débats, il est urgent de dépasser cette opposition, pour se concentrer sur l'objectif assigné au système éducatif par la loi du 23 avril 2005 : assurer à chaque élève la maîtrise du socle commun à la fin de la scolarité obligatoire, objectif dont la France est encore très éloignée pour une part importante de ses élèves. Il est temps que notre pays prenne conscience qu'il a besoin d'élever significativement le niveau moyen des performances de ses élèves s'il veut élargir la base de la sélection de son élite et répondre aux défis mondiaux. Cet objectif constitue pour la scolarité obligatoire du XXIème siècle une ambition équivalente à celle que Jules Ferry nourrissait pour l'école primaire du XXème siècle lorsqu'il rendit l'instruction gratuite et obligatoire.

Atteindre cet objectif est une responsabilité partagée entre l'école primaire et le collège, dans la mesure où ces deux maillons forment un tout. Si le socle commun n'est pas maîtrisé à chaque palier, il est illusoire d'espérer que le collège pourra résoudre le problème de la grande difficulté scolaire. Aussi est-il capital que la Nation prête une attention toute particulière à son école primaire, notamment lors des premières années de la scolarité obligatoire, celles des apprentissages fondamentaux, dont l'absence de maîtrise aura des répercussions négatives sur toute la scolarité ultérieure. Le succès du collège est donc indissociable des préconisations que le Haut Conseil a faites dans son bilan sur l'école primaire en 2007 et dont la réforme des programmes du primaire a tenu compte.

À la différence du lycée, le collège est le dernier endroit qui accueille, sans distinction, tous les enfants et adolescents scolarisés dans notre pays, le dernier moment où les mêmes enseignements et les mêmes valeurs peuvent être transmis à tous. Le collège est donc amené à remplir une mission essentielle tant du point de vue de l'acquisition par tous les élèves d'une culture commune, que de celui de leur préparation progressive à une orientation réfléchie, à la fin de la troisième, en permettant à chacun de développer ses talents propres et de réaliser ses ambitions légitimes.

Thème : lutte contre l'échec scolaire

Exposé du cas

En fin de séance, vous rendez un devoir à votre classe. Un élève, dont la copie a reçu une mauvaise note, s'énerve, déchire sa feuille et lance une insulte en quittant la salle de classe avant la sonnerie.

Question

Comment un tel problème peut-il être approché au niveau du professeur, de l'équipe pédagogique ou de l'établissement ?

Documentation fournie avec le sujet

Extrait d'un texte commun de l'AFEV (Association de la fondation étudiante pour la ville), de l'OZP (Observatoire des zones prioritaires), du CRAP (Cercle de recherche et d'action pédagogiques), de la FCPE (Fédération des conseils de parents d'élèves des écoles publiques) et de Aide et Action, intitulé « Souffrance à l'école : agissons ! » .

[...] Une situation de stress, d'isolement, de dévalorisation, de fatigue ou de peur prive de la disponibilité nécessaire pour que s'effectuent positivement apprentissages, enseignement, participation à la vie de l'établissement. Les malentendus et violences du quotidien, la difficulté pour certains à comprendre les codes de l'école parasitent les apprentissages et la vie collective. Y être attentifs, se soucier du bien être des élèves, de leur besoin d'estime pourrait prévenir de nombreuses situations de décrochage scolaire. La souffrance est un révélateur, c'est aussi un déclencheur vers le décrochage scolaire : certains se couperont brutalement de l'école, d'autres décrocheront plus lentement, silencieusement.[...]

Thème : maltraitance

Exposé du cas

Un élève un peu turbulent de la classe de 4^e^ dont vous êtes le professeur principal ne veut pas vous remettre son carnet de correspondance que vous lui demandez à la suite d'un incident survenu en cours. Il vous dit en aparté qu'il lui arrive d'être battu par ses parents et que cet incident risque de le mettre dans une situation très difficile.

Question

Que pouvez-vous faire ?

Documentation fournie avec le sujet

Extrait du guide « Enfants victimes d'infractions pénales : guide de bonnes pratiques » (Ministères de la justice et de l'éducation nationale, décembre 2003).

[...] Le signalement se justifie en raison d'indicateurs d'alerte de maltraitance et de danger qui peuvent prendre plusieurs formes, dont la facilité de détection est inégale, notamment :

- des lésions sur le corps de l'enfant laissant présumer des violences physiques à son encontre (hématomes sur plusieurs parties du corps de l'enfant, traces de coups, de brûlures de cigarettes ou de morsures) ;
- des troubles anormaux de comportement (anxiété, repli sur soi ...) laissant présumer des violences d'ordre psychologique (brimades répétées et disproportionnées) ;
- des signes laissant présumer des carences parentales graves (négligence de l'hygiène corporelle de l'enfant, signes de malnutrition, manque de sommeil, absentéisme scolaire injustifié ...).

Chez des enfants plus âgés, les symptômes de maltraitance peuvent se manifester par des fugues, manifestations suicidaires voire tentatives de suicides, et des passages à l'acte qui sont des expressions de souffrances.[...]

Thème : technologies de l'information et de la communication

Exposé du cas

Votre collège dispose de deux salles équipées d'un vidéoprojecteur. Le principal vous informe que le conseil général envisage de doter l'établissement de plusieurs tableaux numériques interactifs afin de compléter cet équipement. La dotation comprendrait également des manuels numériques de mathématiques.

Le principal vous charge de préparer un projet d'utilisation de ces outils que vous présenterez en conseil pédagogique avant la fin de l'année pour une mise en œuvre dès la rentrée suivante.

Question

Quelle stratégie mettez-vous en place avec vos collègues pour élaborer ce projet et quelles pourraient en être les lignes générales ?

Documentation fournie avec le sujet

Extrait de « Réussir l'école numérique », rapport de la mission parlementaire de Jean-Michel Fourgous, député des Yvelines, sur la modernisation de l'école par le numérique, remis au ministre de l'Éducation nationale le 15 février 2010.

[...] Les différents rapports montrent que les TICE [1] augmentent la motivation des élèves, la confiance en soi, les incitent à apprendre, facilitent le travail collaboratif, améliorent les résultats scolaires et que ce sont les élèves les plus en difficulté qui en profitent le plus. Elles apparaissent comme un moyen pertinent de lutte contre l'échec scolaire et un support pouvant permettre à la France de retrouver une école dont elle soit fière.

D'une manière générale, même si des efforts restent à effectuer dans certains domaines, l'équipement se situe dans la moyenne européenne dans les établissements scolaires français. Le primaire accuse cependant un très fort retard et l'obsolescence des ordinateurs demeure problématique.

Pourtant, le point essentiel reste le manque d'usage : si 94% des enseignants utilisent les TIC [2] pour préparer leurs cours à domicile, seuls 12% les utilisent dans un quart de leurs cours : la France demeure ainsi en dessous de la moyenne européenne pour l'utilisation du numérique en classe (21e rang) et très en retard pour ce qui est de l'utilisation pédagogique des TICE en cours (24e rang).

Les freins à cette utilisation ne sont plus les mêmes que ceux répertoriés il y a quelques années : équipement, maintenance, formation et accompagnement semblent aujourd'hui, les quatre points les plus importants à régler. Mais les plus forts leviers semblent la modification des programmes scolaires et l'évolution des examens.[...]

---

1. technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement
2. technologies de l'information et de la communication

Thème : absentéisme

Exposé du cas

Le proviseur de votre lycée a constaté que l'absentéisme est en constante augmentation dans l'établissement et il souhaite que chaque membre de la communauté éducative s'implique davantage dans la prévention, le signalement et le suivi des élèves absentéistes.

Question

Comment pourriez-vous répondre à cette demande ?

Documentation fournie avec le sujet

Extrait de la note d'information 10-08 : L'absentéisme des élèves dans le second degré en 2007-2008 (Ministère de l'éducation nationale, direction de l'évaluation de la prospective et de la performance, avril 2010).

[...] L'établissement est le premier lieu de prévention de diagnostic et de traitement des absences des élèves. Le décret n° 2004-162 du 19 février 2004 définit les modalités de contrôle pour garantir aux enfants soumis à l'obligation scolaire le droit à l'instruction. Les articles R131-5 et R131-6 prévoient que doit être tenu dans chaque établissement scolaire, un registre d'appel sur lequel sont mentionnées, pour chaque classe, les absences des élèves inscrits. Pour chaque élève, non assidu un dossier est constitué pour la durée de l'année scolaire. Il présente le relevé des absences en mentionnant leurs durées et leurs motifs ainsi que l'ensemble des contacts avec la famille, les mesures prises pour rétablir l'assiduité et les résultats obtenus. Dans les collèges et les lycées publics, les conseillers principaux d'éducation gèrent les absences sous l'autorité du chef d'établissement. Ils prennent note des absences et ont vocation à établir une relation avec les familles, à faire le point régulièrement en échangeant les informations nécessaires pour régulariser les absences, les enregistrer et suivre les élèves concernés.[...]

Thème : orientation des jeunes filles

Exposé du cas

Vous prenez connaissance du projet d'établissement du lycée dans lequel vous venez d'être affecté(e). Un des axes de ce projet concerne la promotion de l'orientation des jeunes filles vers les filières et carrières scientifiques et technologiques.

Question

Quelles actions l'équipe des professeurs de mathématiques peut-elle proposer dans ce cadre ?

Documentation fournie avec le sujet

Présentation du plan sciences et technologies à l'école (dossier de presse, 31 janvier 2011)

[...] Aujourd'hui les filles représentent 57,8% des bacheliers généraux et 52,6% des bacheliers technologiques, toutes séries confondues. Mais les statistiques montrent que la mixité résiste mal à l'orientation. En effet, filles et garçons n'investissent pas les mêmes filières, pour des raisons psychologiques et sociales. Seulement 39% des élèves de terminales scientifiques et technologiques (S, STL, STI) sont des filles. Cette situation se prolonge après le baccalauréat : dans les classes préparatoires aux grandes écoles, 75% des élèves des filières littéraires sont des filles, 30% des élèves des filières scientifiques et seulement 26% des diplômes d'ingénieurs sont délivrés à des femmes. [...]

Thème : orientation des élèves

Exposé du cas

Parmi les *indicateurs pour le pilotage des établissements du second degré* (IPES) d'un lycée on trouve à la rubrique « Devenir des élèves de seconde » le tableau suivant.

	Établissement		Académie	France
	effectif	pourcentage		
1re S	64	20,6%	31,5%	30,7%
1re L	38	12,2%	10,5%	9,2%
1re ES	71	22,8%	19,1%	18,7%
1re STG	62	19,9%	13,6%	15,0%
1re STI	4	1,3%	7,3%	6,7%
BEP CAP	2	0, 6%	0,7%	0,8%
Redoublants	47	15,1%	10,5%	11,2%
Baccalauréat professionnel	2	0,6%	2,6%	2,4%
Sorties du système	21	6,8%	3,6%	4,8%

Par ailleurs, 7,3% des élèves de seconde de ce lycée appartiennent à une catégorie socioprofessionnelle défavorisée, contre 20,8% pour l'académie et 24,6% pour la France.

Question

Après avoir analysé les données de ce tableau, indiquez les propositions que pourrait faire le conseil pédagogique de ce lycée afin de faire évoluer certains des indicateurs relatifs à l'orientation des élèves.

Documentation fournie avec le sujet

Circulaire n° 2011-071 du 2 mai 2011 : préparation de la rentrée 2011, NOR : MENE1111098C

[...] Réforme du lycée et orientation

La prise en charge individualisée des élèves se construit au travers de l'accompagnement personnalisé, du tutorat, des stages passerelles et des stages de remise à niveau. Dès la seconde, la liaison avec l'enseignement supérieur et la préparation de l'insertion professionnelle intègrent l'orientation active et la procédure d'admission post-bac. Les autorités académiques veillent à ce que les échanges d'informations entre équipes éducatives des lycées et professionnels de l'enseignement supérieur se développent. Les centres d'information et d'orientation facilitent la mise en cohérence des actions portées par les établissements (forums, conventions, information des équipes, actions conjointes avec les universités, etc.), en particulier lors des temps forts du parcours. Le service dématérialisé monorientationenligne.fr, proposé par l'Onisep, contribue à faciliter l'accès à l'information. [...]

Thème : évaluation des élèves

Exposé du cas

Dans votre classe de sixième, vous identifiez trois élèves pour lesquels la maîtrise des connaissances et des compétences du socle commun n'est pas attestée pour le palier 2, notamment en ce qui concerne les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique.

Question

Comment envisagez-vous la formation et l'évaluation en mathématiques pour ces trois élèves ?

Documentation fournie avec le sujet

Article 9 de la loi d'orientation du 23 avril 2005.

Après l'article L.122-1 du code de l'éducation, il est inséré un article L.122-1-1 ainsi rédigé :

« Art. L. 122-1-1. La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société. »

Extrait du document : Livret personnel de compétences, repères pour sa mise en œuvre au collège (DGESCO, mai 2010).

[...] A l'école, les attestations de maîtrise des connaissances et des compétences du socle commun sont complétées en fin de CE1 pour le palier 1, en fin de CM2 pour le palier 2. Ces attestations renseignées au palier 1 et au palier 2 sont des supports structurants pour la liaison école-collège. Étant très détaillées, elles apportent des éléments d'information essentiels pour la mise en place, sans délai, de l'aide et de l'accompagnement au travail nécessaires aux élèves en difficulté scolaire.

En fonction des compétences validées dans les attestations jointes au livret scolaire, les équipes pédagogiques identifient les points forts et les difficultés des élèves, et organisent la mise en place des aides nécessaires, notamment la définition des objectifs d'apprentissage prioritaires des programmes personnalisés de réussite éducative. Les compétences 1, 2 et 3 sont prioritaires dans la mise en place de ces remédiations, sans pour autant négliger la lecture des autres compétences.

Au collège, les professeurs s'appuieront sur les grilles de référence des programmes de l'école pour évaluer et valider au palier 2 les compétences non encore acquises. [...]

Thème : le travail en équipe

Exposé du cas

Sur proposition du conseil pédagogique, le chef d'établissement de votre lycée a établi pour l'année scolaire suivante un planning d'évaluation des élèves. Il a fixé l'organisation d'un baccalauréat blanc avant les vacances de printemps avec des épreuves communes à toutes les classes d'une même série. Le conseil d'enseignement qui a réuni les enseignants de mathématiques au mois de septembre a décidé la mise en place d'une progression commune pour les séries S et ES.

Deux professeurs de mathématiques de l'établissement considèrent que cette organisation porte atteinte à leur liberté pédagogique, notamment en raison du choix de la progression, qui ne leur convient pas. De plus, la concertation qui devra se mettre en place pour l'élaboration des sujets et du barème ne fait pas selon eux partie de leur temps de service.

Enfin ils disent ne pas se sentir liés par les orientations proposées par le conseil pédagogique ou par le conseil d'enseignement.

Question

Quelle analyse faites-vous de cette situation ?

Documentation fournie avec le sujet

Code de l'éducation

Article L. 421-5

« Dans chaque établissement public local d'enseignement, est institué un conseil pédagogique. Ce conseil, présidé par le chef d'établissement, réunit au moins un professeur principal de chaque niveau d'enseignement, au moins un professeur par champ disciplinaire, un conseiller principal d'éducation et, le cas échéant, le chef de travaux. Il a pour mission de favoriser la concertation entre les professeurs, notamment pour coordonner les enseignements, la notation et l'évaluation des activités scolaires. Il prépare la partie pédagogique du projet d'établissement. »

Article L912-1

La liberté pédagogique de l'enseignant s'exerce dans le respect des programmes et des instructions du ministre chargé de l'éducation nationale et dans le cadre du projet d'école ou d'établissement avec le conseil et sous le contrôle des membres des corps d'inspection. Le conseil pédagogique prévu à l'article L. 421-5 ne peut porter atteinte à cette liberté.

Circulaire n° 97-123 du 23 mai 1997

Mission du professeur exerçant en collège, en lycée d'enseignement général et technologique ou en lycée professionnel.

Au sein de la communauté éducative, le professeur exerce son métier avec d'autres, dans le cadre d'équipes variées. [...] La mission du professeur et la responsabilité qu'elle implique se situent dans le triple cadre du système éducatif, des classes qui lui sont confiées et de son établissement d'exercice.

Thème : prévention de l'illettrisme

Exposé du cas

Vous enseignez dans un collège où la première priorité est une prise en charge collective de la maîtrise de la langue, incluant la prévention de l'illettrisme.

Question

Comment le professeur de mathématiques peut-il inscrire sa discipline et ses pratiques pédagogiques dans cette prise en charge collective ?

Documentation fournie avec le sujet

Extrait de la note d'information 10-11 d'août 2010 (ministère de l'éducation nationale, DEPP[3])

En 2009, près de huit participants à la JAPD[4] sur dix sont des lecteurs habiles. Un peu plus de un sur dix rencontre des difficultés de compréhension. Les autres ont une maîtrise fragile de la lecture. [...] 29,6% des jeunes qui n'ont pas atteint la fin du collège sont en difficulté de lecture. [...] Parmi les jeunes en difficulté 75% n'ont pas dépassé le collège ou un cursus professionnel court, alors que pour l'ensemble des participants à la JAPD, ces parcours ne concernent que 36% d'entre eux.

Extrait de « Illettrisme : les chiffres » de l'ANLCI[5] (avril 2010)

[...] Très souvent on pense que l'illettrisme frappe surtout les jeunes générations. Certes 4,5% des jeunes de 18 à 25 ans sont confrontés à l'illettrisme alors que pour eux la fin de la scolarité obligatoire est encore très proche. Ils ont passé plus de 10 ans à l'école et ne maîtrisent pas au terme de la scolarité obligatoire la lecture, l'écriture, la compréhension d'un message simple de la vie courante, ce qui est extrêmement préoccupant et appelle à conduire une politique active de prévention dès l'enfance, tout en s'assurant de la consolidation des compétences de base tout au long de la scolarité obligatoire.

Mais la majorité des personnes en situation d'illettrisme a plus de 45 ans. A cette population confrontée à des difficultés quotidiennes, il faut apporter des solutions et informer largement sur cette réalité.

Le pourcentage de personnes qui sont confrontées à l'illettrisme croît au fur et à mesure que l'âge augmente, ce qui invite à prévenir l'effritement des connaissances tout au long de la vie et à faire de la consolidation des compétences de base une donnée intégrée de manière permanente dans la formation tout au long de la vie. [...]

---

3. Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance
4. Journée d'appel de préparation à la défense
5. Agence nationale de lutte contre l'illettrisme

Thème : conduites addictives ou à risque

Exposé du cas

À l'issue de son cours de mathématiques, le professeur remarque qu'un élève, qu'il sait par ailleurs en difficulté et avec lequel le contact est particulièrement difficile, a les bras porteurs de griffures profondes dont certaines saignent encore.

Question

Que doit faire un professeur qui rencontre une telle situation ?

Documentation fournie avec le sujet

Bulletin officiel spécial n° 1 du 25 janvier 2001 : les missions des infirmiers de l'éducation nationale

[...] L'infirmier organise, si besoin est, le suivi de l'état de santé des élèves en complément des visites médicales obligatoires, en vue de repérer les difficultés éventuelles de santé ou les élèves fragilisés. Ce suivi s'inscrit dans le cadre des actions de prévention et d'éducation en matière d'hygiène et de santé individuelle et collective. [...] Les actions d'éducation à la santé visent à rendre l'élève responsable, autonome et acteur de prévention. Elles permettent également de venir en aide aux élèves manifestant des signes inquiétants de mal être : usage de produits licites ou illicites, absentéisme, désinvestissement scolaire, repli sur soi, conduites suicidaires. [...]

Extrait de la circulaire du 23 mai 1997 : mission du professeur

[...] Un professeur n'est pas seul ; au sein de la communauté scolaire, il est membre d'une ou plusieurs équipes pédagogiques et éducatives. Il est préparé à travailler en équipe et à conduire avec d'autres des actions et des projets. Il a le souci de confronter ses démarches, dans une perspective d'harmonisation et de cohérence, avec celles de ses collègues. Il peut solliciter leur aide, ainsi que le conseil et l'appui des équipes de direction et des corps d'inspection.

Il sait quel rôle jouent dans l'établissement tous ceux qui, quel que soit leur emploi, participent à son fonctionnement. [...]

Thème : lutte contre l'échec scolaire

Exposé du cas

Le jour de la rentrée, le chef d'établissement vous informe que, dans la classe de sixième dont vous êtes le professeur principal, se trouve un élève dont les parents ont refusé l'orientation en section d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA).

Il demande à l'équipe pédagogique de lui faire des propositions pour l'accueil et l'accompagnement de cet élève.

Question

Quelle stratégie l'équipe peut-elle mettre en place pour aider cet élève à s'intégrer et lui permettre de tirer profit des enseignements ?

Documentation fournie avec le sujet

Article 9 de la loi d'orientation du 23 avril 2005.

Après l'article L. 122-1 du code de l'éducation, il est inséré un article L. 122-1-1 ainsi rédigé :

« Art. L. 122-1-1.- La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société. »

Extrait du site Eduscol - Socle commun et évaluation

Une démarche collégiale et progressive

De l'école élémentaire jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire, quelle que soit la voie de formation de l'élève, des fiches d'attestation précisent l'acquisition progressive des connaissances et des compétences. Elles sont renseignées à trois paliers : fin de CE1, fin de CM2, fin de collège.

Elles sont regroupées dans le livret personnel de compétences qui consigne les acquis et suit l'élève dans son parcours scolaire. L'objectif est de permettre tant aux familles qu'aux enseignants de vérifier la progression des élèves.

Extrait du site Eduscol - Sections d'enseignement général et professionnel adapté

Au collège, les sections d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA) accueillent des élèves présentant des difficultés d'apprentissage graves et durables. Ils ne maîtrisent pas toutes les connaissances et compétences attendues à la fin de l'école primaire, en particulier au regard des éléments du socle commun.

5. ANNEXES

5.1. Ressources numériques et logiciels à disposition des candidats

Textes officiels

- réglementation du concours ;
- programmes de Mathématiques des classes de collège, de lycée et des sections de technicien supérieur ;
- documents ressources pour le collège et le lycée ;
- extrait de l'arrêté du 12 mai 2010 spécifiant les compétences professionnelles des maîtres.

Logiciels

- Algobox ;
- ClassPad Manager ;
- Geogebra ;
- Geoplan ;
- Geospace ;
- Maxima ;
- OpenOffice.org ;
- Python ;
- Scilab ;
- Sinequanon ;
- TI-NSpire CAS TE ;
- TI-SmartView 83 Plus.fr ;
- Xcas.

L'utilisation de tout support numérique personnel est exclue.
L'usage des téléphones mobiles et de toute forme d'accès à internet est interdit dans l'enceinte du concours.

Manuels numériques

- DIDIER : Dimathème 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e} ;
- BORDAS : Myriade 5^{e}, Indice 2de ;
- NATHAN : Transmath 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, Transmath 2de, Hyperbole 2de.

Le jury remercie les éditeurs de logiciels et de manuels ayant mis gracieusement leurs produits à la disposition du concours.

5.2 Bibliothèque du concours

Le candidat peut utiliser des ouvrages personnels. Seuls sont autorisés les livres en vente dans le commerce, à condition qu'ils ne soient pas annotés et à l'exclusion des manuels spécifiques de préparation aux concours d'enseignants. Le jury se réserve la possibilité d'interdire l'usage de certains ouvrages dont le contenu serait contraire à l'esprit des épreuves.

La bibliothèque du concours propose quelques exemplaires de manuels du collège, du lycée et des sections de technicien supérieur.

Ouvrages disponibles lors de la session 2011

Sixième	Belin	Prisme	2005
	Bordas	Myriade	2010
	Delagrave		2005
	Didier	Hélice	2009
		Dimathème	2005
	Hachette Education	Phare	2005
		Diabolo	2005
	Nathan	Domino	2005
		Transmath	2005
Cinquième	Bordas	Babylone	2006
		Myriade	2010
	Bréal		2006
	Didier	Dimathème	2006
	Hachette Education	Phare	2006
	Magnard		2006
	Nathan	Transmath	2010
		Domino	2006
Quatrième	Belin	Prisme	2009
	Bordas	Myriade	2011
		Babylone	2007
	Bréal		2007
	Didier	Horizon	2011
		Dimathème	2007
	Hachette Education	Phare	2011
		Diabolo	2007
	Nathan	Transmath	2007
Troisième	Belin	Prisme	2008
	Bréal		2008
	Didier	Dimathème	2008
	Hachette Education	Diabolo	2008
		Phare	2008
	Magnard		2003
	Nathan	Transmath	2008

Seconde	Belin	Symbole	2009
	Bordas	Pixel	2009
	Didier	Math'x	2010
	Hachette Education	Déclic	2010
		Repères	2004
	Nathan	Hyperbole	2010
		Transmath	2010
Première S	Belin	Symbole	2011
	Bordas	Indice	2001
		Fractale	2001
	Bréal		2001
	Didier	Dimathème	2001
		Dimathème analyse probabilités	2001
		Math'x	2005

	Hachette Education	Déclic	2001
		Terracher géométrie	2001
		Terracher Analyse	2001
	Nathan	Hyperbole	2001
		Transmath	2001
Première ES	Bréal		2001
	Didier	Dimathème obligatoire	2001
		Dimathème option	2001
	Hachette Education	Déclic obligatoire et option	2001
	Nathan	Hyperbole	2001
		Transmath	2001
Première L	Bordas	Indice ; Maths informatique	2001
	Delagrave	Maths informatique obligatoire	2001
	Ellipses		2002
	Hachette Education	Déclic mathématiques	2003
		Déclic (enseignement scientifique)	1999
	Hatier	Mathématiques informatique	2001
	Nathan	Transmath	2001
Premières STI-STL	Didier	Dimathème	1998
Première SMS	Didier	Dimathème	1998
Terminale S	Bordas	Fractale (enseignement obligatoire)	2002
		Fractale (enseignement de spécialité)	2002
		Indice (enseignement obligatoire)	2002
		Indice (enseignement de spécialité)	2002
	Bréal	enseignement obligatoire	2002
		enseignement de spécialité	2002
	Didier	Math'x (enseignement obligatoire)	2006
		Math'x (enseignement de spécialité)	2006
	Hachette Education	Déclic	2005
		Déclic (enseignement de spécialité)	2002
		Terracher	2002
		Terracher (enseignement obligatoire)	1998
		Terracher (enseignement de spécialité)	1998
	Nathan	Hyperbole (enseignement obligatoire)	2006
		Hyperbole (enseignement de spécialité)	2006
		Transmath	2002
Terminale ES	Bréal		2002
	Didier	Dimathème	2002
	Hachette Education	Déclic	2005
	Nathan	Transmath	2002
	Nathan	Hyperbole	2006

Sections de technicien supérieur	Foucher	Sigma (BTS industriels, groupement BCD, analyse et algèbre)	2009
		Sigma (BTS industriels, groupement BCD, statistique et probabilités)	2002
		Sigma (BTS industriels, groupement A, tome 1)	2002
		Sigma (BTS industriels, groupement A, tome 2)	2007
		BTS Industriels. analyse, algèbre linéaire, nombres complexes	1997
		BTS Tertiaire, analyse et algèbre linéaire	1997
	Hachette Education	BTS Comptabilité et gestion, informatique de gestion	2000
	Nathan technique	BTS Mathématiques, comptabilité et gestion des organisations	2007
		BTS Mathématiques, groupement B, C, D	2007