CAPLP

CONCOURS EXTERNE ET CAFEP

Section : mathématiques-sciences physiques

Première composition écrite de mathématiques

Durée : 5 heures

CAPLP mathématiques-sciences

Épreuve écrite d’admissibilité

Mathématiques

Ceci est une banque comportant 22 exercices de mathématiques pouvant être posés à l’épreuve écrite de mathématiques du CAPLP externe mathématiques-sciences. Cette banque d’exercices ne couvre pas l’ensemble des domaines du programme du concours. Certains de ces exercices n’ont pas été testés.

Une épreuve complète pourrait être composée de trois, quatre ou cinq exercices de cette banque : ainsi, il est possible de construire différents sujets en variant les domaines évalués.

EXERCICE 1

Depuis la création d'un parc d'attractions, on a relevé le nombre de visiteurs pour chacune des 6 années écoulées. On note p_n le nombre de visiteurs (exprimé en milliers d'individus) au cours de la n-ième année de fonctionnement. Les valeurs p_n sont données dans le tableau ci-dessous, ainsi que les pourcentages d'augmentation d'une année sur l'autre (à 0,1 % près).

n	1	2	3	4	5	6
p_n	90	94	100	107	118	134
Augmentation		4,4				

1)

a) Justifier que le pourcentage d'augmentation du nombre de visiteurs entre la première et la deuxième année est 4,4 % (à 0,1 % près).

b) Calculer de même le pourcentage d'augmentation (d'une année à l'autre) du nombre de visiteurs pour chacune des années suivantes. On recopiera et complétera le tableau donné ci-dessus.

c) Préciser les coefficients multiplicatifs associés à chacun des pourcentages précédents. La croissance de la fréquentation du parc peut-elle être considérée comme exponentielle ? Justifier la réponse.

2) On avait prévu 80 milliers de visiteurs pour la première année. On s'intéresse à l'écart entre le nombre réel de visiteurs et cette prévision. Pour cela on étudie la suite des nombres $p_n - 80$. Le tableau ci-dessous a été construit à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E
1	n	p_n	$p_n - 80$		u_n
2	1	90	10		10
3	2	94	14	1,4	14
4	3	100	20	1,428 571 43	19,6
5	4	107	27	1,35	27,44
6	5	118	38	1,407 407 41	38,416
7	6	134	54	1,421 052 63	53,7824

Les colonnes A et B correspondent aux données du premier tableau.

a) Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule C2 du tableau avant de la recopier vers le bas jusqu'à la cellule C7 ?

b) La cellule D3 contient le coefficient multiplicatif qui permet de passer de la cellule C2 à la cellule C3. Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule D3 avant de la recopier vers le bas jusqu'à la cellule D7 ?

3) On choisit d'approcher la suite des nombres $p_n - 80$ par une suite géométrique. Ainsi la colonne E contient les six premiers termes de la suite géométrique de terme général u_n, de premier terme $u_1 = 80$ et de raison 1,4.

a) Indiquer comment on a procédé pour faire calculer par le tableur les termes u_n de la suite dans la colonne E.

b) Exprimer u_2, u_3 puis u_{10} en fonction de u_1. En admettant que jusqu'à $n = 10$, u_n reste proche de $p_n - 80$, donner une estimation du nombre de visiteurs du parc au cours de la dixième année.

EXERCICE 2

Un enseignant d'une classe de baccalauréat industriel a préparé une séquence de trois séances portant sur le flocon de Von Koch.
Pour chacune de ces trois séances, chaque partie de l'exercice commence par les instructions et/ou questions destinées aux élèves puis sont énoncées les questions destinées aux candidats du concours.

Première séance : figure de base du flocon de Von Koch

La première séance de la séquence consiste à faire travailler les élèves sur un logiciel de géométrie dynamique. L'enseignant donne aux élèves les consignes suivantes :

Séance 1 : Macro de la figure de base de Von Koch

1. Placer deux points distincts A et B.
2. Construire le point C image du point B par la rotation de centre A et d'angle 60°.
3. Construire le centre de gravité G du triangle ABC.
4. La parallèle à [AC] passant par G coupe le segment [AB] en F.
5. La parallèle à [BC] passant par G coupe le segment [AB] en H.
6. Créer le segment [AF], puis les segments [FG], [GH], [HB].
7. Masquer tout ce qui a été dessiné sauf les segments [AF], [FG], [GH] et [HB].
8. Enregistrer la macro permettant de faire correspondre aux points A et B la ligne brisée AFGHB.

Questions destinées aux candidats du concours

Question 1

Dessiner sur la copie la figure que doivent finalement obtenir les élèves à l'écran ; vous y ferez apparaître en plus les noms des points A, F, G, H et B.

Question 2

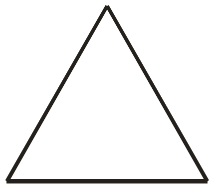
Montrer que les segments [AF], [FG], [GH] et [HB] sont de même longueur égale au tiers de la longueur du segment [AB].

Deuxième séance : construction et étude des premiers flocons

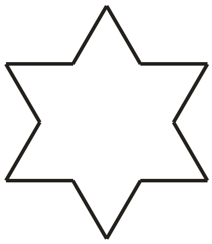
Durant cette séance, les élèves doivent d'abord construire des flocons à l'aide du logiciel de géométrie et de la macro enregistrée lors de la première séance, puis répondre à une série de questions.

1) Construction de flocons avec un logiciel de géométrie dynamique

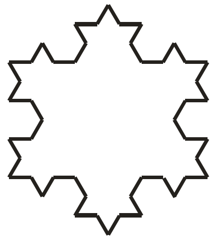
Le professeur donne aux élèves les renseignements suivants :
Le « flocon de rang 0 » est un triangle équilatéral de 9 cm de côté.
Le flocon de rang 1 (voir figure ci-après) est obtenu en appliquant trois fois au flocon de rang 0 la macro enregistrée à l'issue de la première séance.
Le flocon de rang 2 (voir figure ci-après) est obtenu en appliquant douze fois au flocon de rang 1 la macro enregistrée à l'issue de la première séance.



flocon de rang 0



flocon de rang 1



flocon de rang 2

Le flocon de Von Koch est la « limite » des flocons obtenus, lorsqu'on répète indéfiniment les étapes mentionnées ci-dessus.

2) Étude des premiers flocons

L'enseignant souhaite que ses élèves réfléchissent aux questions ci-dessous à l'aide des figures qu'ils ont réalisées.

Soit C_n le nombre de côtés du flocon de rang n.
Soit L_n la longueur d'un côté du flocon de rang n.
Soit P_n le périmètre du flocon de rang n.

1) Remplir le tableau suivant

Rang n	**Nombre de côtés C_n**	**Longueur d'un côté L_n**	**Périmètre du flocon P_n**
0	3	9	
1			
2			

2) Comment pourrait-on procéder pour calculer le périmètre du flocon de rang 6 ?

Question destinée aux candidats du concours

Question 3 : Préciser la nature de chacune des suites $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Troisième séance : étude des caractéristiques des flocons

L'enseignant a réalisé sur un tableur le tableau ci-dessous et le projette à ses élèves puis en discute avec eux.

	A	B	C	D
1	rang n	nombre de côtés Cn	longueur d'un côté Ln	périmètre du flocon Pn
2	0	3	9	27
3	1	12	3	36
4	2	48	1	48
5	3	192	0,33333333	64
6	4	768	0,11111111	85,3333333
7	5	3072	0,03703704	113,777778
8	6	12288	0,01234568	151,703704
9	7	49152	0,00411523	202,271605
10	8	196608	0,00137174	269,695473
11	9	786432	0,00045725	359,593964
12	10	3145728	0,00015242	479,458619

Questions destinées aux candidats du concours

Question 4 concernant l'évolution du périmètre d'un flocon :

a) Quelle est la limite du périmètre P_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier le résultat.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que le flocon de rang n ait un périmètre supérieur ou égal à 9 km (on rappelle qu'on part d'un triangle de côtés mesurant 9 cm).

Question 5 concernant l'évolution de l'aire du domaine délimité par un flocon :

On note $\mathcal{A}_n$ l'aire, exprimée en cm², du domaine délimité par le flocon de rang n.

a) Que vaut $\mathcal{A}_0$ (on rappelle qu'on part d'un triangle équilatéral de côtés de longueur 9 cm) ?

b) Obtenir une formule exprimant l'aire $\mathcal{A}_{n+1}$ en fonction de l'entier naturel n et de l'aire $\mathcal{A}_n$.

c) En déduire une valeur approchée de $\mathcal{A}_6$ au millimètre carré près.

EXERCICE 3

Au mois de décembre 2000, un opérateur téléphonique a modifié les tarifs de ses communications. Avant modification, la communication était facturée 0,11€ pour l'ensemble des trois premières minutes et 0,04€ par minute supplémentaire. Dans la nouvelle tarification, la première minute revient à 0,09€ et chaque minute supplémentaire est facturée 0,03€.
On se propose de comparer les deux tarifications.

Partie I

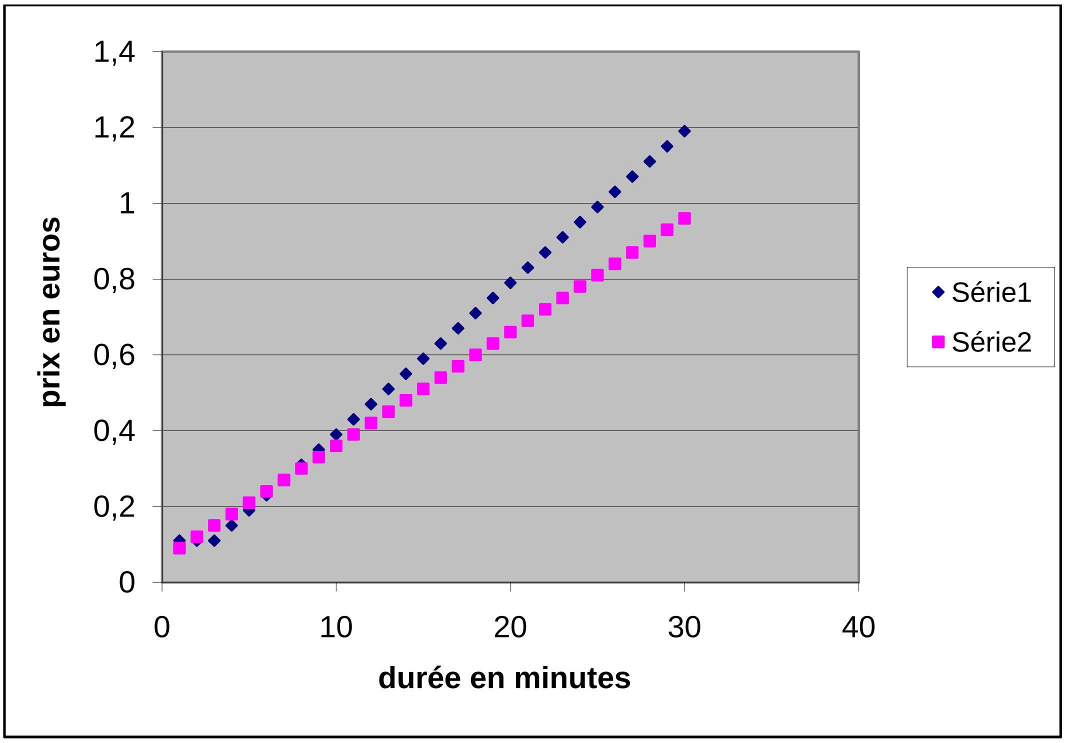
À l'aide d'un tableur, on commence le tableau suivant :

	A	B	C	D
1	Durée en minute(s)	Ancien prix	Nouveau prix	Evolution en %
2	1	0,11	0,09	
3	2	0,11	0,12	
4	3	0,11	0,15	
5	4			
6	5			
7	6			
8	7			

1. Compléter le tableau (pour la colonne D, on donnera les pourcentages à 0,1 près).
2. Quelle est la tarification la plus avantageuse pour 1, 2 et 3 minutes ?
3. Calculer le prix d'une communication d'une durée d'une heure selon les deux tarifications. Quelle est, pour cette durée, l'évolution du prix en pourcentage à 0,1 près ?
4. On souhaite, à l'aide du tableur, compléter le tableau afin d'obtenir les tarifs de minute en minute.
   Quelles formules faut-il inscrire dans les cellules B5, C5 et D2 avant d'étendre vers le bas ?

Partie II

Les graphiques donnant les prix des communications selon les deux tarifications sont donnés ci-dessous :



1. Laquelle des deux séries correspond à la nouvelle tarification ?
2. Déterminer, en fonction de l'entier naturel n strictement supérieur à 2, le prix d'une consommation de n minutes pour l'ancien tarif et pour le nouveau.
3. Comparer les deux tarifications pour n supérieur ou égal à 3, et commenter l'annonce faite par l'opérateur :

« **Nos prix baissent en décembre 2000** ».

EXERCICE 4

On note P le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note P* le plan P privé de l'origine O et **C*** l'ensemble des nombres complexes non nuls. À tout point M du plan P de coordonnées (x, y), on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}\, y$.

On note f l'application de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C}^*$ qui à tout nombre complexe z associe le complexe z' défini par $z' = f\left(z\right) = \dfrac{\mathrm{k}}{\overline{z}}$, où k est un nombre réel non nul.

On note I l'application de P* dans P* qui à tout point M d'affixe z associe le point M' = I (M) d'affixe $z' = f\left(z\right) = \dfrac{\mathrm{k}}{\overline{z}}$.

L'application I est appelée inversion de centre O et de puissance k.

Un cercle (ou une droite) passant par le point O, mais privé(e) du point O, sera par la suite également dénommé(e) cercle (respectivement droite).

I. Quelques généralités.

1. Exprimer la longueur OM' en fonction de la longueur OM.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés et que le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ est égal à k.
3. Déterminer, en fonction du nombre réel non nul k, la nature de l'ensemble des points M de P* invariants par l'application I.
4. Vérifier que l'inversion I est involutive, c'est-à-dire que $I \circ I = Id$, où Id est l'application identité du plan.
5. Déterminer l'image par l'application I du cercle de centre O et de rayon $r > 0$.

II. Image par l'inversion *I* d'un cercle passant par le point O.

Soit C un cercle de centre Ω (d'affixe $\omega \neq 0$) et de rayon $r > 0$, passant par le point O.

On note H le point du cercle C diamétralement opposé au point O.

On note H' l'image du point H par l'inversion I et on note D la droite passant par le point H' orthogonale à la droite (OH).

Soit M un point du cercle C différent du point O et du point H.

Soit N le point d'intersection des droites (OM) et D.

1. On suppose $\mathrm{k} < 0$.
   a. Cas particulier.
      Faire une figure faisant apparaître le cercle C, les points H, H', M, N ainsi que la droite D, dans le cas particulier où $\omega = 4 + 3\mathrm{i}$ et $\mathrm{k} = -30$.
   b. Cas général avec $\mathrm{k} < 0$.
      i. Justifier que les triangles OMH et OH'N sont semblables.

ii. En déduire que le point N est l'image du point M par l'inversion *I*.

iii. Quelle est l'image du cercle *C* par l'inversion *I* ?

2. On suppose k > 0. Quelle est la nature de l'image du cercle *C* par l'inversion *I* ?

III. Image par l'inversion *I* d'un cercle ne passant pas par le point O.

Soit *C* un cercle de centre Ω (d'affixe ω) et de rayon $r > 0$, ne passant pas par le point O.

Soient M un point de P^* d'affixe z et M' son image par l'inversion *I*. On note z' l'affixe du point M'.

1. Démontrer que $\mathrm{M} \in C \Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - \omega\bar{\omega}$.

2. En déduire que l'image du cercle *C* par l'inversion *I* est un cercle *C'* ne passant pas par le point O.

Justifier que le cercle *C'* est aussi l'image du cercle *C* par une homothétie de centre O.

EXERCICE 5

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-2} près.
Une entreprise fabrique des plaquettes dont la longueur et la largeur sont mesurées en mm.

– Partie A –

Sur un échantillon de 100 plaquettes, on a mesuré la longueur de chaque plaquette et obtenu le tableau suivant :

longueur	[35 ,37[	[37,39[	[39,41[	[41,43[	[43,45[
effectif	3	25	50	20	2

1) On veut calculer une valeur approchée de la moyenne m et de l'écart type s de l'échantillon. Pour cela, on fait comme si toutes les observations d'une classe étaient situées au centre de la classe. Calculer m et s. Compte tenu de l'erreur de méthode induite par l'approximation précédente, les résultats seront donnés à 10^{-1} près.

2) On suppose que la variable aléatoire L qui à chaque plaquette associe sa longueur suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type 1,6.

a) Donner une estimation ponctuelle de μ.

b) Déterminer un intervalle de confiance à 95% de μ centré sur la valeur obtenue précédemment.

– Partie B –

On suppose dans cette partie que L suit une loi normale de moyenne 40 et d'écart type 1,6 et que la largeur ℓ suit une loi normale de moyenne 25 et d'écart type 1,2.

1) On tire une plaquette au hasard dans la production.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une longueur comprise entre 37 et 43 mm ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une largeur comprise entre 22 et 28 mm ?

2) Une plaquette est acceptée si sa longueur est comprise entre 37 et 43 mm et sa largeur est comprise entre 22 et 28 mm. En admettant que L et ℓ sont des variables aléatoires indépendantes, quelle est la probabilité d'obtenir une plaquette qui soit acceptée ?

– Partie C –

La probabilité d'obtenir une plaquette qui soit rejetée est égale à 0,07.
On appelle X la variable aléatoire qui à un lot de 100 plaquettes extraites de la fabrication associe le nombre de plaquettes rejetées contenues dans ce lot.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres et son espérance mathématique.
2) En admettant que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson, préciser son paramètre.

Quelle est alors la probabilité d'obtenir strictement moins de 10 plaquettes rejetées dans un lot de 100 plaquettes ?

EXERCICE 6

L'objet de cet exercice est d'établir la formule de Stirling qui donne un ordre de grandeur de n ! lorsque n tend vers $+\infty$. Cette formule apparait pour la première fois dans les *Miscellanea Analytica* de Abraham de Moivre en 1730. James Stirling a signalé à De Moivre quelques erreurs dans sa table des logarithmes des factorielles mais il a surtout amélioré la formule qui porte aujourd'hui son nom, pourtant due à De Moivre.

On rappelle que si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels non nuls, on dit que u_n est équivalent à v_n lorsque n tend vers $+\infty$ si le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie A

Cette partie porte sur l'étude des intégrales de Wallis.

Soit I_n l'intégrale définie, pour tout nombre entier naturel n, par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx .$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $I_n \geq 0$ et $I_{n+1} \leq I_n$.
3. Établir la relation de récurrence suivante valable pour tout nombre entier naturel $n > 1$:

   $$n\, I_n = (n-1)\, I_{n-2} .$$

   On pourra utiliser une intégration par parties.
4. Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
5. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul :

   $$\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1 .$$

6. En déduire que I_n, I_{n-1} et $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

Partie B *Cette partie porte sur l'étude d'une fonction.*

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \text{ si } x\neq 0, \\ f(0)=1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. Prouver que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,1[$:

$$2x+\frac{2x^3}{3} \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On admettra pour la suite de l'exercice que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,1[$:

$$2x+\frac{2x^3}{3} \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leq 2x+\frac{2x^3}{3(1-x^2)}.$$

Partie C

Cette partie permet d'aboutir à la formule de Stirling.

On considère la suite de nombres réels de terme général u_n définie pour tout nombre entier naturel n non nul par :

$$u_n = n!\,\mathrm{e}^n\, n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

1. Montrer que, si on pose $p=\dfrac{1}{2n+1}$, on obtient : $\ln\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = f(p)-1$.
2. En déduire que pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} \leq \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{12n(n+1)},$$

puis que :

$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leq \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{12n(n+1)}.$$

3. Soient les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies pour tout nombre entier naturel n non nul par :

$$v_n = \ln(u_n)-\frac{1}{12n} \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln(u_n)-\frac{1}{12(n+1)}.$$

Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

On notera ℓ leur limite commune lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Justifier que n ! est équivalent à $e^{\ell}e^{-n}n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. En déduire que $e^{\ell} = \sqrt{2\pi}$. On pourra utiliser les questions 6 et 7 de la partie A.

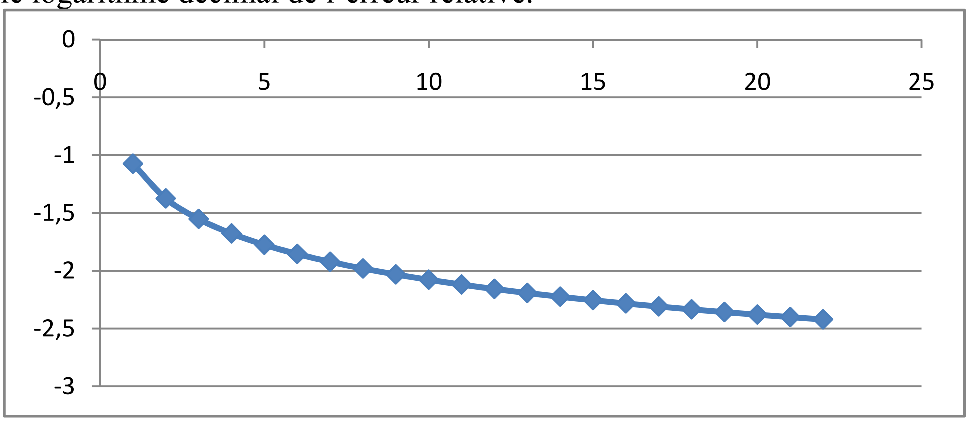
Partie D

On a obtenu dans la partie précédente l'équivalent suivant $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ qui peut encore s'écrire $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n + \varepsilon(n)$ où $\varepsilon(n)$ désigne l'erreur absolue commise en approximant le nombre n ! par le nombre $S(n) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Le tableau ci-dessous, réalisé sur un tableur, permet de constater que si l'erreur absolue grandit avec l'entier n, l'erreur relative reste faible et a même tendance à décroître.

A	B	C	D	E	F	G	I
n	n!	S(n)	ε(n)=n!-S(n)	ε(n)/n!	ε(n)/S(n)	h(n)=S(n)/ε(n)	h(n)-h(n-1)
1	1	0,92213701	7,79E-02	7,79E-02	8,44E-02	11,84307	
2	2	1,91900435	8,10E-02	4,05E-02	4,22E-02	23,69268	11,84961
3	6	5,83620959	1,64E-01	2,73E-02	2,81E-02	35,63218	11,93950
4	24	23,5061751	4,94E-01	2,06E-02	2,10E-02	47,60023	11,96804
5	120	118,019168	1,98E+00	1,65E-02	1,68E-02	59,58060	11,98038
6	720	710,078185	9,92E+00	1,38E-02	1,40E-02	71,56737	11,98676
7	5040	4980,39583	5,96E+01	1,18E-02	1,20E-02	83,55784	11,99048
8	40320	39902,3955	4,18E+02	1,04E-02	1,05E-02	95,55067	11,99283
9	362880	359536,873	3,34E+03	9,21E-03	9,30E-03	107,54508	11,99441
10	3628800	3598695,62	3,01E+04	8,30E-03	8,37E-03	119,54059	11,99552
11	39916800	39615625,1	3,01E+05	7,55E-03	7,60E-03	131,53692	11,99633
12	479001600	475687486	3,31E+06	6,92E-03	6,97E-03	143,53385	11,99693
13	6227020800	6187239475	3,98E+07	6,39E-03	6,43E-03	155,53126	11,99740
14	87178291200	8,6661E+10	5,17E+08	5,93E-03	5,97E-03	167,52903	11,99777
15	1,30767E+12	1,3004E+12	7,24E+09	5,54E-03	5,57E-03	179,52710	11,99807

En colonne F, l'erreur relative $\frac{\varepsilon(n)}{S(n)}$ décroît avec l'entier n.

1. On suppose dans cette question que l'erreur relative est de la forme $\frac{\varepsilon(n)}{S(n)} = a\ b^n$ où a et b sont deux réels. On réalise à l'aide du tableur le graphique ci-dessous où est représenté en ordonnée le logarithme décimal de l'erreur relative.



Que peut-on en déduire quant à l'hypothèse faite sur l'erreur relative ? Aurait-on pu mettre en évidence ce résultat par la représentation graphique d'une autre suite ? Préciser laquelle dans ce cas.

2. Quelle hypothèse raisonnable vous inspire la dernière colonne H du tableau donné ci-dessus ? Proposer alors une formule acceptable donnant la valeur de l'erreur relative en fonction de l'entier n.

EXERCICE 7

Préciser, en argumentant la réponse, si chacune des propositions ci-dessous est vraie ou si elle est fausse.

Proposition 1

Soit a un nombre réel strictement positif.

Soit f une fonction impaire et continue sur l'intervalle $[-a\ ;\ a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Proposition 2

Soit la fonction f définie, pour tout nombre réel x différent de 1, par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

La courbe C_f est symétrique par rapport au point Ω de coordonnées $(1\ ;\ 1)$.

Proposition 3

Si une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors cette suite est croissante.

Proposition 4

Si l'écriture décimale d'un entier naturel n se termine par 5, alors celle de n^2 se termine par 25.

Proposition 5

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace affine E. Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe trois réels α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et tels que M soit le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\alpha), (B, \beta), (C,\gamma)\}$.

EXERCICE 8

Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du XIII[e] *siècle, rapporte dans son ouvrage* Flos, *publié en* 1225, *un problème que lui a soumis Jean de Palerme. Il s'agit de résoudre l'équation du troisième degré :* $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.
L'exercice ci-dessous explore diverses méthodes de résolution de cette équation.

Soit f la fonction de la variable réelle x, définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.
On note f' et f'' respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction f, et C_f sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note (E) l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

Partie I : Détermination d'un encadrement de la solution réelle positive de (E).

1. a) Étudier les variations de la fonction f.

   b) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle positive unique que l'on notera a .

   c) Encadrer le nombre réel a par deux nombres entiers consécutifs. On peut donc affirmer que a n'est pas un nombre entier.

2. Expliciter une méthode permettant d'obtenir un encadrement du nombre réel *a,* d'amplitude 10^{-2}.

Partie II. Détermination d'une valeur approchée de a, solution réelle positive de (E), par la méthode dite de Newton.

Soit $x_0 = 2$ et A_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. On note (T_0) la tangente à la courbe C_f en A_0. On désigne par x_1 l'abscisse de M_1, point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses. On réitère la même opération en considérant x_1 au lieu de x_0 : on définit ainsi un réel x_2, puis de proche en proche une suite réelle $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$.

1. Pour tout nombre entier $n > 0$, déterminer x_n en fonction de x_{n-1}.
2. Donner, sans justification, une valeur approchée à 10^{-3} près de x_i , pour $i = 1, 2, 3, 4$ (on pourra s'aider d'une calculatrice).
3. Soit h la fonction définie, pour x appartenant à l'intervalle [1, 2], par $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

   On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur le même intervalle.

   a) Calculer $h'(x)$.

   b) Montrer que, sur l'intervalle [1, 2], les fonctions f, f', f'' sont strictement croissantes.
   En déduire que pour tout x de l'intervalle [1, 2] : $|h'(x)| \leq \left(\dfrac{16}{17}\right)^2$.

   c) En déduire que pour tout x de l'intervalle [1, 2] :

   $$0 \leq |h(x) - h(a)| \leq \left(\frac{16}{17}\right)^2 |x - a| .$$
4. Montrer que la suite (x_n) converge vers a.
5. Trouver un nombre entier n_0 tel que pour tout nombre entier $n \geq n_0$ on ait $|x_n - a| \leq 10^{-3}$.

Partie III. Détermination de la valeur exacte de a, solution réelle positive de (E), par la méthode de Cardan.

1. On pose $x = \mathrm{X} + h$. Déterminer les nombres rationnels h, p, q tels que l'équation (E) s'écrive sous la forme $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0$. On note (E') cette nouvelle équation.
2. a) On note A l'unique solution réelle de l'équation (E'). Montrer l'existence de deux nombres réels u et v tels que $\mathrm{A} = u + v$ et $3uv = -p$.

   b) On note $\mathrm{U} = u^3$ et $\mathrm{V} = v^3$. Montrer que, dans ces conditions, U et V sont les solutions de l'équation $\mathrm{Y}^2 + q\mathrm{Y} - \dfrac{p^3}{27} = 0$.
3. Établir la formule de Cardan :

   $$\mathrm{A} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} .$$
4. En déduire *a.*

EXERCICE 9

Pendant plusieurs siècles, on a utilisé et enseigné la règle de fausse position. L'encadré ci-dessous propose un extrait d'un ouvrage édité en 1784, consultable aujourd'hui sur le site de la Bibliothèque Nationale de France, expliquant cette règle.

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Institut de Bologne; Professeur de Mathématiques au Collège Mazarin.*

265. *La regle de fauſſe poſition* ſert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre ſuppoſé. Soit propoſé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart & le cinquieme faſſent 456.

Je ſuppoſe que ce nombre eſt 20. Mais il eſt clair que la moitié, le quart & le cinquieme de 20 ne font que 19. Ma ſuppoſition eſt donc fauſſe. Elle n'en ſervira pas moins cependant à me faire connoître le nombre demandé. Car puiſque deux quantités ſont toujours entre elles comme leurs parties ſemblables (242), on peut les regarder l'une comme la ſomme des antécédents d'une ſuite de termes proportionels, l'autre comme la ſomme des conſéquents. Or ces deux ſommes ſont entre elles (241), comme un nombre quelconque d'antécédents eſt au même nombre de conſéquents, & réciproquement ; donc la moitié plus le quart, plus le cinquieme de 20, ſont à la moitié, plus au quart, plus au cinquieme du nombre que je cherche, comme le nombre 20 lui-même eſt au nombre cherché. J'ai donc, $19 : 456 :: 20 : x = 480$.

Retranscription du texte original en utilisant la typographie actuelle :

Proposition 265. La règle de fausse position sert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre supposé. Soit proposé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456.
Je suppose que ce nombre est 20. Mais il est clair que la moitié, le quart et le cinquième de 20 ne font que 19. Ma supposition est donc fausse. Elle n'en servira pas moins cependant à me faire connaître le nombre demandé. Car puisque deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables (Proposition 242), on peut les regarder l'une comme la somme des antécédents d'une suite de termes proportionnels, l'autre comme la somme des conséquents. Or ces deux sommes sont entre elles (Proposition 241), comme un nombre quelconque d'antécédents est au même nombre de conséquents et réciproquement ; donc la moitié plus le quart, plus le cinquième de 20 sont à la moitié plus le quart, plus au cinquième du nombre que je cherche, comme le nombre 20 est lui même au nombre cherché. J'ai donc

$$\frac{19}{456} = \frac{20}{x} \quad \text{et donc} \quad x = 480.$$

1) Résoudre le problème posé : « trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456 ».
2) Le nombre 20 a-t-il été choisi au hasard ? Le résultat trouvé dépend-il de ce choix ?
3) L'auteur fait référence à deux propriétés établies auparavant (numérotées 242 et 241). La première citée (242) :« Deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables » peut se traduire aujourd'hui par l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$. Quelle propriété des tableaux de proportionnalité peut traduire la seconde ?
4) En appliquant cette méthode, trouver la solution du problème posé par Fancès Pellos gentilhomme niçois de la fin du XVe siècle : « Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long ? ».

EXERCICE 10

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, on considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$z'=\frac{5}{2}z+\left(\frac{3}{2}+2i\right)\bar{z}+2i$. On désigne par A, B, C les points d'affixes $z_A=1$, $z_B=-1+2i$, $z_C=-1-i$.

1° a) Placer les points A, B et C sur une figure.

b) Donner les affixes des points A', B', C' images respectives des points de A, B, C par f. Placer ces points sur la figure.

c) Montrer que les points A', B', C' sont alignés. On note Δ la droite (A'B').

2° Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega=-\frac{1}{2}i$ et de rapport 5.

a) Donner l'écriture complexe de h.
b) Caractériser h^{-1} et donner son écriture complexe.
c) Déterminer les affixes des points A_1, B_1 et C_1 images respectives des points A', B', C' par h^{-1} et compléter la figure.
d) On note D l'image de la droite Δ par h^{-1}, vérifier que D est la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ d'affixe 2 + i.

3° On désigne par p l'application $p=h^{-1}\circ f$.

a) Vérifier que l'écriture complexe de p est : $z'=\frac{1}{2}z+\left(\frac{3}{10}+\frac{2}{5}i\right)\bar{z}$.
b) Montrer que p est un projecteur c'est à dire que $p\circ p=p$.
c) Pour tout point M du plan complexe $\mathcal{P}$ on note $M_1=h^{-1}(M')=p(M)$ et z_1 l'affixe de M_1.

Montrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\frac{z_1}{2+i}$ est un nombre réel.

Montrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\frac{z-z_1}{2+i}$ est un nombre imaginaire pur.

d) Caractériser la projection p.
e) En déduire une construction de l'image M' par f pour un point quelconque M de $\mathcal{P}$.

EXERCICE 11

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.
Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir et à donner à 10^{-2} près.

– Partie A – loi normale –

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle [89,6; 90,4].

1. On note X1 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre. On suppose que X1 suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart type $\sigma=0{,}17$. Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.
2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles. On note D la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart type σ_1. Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme en terme de diamètre soit égale à 0,99.

– Partie B – Loi binomiale –

On note E l'événement : une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux. On suppose que la probabilité de l'événement E vaut p (E) = 0,02.
On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.
On considère la variable aléatoire Y1 qui à tout prélèvement de quatre rondelles associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire Y1 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3} près.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3} près.

– Partie C – Approximation d'une loi binomiale par une loi normale –

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000. On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.
On considère la variable aléatoire Y2 qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.
On admet que la variable aléatoire Y2 suit la loi binomiale de paramètres n = 1 000 et p = 0,02.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y2 par la loi normale de moyenne 20 et d'écart type 4,43.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart type 4, 43.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles, c'est-à-dire calculer $p(Z \leq 15,5)$.

– Partie D – Test d'hypothèse –

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en millimètres, de rondelles constituant une livraison à effectuer.
On note X2 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre.
La variable aléatoire X2 suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,17$.
On désigne par $\overline{X2}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 rondelles prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces rondelles (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est H0: $\mu = 90$. Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.
L'hypothèse alternative est H1: $\mu \neq 90$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle H0, le résultat suivant qui n'a pas à être démontré :
$$p\left(89,967 \leq \overline{X2} \leq 90,033\right) = 0,95$$
2. On prélève un échantillon de 100 rondelles dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\overline{x} = 90,02$. Peut-on, au seuil de 5%, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?

EXERCICE 12

Soient O, A et B trois points distincts du plan. On note G le barycentre du système de points pondérés $\{(A;1-t);(O;t)\}$, H le barycentre du système de points pondérés $\{(O;1-t);(B;t)\}$ et M le barycentre du système de points pondérés $\{(G;1-t);(H;t)\}$ où t est un réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. On se place dans les parties I, II, III et V dans un repère orthonormé $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$. On note $(x_O;y_O)$, $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ les coordonnées respectives des points O, A et B dans le repère $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.

Partie I : construction de quelques points.

On suppose que $A(-1;2)$; $O(1;3)$ et $B(3;-5)$. Représenter les points O,A et B ainsi que les points G, H et M correspondants aux deux valeurs suivantes de t : t = 0,5 et t = 0,33.

Partie II : quelques généralités.

On se place ici dans le cas général décrit avant la partie I.

1) Démontrer que si les points O, A et B sont alignés, alors le point M appartient à la droite (AB) lorsque t varie dans l'intervalle $[0;1]$.
2) On suppose que O, A et B ne sont pas alignés. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega G}$ et de $\overrightarrow{\Omega H}$ puis en fonction de $\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega O}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$.
3) On note $(x;y)$ les coordonnées de M dans $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$. Déterminer l'expression des coordonnées de M en fonction des coordonnées des points O, A, B et de t.

Partie III : tracé d'une courbe.

On reprend les données de la partie I.

1) Déterminer les coordonnées $(x;y)$ de M dans le repère $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ en fonction de t.
2) Étudier les fonctions x et y de la variable t, pour $t \in [0;1]$ et tracer la courbe représentative de la courbe paramétrée de représentation paramétrique $x(t)$ et $y(t)$.
3) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont tangents à la courbe respectivement en *A* et *B*.

Partie IV : nature de la courbe.

On se place ici dans le cas général décrit avant la partie I. On suppose de plus que O, A et B ne sont pas alignés. On veut démontrer que l'ensemble des points M obtenu dans la partie II est un arc de parabole lorsque t varie dans l'intervalle $[0;1]$. On admettra que dans un repère non nécessairement orthogonal, $x = ay^2 + by + c$, où a, b et c sont trois réels donnés et $a \neq 0$, est l'équation cartésienne d'une parabole.

1) Expliquer pourquoi $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ est un repère du plan.
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ puis des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

3) Démontrer que les coordonnées $(x;y)$ de M dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ sont :

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = (1-t)^2 \end{cases}.$$

On appelle C la courbe paramétrique définie par l'ensemble des points $M(x;y)$.

4) Démontrer que si a et b sont deux réels tels que $0 \le a \le 1$ et $0 \le b \le 1$, alors $0 \le \dfrac{a-b+1}{2} \le 1$.

5) Démontrer que les coordonnées $(x;y)$ dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ d'un point M de C vérifient : $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$

6) On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$. Expliquer pourquoi $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ est un repère du plan.

7) On note $(X;Y)$ les coordonnées de M dans le repère $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. Déterminer $(x;y)$ en fonction de $(X;Y)$.

8) En déduire l'équation cartésienne de C dans le repère $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ et la nature de C.

Partie V : Généralisation.

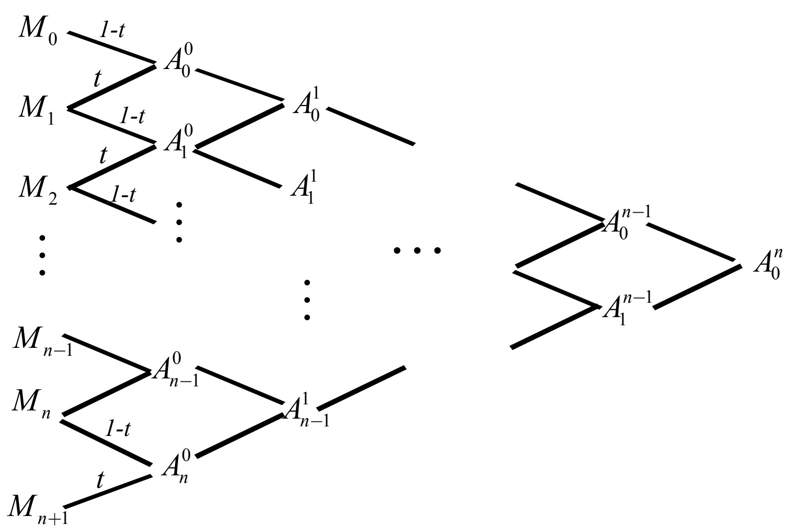
n étant un entier naturel, on note $M_0, M_1, \cdots, M_{n+1}$, $n+2$ points du plan.

Pour tout entier i tel que $0 \le i \le n$, on définit le point A_i^0 comme barycentre du système de points pondérés $\left\{(M_i;1-t);(M_{i+1};t)\right\}$.

Pour tout entier i et k tels que $1 \le k \le n$ et $0 \le i \le n-k$, on définit A_i^k comme barycentre du système de points pondérés $\left\{\left(A_i^{k-1};1-t\right);\left(A_{i+1}^{k-1};t\right)\right\}$.

On modélise cette situation à l'aide d'un arbre pondéré ci dessous, dans lequel :

- Tout point de l'arbre est barycentre des deux points se trouvant sur sa gauche et qui lui sont reliés.
- Les coefficients barycentriques ont pour valeur $1-t$ pour les branches descendantes et t pour les branches montantes.



1) Pour $n=2$, montrer qu'on retrouve la situation décrite au début de cet exercice.

2) On appelle polynôme de Bernstein, les polynômes définis par

$$B_{n,k}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} ,$$

où t est un réel et n,k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

a) Exprimer $B_{n,k}(t)$ pour tout $n = 0,1,2$ et $k = 0,1,2$.

b) Démontrer que, pour tout réel t, pour tous entiers naturels n et k tels que $k \leq n$, on a l'égalité :

$$tB_{n,k-1}(t) + (1-t)B_{n,k}(t) = B_{n+1,k}(t) .$$

c) Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) = 1$.

d) Démontrer par récurrence sur l'entier n que dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

$$\overrightarrow{OA_0^n} = \sum_{k=0}^{k=n+1} B_{n+1,k}(t)\overrightarrow{OM_k}$$

Quelle interprétation peut-on donner à cette formule ?

EXERCICE 13

On note **R** l'ensemble des nombres réels et **C** l'ensemble des nombres complexes.
Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou est fausse, et justifier la réponse.

1. Soient *f* une fonction définie sur un intervalle I $\subset$ **R**, et *g* une fonction définie sur *f* (I). Les fonctions *f* et *g* ne sont pas nécessairement dérivables. Si *f* est décroissante sur I et si *g* est décroissante sur *f* (I), alors $g \circ f$ est croissante sur I.

2. Si x est un nombre réel irrationnel, alors pour tout nombre entier naturel non nul n le réel x^n est irrationnel.

3. Soit (E) l'équation différentielle : $y''+9y=0$. La seule solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0)=0$ est la fonction nulle.

4. Pour tout nombre entier naturel n on a l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.

5. Soit *f* une fonction définie sur **R** à valeurs dans **R**. Si *f* est périodique et monotone sur **R**, alors *f* est constante.

6. Toute suite réelle strictement croissante tend vers $+\infty$.

7. Soient **E** un **R** espace vectoriel, et $(u_1, u_2,\ldots, u_n)$ une base de **E**. Pour tout vecteur non nul v de **E**, la famille $(u_1, u_2,\ldots, u_n, v)$ est encore une base de E.

8. Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormal, deux droites non parallèles aux axes du repère sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à (-1) .

EXERCICE 14

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré trois fois de suite dont les faces sont numérotées de 1 à 6 de telle sorte que :

- Si la face « 4 » apparaît trois fois, le gain du joueur est 3€ ;
- Si la face « 4 » apparaît deux fois, le gain du joueur est 2€ ;
- Si la face « 4 » apparaît une fois, le gain du joueur est 1€ ;
- Si la face « 4 » n'apparaît aucune fois, le joueur perd 1€.

1. Simulation de l'expérience

On simule à l'aide d'un tableur cette expérience pour des échantillons de taille 100, puis 1000 et 10000.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1er lancer	2è lancer	3è lancer	Nombre de 4	Gain		Moyenne des gains (100 parties)
2	1	4	5	1	1		0.02
3	3	1	4	1	1		
4	5	5	2	0	-1		Moyenne des gains (1000 parties)
5	6	3	2	0	-1		-0,03
6	3	3	4	1	1		
7	1	2	5	0	-1		Moyenne des gains (10000 parties)
8	6	4	4	2	2		-0,07
9	5	5	4	1	1		
10	4	2	2	1	1		
11	2	1	6	0	-1		

a. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule A2 pour obtenir un chiffre au hasard compris entre 1 et 6 ?
b. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule D2 pour comptabiliser le nombre de 4 obtenu lors des trois lancers ?
c. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule E2 pour trouver le gain à l'issue de la partie ?

On a calculé la moyenne des gains des 100 premières parties en G2, des 1000 parties en G5 et des 10000 parties en G8.

2. Modélisation de l'expérience

Une issue de l'expérience est une suite formée des trois numéros obtenus, par exemple : 163, 424, 512, 554,… On choisit la loi équirépartie sur l'ensemble des issues.

a. Combien l'expérience comporte-t-elle d'issues ?
b. La seule issue 444 conduit à un gain de 3€. Expliquer pourquoi 15 issues conduisent à un gain de 2€ et 75 issues conduisent à un gain de 1€.
c. On note X la variable aléatoire qui donne le gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance.

3. Comparaison des résultats

Comparer les résultats obtenus dans les questions 1 et 2.

EXERCICE 15

Le but de cet exercice est l'étude de quelques propriétés géométriques des quadrangles harmoniques.

On note **C** l'ensemble des nombres complexes.
Dans tout l'exercice le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie I

Soient les points A, B, C, D d'affixes respectives $a = -2 + 2i$; $b = -2i$; $c = -2$; $d = 2 + 4i$.
Soient les nombres complexes Z_1 et Z_2 tels que $Z_1 = \dfrac{b-a}{d-a}$ et $Z_2 = \dfrac{b-c}{d-c}$.

1. Faire une figure et placer les points A, B, C et D.
2. Écrire Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
3. En déduire la nature des triangles BAD et BCD.
4. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Partie II

Soient quatre points quelconques A, B, C, D distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b, c et d. On appelle birapport des quatre points A, B, C, D, rangés dans cet ordre, le quotient, noté $[A, B, C, D]$:

$$[A, B, C, D] = \frac{\left(\dfrac{c-a}{c-b}\right)}{\left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)}.$$

1. On dit que des points sont cocycliques s'ils se situent sur un même cercle. On rappelle ici que quatre points distincts A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, ces points vérifient l'égalité suivante entre angles : $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)[\pi]$.

   Montrer que le birapport $[A, B, C, D]$ est un nombre réel si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.
2. Montrer que la relation $[A, B, C, D] = -1$ est équivalente à chacune des relations suivantes :

$$(1) \qquad 2(ab + cd) = (a + b)(c + d)\ ;$$

$$(2) \qquad \left(c - \frac{a+b}{2}\right)\left(d - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Dans la suite du problème, on appelle quadrangle harmonique la figure formée par quatre points A, B, C, D distincts deux à deux, non alignés tels que le birapport [A, B, C, D] soit égal à -1.

3. Montrer que le quadrangle A, B, C, D de la partie I est harmonique.
4. Soit A, B, C et D formant un quadrangle harmonique. On note I le milieu du segment $[AB]$. En utilisant les résultats de la question 2. ci dessus, montrer que la droite (AB) est la bissectrice de l'angle des demi-droites $[IC)$ et $[ID)$, et que l'on a :

$$IC \times ID = \frac{AB^2}{4}.$$

EXERCICE 16

Trois amis, Émilie, Pascal et Nicolas ont créé chacun leur société. Ils désirent comparer l'évolution de leur chiffre d'affaires à partir de l'année 2000 et faire quelques prévisions. Pour cela, ils cherchent un modèle conforme aux chiffres des années précédentes.

Dans l'exercice, n représente le nombre d'années écoulées depuis 2000.

1°) Société d'Émilie :

En 2000, son chiffre d'affaire est de 125 milliers d'euros, puis augmente de 15 milliers d'euros chaque année. On appelle U_n le montant du chiffre d'affaire en milliers d'euros après n années écoulées.

a) Préciser U_0 , U_1 et U_2.

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

c) Préciser la nature de la suite (U_n) puis exprimer U_n en fonction de n.

d) Déterminer le taux d'évolution du chiffre d'affaire de la société d'Émilie entre l'année 2000 et l'année 2005.

2°) Société de Pascal :

En 2000, son chiffre d'affaire est de 380 milliers d'euros. Ensuite, celui-ci baisse de 5 % chaque année.

On appelle V_n le montant, après n années écoulées, de son chiffre d'affaire exprimé en milliers d'euros.

a) Préciser V_0 , V_1 et V_2.

b) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.

c) Préciser la nature de la suite (V_n) puis exprimer V_n en fonction de n.

d) Déterminer le taux d'évolution du chiffre d'affaire de la société de Pascal entre l'année 2000 et l'année 2005. (arrondir à 0,1 % près)

3°) Société de Nicolas :

On appelle W_n le montant du chiffre d'affaire en milliers d'euros de son entreprise après n années écoulées. Il suit la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = 120 \ln(n+10)$.

a) Déterminer le chiffre d'affaire de l'entreprise de Nicolas en 2000, en 2005 ? (arrondir à 10^{-3} près).

b) Déterminer l'année à partir de laquelle le chiffre d'affaire de l'entreprise de Nicolas dépasse 360000 €.

4°) Comparaison des chiffres d'affaires :

On donne en annexe un extrait de feuille de calcul résumant le montant du chiffre d'affaire de chaque entreprise en fonction de n. Si nécessaire, les valeurs ont été arrondies à un euro près.

a) Quelles formules doit-on écrire dans les cellules B3, C3 et D3 avant de recopier vers le bas ?

b) En utilisant ce tableau, à partir de quelle année le chiffre d'affaire U_n de la société d'Émilie semble-t-il être toujours supérieur à celui W_n de la société de Nicolas ? Proposer un raisonnement mathématique permettant de s'assurer qu'il en sera bien ainsi.

Annexe

	A	B	C	D
1	n	U_n	V_n	W_n
2	0	125	380.000	276.310
3	1	140	361.000	287.747
4	2	155	342.950	298.189
5	3	170	325.803	307.794
6	4	185	309.512	316.687
7	5	200	294.037	324.966
8	6	215	279.335	332.711
9	7	230	265.368	339.986
10	8	245	252.100	346.845
11	9	260	239.495	353.333
12	10	275	227.520	359.488
13	11	290	216.144	365.343
14	12	305	205.337	370.925
15	13	320	195.070	376.259
16	14	335	185.316	381.366
17	15	350	176.051	386.265
18	16	365	167.248	390.972
19	17	380	158.886	395.500
20	18	395	150.941	399.965
21	19	410	143.394	404.075
22	20	425	136.225	408.144
23	21	440	129.413	412.078

EXERCICE 17

Le but de cet exercice est l'étude d'une chaîne de transmissions aléatoires d'une information binaire.

Un émetteur E émet une information binaire (c'est-à-dire ne prenant que la valeur 0 ou la valeur 1). Un récepteur R reçoit cette information qui, pour des raisons non développées ici, peut être conforme ou non à l'information émise. Quelle que soit l'information émise par E (« 0 » ou « 1 »), la probabilité que l'information reçue par R soit conforme à l'information émise par E est égale à p ($0 < p < 1$) et la probabilité que l'information reçue par R soit non-conforme à l'information émise est égale à $(1-p)$.
Ainsi par exemple lorsque l'information émise par E est « 0 », la probabilité que l'information reçue par R soit « 0 » est égale à p et la probabilité que l'information reçue par R soit « 1 » est égale à $(1-p)$
.

Partie I

Dans cette partie, l'information binaire est transmise le long d'une chaîne de ($n+1$) éléments électroniques notés $E_0, E_1, ..., E_n$.
Chaque élément E_k est successivement récepteur, puis émetteur, excepté le premier élément E_0 qui est seulement émetteur et le dernier élément E_n qui est seulement récepteur. L'information émise par un émetteur-récepteur est toujours identique à celle reçue.
Pour tout nombre entier k compris entre 0 et (n-1), la transmission d'information de l'élément E_k à l'élément suivant E_{k+1} suit la loi définie en début d'exercice, c'est-à-dire que l'élément E_{k+1} reçoit correctement l'information binaire émise par E_k avec une probabilité égale à p ($0 < p < 1$), et reçoit l'information contraire avec la probabilité (1-p).
Par ailleurs, on a constaté que la qualité de la transmission d'un élément E_k à l'élément suivant E_{k+1} ne dépend pas de ce qui s'est passé lors des transmissions précédentes.
On note A_k ($1 \leq k \leq n$), l'événement « la valeur reçue par E_k est identique à celle émise par E_0 », et on désigne par p_k sa probabilité. On convient que $p_0 = 1$.

1. Étude du cas particulier n =2.
   a. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation dans le cas n = 2. On précisera sur ce schéma les différentes probabilités.
   b. Déterminer p_1 et p_2.
2. Étude du cas général.
   Démontrer que pour tout nombre entier k compris entre 0 et $(n-1)$ on a :
   $$p_{k+1} = (2p-1)p_k + 1 - p \cdot$$
3. On se propose de déterminer l'expression de p_n en fonction de n.
   a. Pour tout nombre entier naturel k inférieur ou égal à n, on pose : $u_k = p_k - \frac{1}{2}$.
      i. Montrer que les $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont les premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
      ii. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p.
   b. Démontrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   c. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Partie II

Dans cette partie, l'émetteur E_0 émet une information binaire transmise directement, sans passer par des intermédiaires, vers une famille de récepteurs. Dans la suite de l'exercice on supposera que cette famille est infinie, et on la notera $(R_i)_{i\in \mathbb{N}}$. Une partie de cette famille de récepteurs $(R_i)_{i\in \mathbb{N}}$ est « à l'écoute » , autrement dit est prête à recevoir l'information émise par E_0, conforme ou non.

On suppose que les transmissions entre l'émetteur E_0 et chacun des récepteurs « à l'écoute » dans la famille $(R_i)_{i\in \mathbb{N}}$ sont indépendantes les unes des autres et que la règle de transmission est la même que celle définie en début d'exercice, c'est-à-dire qu'un récepteur « à l'écoute » reçoit correctement l'information binaire émise par E_0 avec une probabilité égale à p ($0 < p < 1$), et reçoit l'information contraire avec la probabilité (1-p).

1. On considère que n récepteurs sont « à l'écoute ». Déterminer la probabilité que k d'entre eux exactement reçoivent correctement la valeur émise par E_0 (k étant un nombre entier compris entre 0 et n).
2. Le nombre de récepteurs « à l'écoute » est une variable aléatoire X. On admet que cette variable suit une loi de Poisson de paramètre λ, λ étant un nombre réel strictement positif donné. Pour tout entier naturel k on a donc :
$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\cdot$$
On appelle Y la variable aléatoire représentant le nombre de récepteurs de la famille (R_i) qui reçoivent la valeur émise par l'émetteur E_0.
   a. Décrire par une phrase l'événement ($Y = 0$).
   b. On appelle B_n l'événement : « n récepteurs exactement sont « à l'écoute » ».

      Démontrer que $P((Y=0)\cap B_n)=\dfrac{e^{-\lambda}(1-p)^n\lambda^n}{n!}\cdot$
   c. Justifier que l'on peut décrire l'événement ($Y = 0$) sous la forme suivante :

      $(Y=0)=\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\left[(Y=0)\cap B_n\right]\cdot$

      En déduire que $P\big((Y=0)\big)=e^{-\lambda p}$.

      (On rappelle que $\forall x\in \mathbf{R}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$).
   d. Pour tout nombre entier k naturel, déterminer $P(Y=k)$. En déduire que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

      Donner alors son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

EXERCICE 18

Le tableau ci-dessous présente les émissions de gaz à effet de serre dans l'Union Européenne en millions de tonnes d'équivalent CO2.
Dans la dernière colonne on a indiqué pour chaque pays les objectifs prévus dans le protocole de Kyoto de réduction d'émissions de gaz à effet de serre ou de hausse maximale autorisée.
Par exemple :
- l'Allemagne doit réduire ses émissions d'au minimum 21 % entre les années 1990 et 2010,
- l'Espagne peut les augmenter d'au maximum 15 % entre les années 1990 et 2010.
Certaines données ont été effacées et on se propose de retrouver certaines d'entre elles dans le QCM suivant.
Information : pour exprimer les émissions de gaz à effet de serre en tonnes d'équivalent CO2, on pondère les émissions de chaque gaz par un coefficient tenant compte de son pouvoir de réchauffement comparé à celui du CO2. Ce coefficient est de 1 pour le CO2, de 21 pour le CH4, de 310 pour le N2O, de 23 900 pour le SF6, de 140 à 11 700 pour les HFC et de 2 100 à 9 200 pour les PFC.

	Émissions en 1990	Émissions en 2001	Variation en pourcentage entre 1990 et 2001	Variation prévue en pourcentage entre 1990 et 2010
Allemagne	1216		-18, 3	-21
Autriche	78,4		9,6	-13
Belgique	141,3	150,2	6,3	-7, 5
Danemark	69,5	69,4	-0, 1	-21
Espagne	289,8	382,8	32,1	15
Finlande	77,3		4,7	
France	558,6		0,4	
Grèce		132,2	23,5	25
Irlande	53,4	70		13
Italie		545,4	7,1	-6, 5
Luxembourg		6,1	-44, 2	-28
Pays-Bas		219,7	4,1	-6
Portugal	61,4	83,8	36,5	27
Royaume Uni		657,2	-12	-12, 5
Suède		70,5	-3, 3	4
Ensemble de l'Union Européenne		4108,3	-2,3	-8

Source : Agence européenne pour l'environnement, 2003.

Partie A – QCM
Chaque question comporte trois affirmations repérées par les lettres a, b, c, dont une seule est correcte. Préciser la bonne réponse en justifiant celle-ci.

1. Pour l'ensemble de l'Union Européenne, la quantité de gaz à effet de serre émise entre 1990 et 2001 a été multipliée par
   a. 0,977
   b. 1,023
   c. 0,023

2. Les émissions de gaz à effet de serre en Autriche pour l'année 2001 représentaient à 0,1 million de tonnes d'équivalent CO2 près :
   a. 85,9 millions de tonnes d'équivalent CO2
   b. 153,7 millions de tonnes d'équivalent CO2
   c. 88 millions de tonnes d'équivalent CO2

3. La variation en pourcentage des émissions de gaz à effet de serre en Irlande entre 1990 et 2001 est égale à 0,1 % près à :
   a. 23,7 %
   b. 31,1 %
   c. 16,6 %

4. Les émissions de gaz à effet de serre au Luxembourg pour l'année 1990 représentaient à 0,1 million de tonnes d'équivalent CO2 près :
   a. 8,8 millions de tonnes d'équivalent CO2
   b. 13,8 millions de tonnes d'équivalent CO2
   c. 10,9 millions de tonnes d'équivalent CO2

Partie B

On désire connaître, pour certains pays n'ayant pas encore atteint en 2001 les objectifs fixés au protocole de Kyoto, le taux de diminution à appliquer aux émissions de gaz à effet de serre de 2001 pour atteindre les quantités prévues en 2010.
Le tableau figurant ci dessous est extrait d'une feuille de calcul d'un tableur.
Les émissions de gaz à effet de serre sont exprimées en millions de tonnes d'équivalent CO2.
Dans les colonnes D, F et G, les résultats sont arrondis au dixième. Le contenu de certaines cellules a été masqué.

1. a. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule F2 puis recopié vers le bas jusqu'à la cellule F6 ?
   b. Quelle formule contient la cellule F6 ?
   c. Compléter la colonne F du tableau ci-dessous. On donnera un résultat arrondi à 0,1 million de tonnes d'équivalent CO2.
2. a. La Belgique désire réaliser les objectifs fixés lors du protocole de Kyoto.
   Justifier qu'elle devra diminuer ses émissions de gaz à effet de serre entre 2001 et 2010 d'environ 13 %.
   b. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule G2 puis recopié vers le bas jusqu'à la cellule G6?
   c. Quel pays, figurant dans le tableau ci-dessous, devra réaliser entre 2001 et 2010 le plus fort taux de diminution de ses émissions pour répondre aux objectifs fixés lors du protocole de Kyoto ?

	A	B	C	D	E	F	G
1	Pays	Émissions en 1990	Émissions en 2001	Variation entre 1990 et 2001 (en %)	Variation prévue entre 1990 et 2010 (en %)	Émissions prévues en 2010	Variation prévue entre 2001 et 2010 (en %)
2	Belgique	141,3	150,2	6,3	-7,5		
3	Danemark	69,5	69,4	-0, 1	-21	54,9	-20, 9
4	Espagne	289,8	382,8	32,1	15	333,3	-12, 9
5	Italie	509,2	545,4	7,1	-6, 5		-12, 7
6	Portugal	61,4	83,8	36,5	27	78	-6, 9

EXERCICE 19

Dans un groupe d'assurances on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif.
Dans cet exercice, sauf mention du contraire, les résultats sont à arrondir à 10^{-3} près.

1. Étude du nombre de sinistres par véhicule
   Soit X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tiré au hasard dans un des parcs de la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'année considérée. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 0,28.
   a. Calculer la probabilité de l'événement A : « un véhicule tiré au hasard dans le parc n'a aucun sinistre pendant l'année considérée ».
   b. Calculer la probabilité de l'événement B : « un véhicule tiré au hasard dans le parc a, au plus, deux sinistres pendant l'année considérée ».

2. Étude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs.
   On note E l'événement : « un conducteur tiré au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée ». On suppose que la probabilité de l'événement E est 0,6.
   On tire au hasard 15 conducteurs dans l'effectif des conducteurs de l'entreprise. Cet effectif est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 15 conducteurs.
   On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 conducteurs, associe le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.
   a. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.
   b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 10 conducteurs n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée.

3. Étude du coût des sinistres
   Dans ce qui suit, on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus dans l'entreprise pendant l'année considérée. On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros. On suppose que C suit la loi normale de moyenne 1 200 et d'écart type 200.
   Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1 000 euros et 1 500 euros.

4. On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.
   a. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
   b. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard et avec remise dans ce parc, associe le pourcentage de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service. On suppose que F suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}\right)$
      où p est le pourcentage inconnu de véhicules du parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service. Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95%.
   c. On considère l'affirmation suivante : « le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question b) ». Est-elle vraie ?

5. Pour un parc de véhicules, on a relevé le nombre de sinistres par véhicule pendant la première année de mise en service. Pour les véhicules ayant eu, au plus, quatre sinistres, on a obtenu :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
Effectif :n_i	1345	508	228	78	35

a. On pose $y_i = \ln x_i$. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme y = ax + b où a et b sont à arrondir à 10^{-2} près.
b. À l'aide de l'équation précédente, estimer le nombre de véhicules ayant eu six sinistres pendant leur première année de mise en circulation.

EXERCICE 20

Partie A : Calcul des puissances successives d'une matrice.

On note $B_c = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de l'espace vectoriel R^3. On a donc :

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$$

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme f de R^3 dont la matrice dans la base B_c est A.

1. On considère les vecteurs suivants de R^3: $\overrightarrow{u_1} = (1,-2,1), \overrightarrow{u_2} = (1,4,1), \overrightarrow{u_3} = (1,0,-1)$.

   Vérifier que la famille $B_n = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ est une base de l'espace vectoriel R^3.

   Q est ainsi la matrice de passage de la base B_c à la base B_n.
2. Calculer Q^2 et Q^3 et vérifier que Q^3 est combinaison linéaire de I_3 et de Q_2.
3. En déduire que la matrice Q est inversible, puis déterminer son inverse Q^{-1}.
4. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ sont des vecteurs propres de l'application f.

   En déduire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base B_n.
5. Rappeler le lien entre les matrices A', A et Q.
6. En déduire, pour tout nombre entier naturel n non nul, l'expression de la matrice A^n en fonction de A, Q et n.

Pour la suite de l'exercice, on admettra que, pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$A^n = \frac{2^n}{6} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \\ 2^{n+2} - 4(-1)^n & 2^{n+2} + 2(-1)^n & 2^{n+2} - 4(-1)^n \\ 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Partie B : Étude de la loi d'une variable aléatoire.
Dans un jeu, un pion se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle, notés S_1,S_2,S_3, selon la règle suivante :

- À l'instant 0, le pion se situe au sommet S_1.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_1, alors à l'instant n + 1 il sera au sommet S_2.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_2, alors à l'instant n + 1 il sera au sommet S_1 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, au sommet S_2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, au sommet S_3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_3, alors à l'instant n + 1 il sera au sommet S_2.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le pion se trouve à l'instant n sur le sommet S_i,
et on note a_n, b_n, c_n les probabilités suivantes : $a_n = P(\{X_n = 1\})$, $b_n = P(\{X_n = 2\})$, $c_n = P(\{X_n = 3\})$.

1. On note T_n la matrice à une colonne : $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Préciser les matrices T_0 et T_1.
2. Écrire la matrice M, carrée d'ordre 3, dont le terme situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P_{\{X_n=j\}}\left(\{X_{n+1}=i\}\right)$, que l'on peut aussi noter $P(\{X_{n+1} = i\} / \{X_n = j\})$.
3. Justifier que les conditions d'application de la formule des probabilités totales sont réunies, puis l'utiliser pour montrer que, pour tout nombre entier naturel n : $T_{n+1} = M\,T_n$.
4. En déduire l'expression de la matrice T_n en fonction de n, T_0 et A, où A est la matrice étudiée à la question 1.
5. En déduire les probabilités a_n, b_n, c_n en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.
6. Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'espérance de X_n est indépendante de n.

EXERCICE 21

On veut étudier le lien entre une certaine maladie humaine M et le taux d'un certain composé chimique C présent dans le sang.
On décide donc de mesurer le taux du composé C dans le sang de deux groupes de personnes :

- un groupe de 138 personnes non atteintes de la maladie M (groupe des sujets sains) ;
- un groupe de 87 personnes atteintes de la maladie M (groupes des sujets malades).

On a reproduit à l'annexe 1 les valeurs du taux de C en milligrammes par litres (mg/l) relevés dans le groupe des sujets sains, classées par ordre croissant.
On a procédé de même à l'annexe 2 pour le groupe des sujets malades.

1. Dans cette question, on s'intéresse uniquement à la série statistique des valeurs relevées dans le groupe des sujets sains.
   On admet ici que des études à grande échelle ont permis d'affirmer que les données relatives au taux de C dans le sang des personnes saines ont une moyenne μ égale à 2,035 mg/l et un écart-type σ égal à 0,611 mg/l.
   a. Préciser l'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$. Combien de valeurs sont situées dans cet intervalle ?
   b. Peut-on affirmer que plus de 95 % des valeurs de la série appartiennent à cet intervalle ?
2. Dans cette question, on cherche à comparer la série statistique des valeurs relevées dans le groupe des sujets malades avec celle des valeurs relevées dans le groupe des sujets sains.
   a. Déterminer la médiane puis le troisième quartile de la série statistique relative au groupe des sujets malades.
   b. On admet que la médiane, le premier et le troisième quartile de la série statistique relative au groupe des sujets sains sont respectivement 2,065 mg/l, 1,63 mg/l et 2,42 mg/l.
   Sur un même graphique, représenter les deux séries par des diagrammes en boîtes sur lesquels figureront au moins la médiane, les premier et troisième quartiles (unité : 5 cm pour un mg/l).
   c. Quelles conclusions concernant le lien entre la maladie M et le taux de C peut-on tirer de la comparaison des médianes et des intervalles interquartiles des deux séries ?
   d. Suffit-il de connaître le taux de C d'un individu pour savoir s'il est atteint ou non de la maladie M ? Pourquoi ?
3. Lorsque le taux de C dépasse 2,6 mg/l, on procède à des examens complémentaires pour rechercher si un sujet est atteint ou non de la maladie M.
   a. Calculer le pourcentage de personnes du groupe des sujets malades qui échappent aux examens complémentaires.
   b. Quel est le pourcentage de personnes du groupe des sujets sains qui subissent ces examens complémentaires ?

Données triées par ordre croissant (en mg/l)

Annexe 1

Taux de C relevé chez 138 sujets sains					
1	0,52	47	1,76	93	2,30
2	0,58	48	1,81	94	2,30
3	0,64	49	1,81	95	2,33
4	0,85	50	1,82	96	2,33
5	0,90	51	1,83	97	2,33
6	0,99	52	1,83	98	2,34
7	1,01	53	1,85	99	2,36
8	1,03	54	1,85	100	2,37
9	1,08	55	1,85	101	2,39
10	1,19	56	1,85	102	2,41
11	1,24	57	1,85	103	2,42
12	1,24	58	1,86	104	2,42
13	1,26	59	1,90	105	2,43
14	1,28	60	1,90	106	2,44
15	1,30	61	1,93	107	2,45
16	1,32	62	1,96	108	2,47
17	1,37	63	1,97	109	2,50
18	1,38	64	1,99	110	2,51
19	1,39	65	2,00	111	2,55
20	1,39	66	2,02	112	2,55
21	1,42	67	2,02	113	2,55
22	1,42	68	2,06	114	2,55
23	1,44	69	2,06	115	2,59
24	1,45	70	2,07	116	2,62
25	1,45	71	2,11	117	2,68
26	1,49	72	2,11	118	2,73
27	1,49	73	2,16	119	2,76
28	1,51	74	2,17	120	2,77
29	1,51	75	2,17	121	2,79
30	1,53	76	2,17	122	2,80
31	1,54	77	2,18	123	2,81
32	1,57	78	2,19	124	2,83
33	1,59	79	2,21	125	2,88
34	1,63	80	2,21	126	2,89
35	1,63	81	2,22	127	2,92
36	1,63	82	2,23	128	2,94
37	1,64	83	2,23	129	2,97
38	1,65	84	2,24	130	2,99
39	1,66	85	2,24	131	2,99
40	1,66	86	2,26	132	3,10
41	1,69	87	2,28	133	3,12
42	1,71	88	2,28	134	3,15
43	1,73	89	2,29	135	3,23
44	1,73	90	2,29	136	3,29
45	1,74	91	2,29	137	3,30
46	1,75	92	2,29	138	3,52

Annexe 2

Taux de C relevé chez 87 sujets atteints de la maladie M			
1	1,98	47	2,91
2	2,07	48	2,92
3	2,19	49	2,93
4	2,21	50	2,93
5	2,23	51	2,96
6	2,23	52	2,97
7	2,34	53	2,97
8	2,41	54	2,97
9	2,42	55	2,97
10	2,45	56	3,00
11	2,47	57	3,02
12	2,57	58	3,02
13	2,57	59	3,04
14	2,61	60	3,05
15	2,62	61	3,06
16	2,65	62	3,08
17	2,65	63	3,08
18	2,66	64	3,10
19	2,69	65	3,10
20	2,70	66	3,11
21	2,70	67	3,11
22	2,74	68	3,13
23	2,75	69	3,18
24	2,76	70	3,19
25	2,77	71	3,21
26	2,77	72	3,25
27	2,77	73	3,25
28	2,79	74	3,26
29	2,79	75	3,27
30	2,79	76	3,27
31	2,80	77	3,28
32	2,81	78	3,29
33	2,81	79	3,30
34	2,82	80	3,31
35	2,82	81	3,36
36	2,82	82	3,36
37	2,85	83	3,41
38	2,87	84	3,44
39	2,87	85	3,57
40	2,88	86	3,60
41	2,89	87	3,65
42	2,89		
43	2,89		
44	2,89		
45	2,89		
46	2,90		

EXERCICE 22

Un groupe industriel possède deux filiales MAT et MATIC qui produisent des petits moteurs destinés au montage de jouets.

– Partie I –

La variable aléatoire X qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie moyenne exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.

1. Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures. Calculer, à 104près la probabilité p qu'un moteur prélevé au hasard dans la production ne soit pas commercialisable.
2. On admet que p = 0,02. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nombre de moteurs non commercialisables. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise.
   a. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse et donner ses paramètres.
   b. Calculer à 10^{-3} près la probabilité de l'événement : « il y a au plus trois moteurs non commercialisables ».

– Partie II –

La filiale MAT prélève un échantillon de taille 100 sur la production d'un jour et mesure la durée de vie, en heures, des moteurs. Les résultats obtenus sont les suivants :

durée de vie	[300,340[	[340,380[	[380,420[	[420,460[	[460,500[
effectifs	7	21	48	16	8

1. En faisant l'hypothèse que les valeurs mesurées sont celles du centre de classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne m_1 et l'écart type σ_1 de cette série statistique.

La filiale MATIC, dans des conditions similaires, contrôle un échantillon de taille 100 et obtient pour résultats $m_2 = 406{,}8$ et $\sigma_2 = 40{,}5$.

2. On désigne par $\overline{X_1}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MAT, associe sa moyenne, et par $\overline{X_2}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MATIC, associe sa moyenne.

Tous les échantillons considérés sont assimilés à des échantillons prélevés avec remise.

On suppose que les variables aléatoires $\overline{X_1}, \overline{X_2}, D = \overline{X_1} - \overline{X_2}$ suivent des lois normales de moyennes respectives M_1, M_2, M_1-M_2 inconnues, et on estime l'écart type de D par

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{100}}$$

(On prend comme valeur approchée à 10^{-1} près de σ_1 la valeur 39,4.)

On décide de construire un test bilatéral permettant de savoir s'il existe une différence significative au seuil de 5% entre les durées de vie des moteurs fabriqués par les filiales MAT et MATIC.

On choisit pour hypothèse $H_0 : M_1 = M_2$, et pour hypothèse alternative $H_1 : M_1 \neq M_2$.

   a. Sous l'hypothèse H_0, D suit la loi normale N $(0, \sigma_D)$. Déterminer l'intervalle [- h , h] tel que $P(-h \leq D \leq h) = 0{,}95$.
   b. Énoncer la règle de décision du test.
   c. Utiliser ce test avec les deux échantillons de l'énoncé et conclure.