

DT_B - DOSSIER TECHNIQUE – PARTIE B
VOLET "ANALYSE MECANIQUE DU COMPORTEMENT DU VEHICULE"

SOMMAIRE

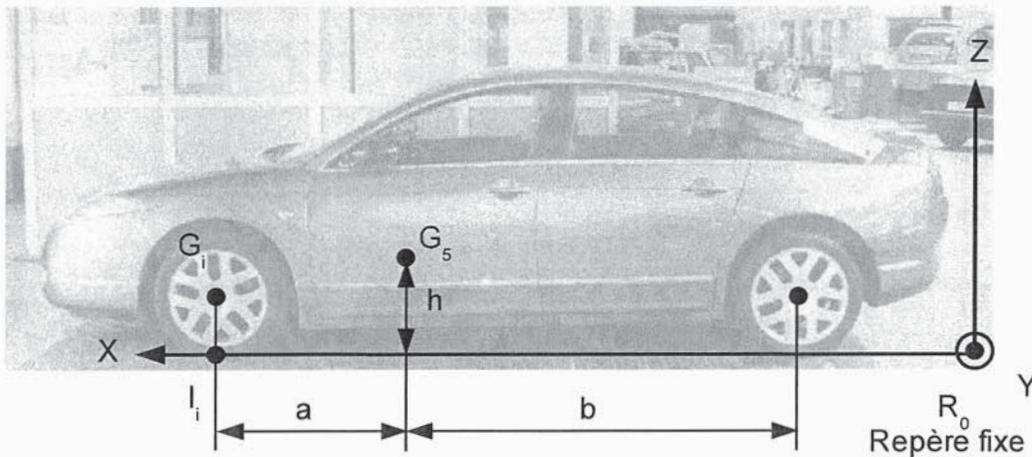
1. MODELISATION DU VEHICULE EN LIGNE DROITE
 - 1.1. Mise en équations du mouvement du véhicule
 - 1.2. Mise en équations du mouvement d'une roue
 - 1.3. Comportement longitudinal du pneumatique
 - 1.4. Etablissement du freinage
 - 1.5. Etude du freinage d'urgence

2. MODELISATION DU VEHICULE EN VIRAGE
 - 2.1. Comportement latéral du pneumatique
 - 2.2. Mise en équations du mouvement du véhicule
 - 2.3. Comportement du véhicule en virage établi
 - 2.4. Perte d'adhérence en virage et intervention de l'ESP

3. Recueil de données concernant le véhicule étudié

1. MODELISATION DU VEHICULE EN LIGNE DROITE

Nous nous intéressons, dans cette première partie du volet "Analyse Mécanique", à la modélisation du véhicule en situation de freinage en ligne droite.



- figure 1, paramétrage de la géométrie -

Hypothèses et grandeurs caractéristiques :

- Le référentiel utilisé est précisé sur la figure 1.
- La caisse de masse M est supposée en mouvement rectiligne, elle est désignée comme le solide n°5.
- Le phénomène de tangage n'est pas pris en considération.
- Le moteur est embrayé avec un rapport de boîte donné.
- Les roues avant sont motrices, elles sont désignées comme les solides 1 et 2.
- Les roues arrières sont libres, elles sont désignées comme les solides 3 et 4.
- Les forces aérodynamiques sont négligées.
- Les liaisons au niveau des essieux sont supposées parfaites.
- Le moment d'inertie propre d'une roue selon son axe de rotation et en son centre, est donné approximativement par la formule $I_{Rip} = mr^2$ (compte tenu de la répartition des masses) avec m masse de la roue et r son rayon extérieur (et de "roulement").
- Le moment d'inertie "rapporté" à la roue au niveau d'une roue avant vaut : $I_{Ri} = I_{Rip} + I_2$ avec I_2 correspondant au report de l'inertie du moteur et de la ligne de transmission.
- Paramétrage cinématique du véhicule : il est fourni par l'abscisse x du centre de gravité G_5 de la caisse, sa dérivée première : la vitesse $V = \dot{x}$, et sa dérivée seconde : l'accélération \ddot{x} .
- Paramétrage cinématique de la roue i : il est donné par l'angle de position θ_i , sa dérivée première : la vitesse angulaire $\omega_i = \dot{\theta}_i$, et sa dérivée seconde : l'accélération angulaire $\dot{\omega}_i = \ddot{\theta}_i$.
- Les actions du sol sur la roue i sont représentées par le torseur :

$$\{T_{sol/R_i}\}_{I_i} = \begin{Bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

avec T_i effort tangentiel et N_i effort normal au niveau du point de contact I_i .

- Les actions de freinage sur la roue i sont définies par le torseur :

$$\left\{ T_{\text{frein}/R_i} \right\}_{G_i} = \begin{Bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & Mf_i \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

avec F_i l'effort de freinage et Mf_i le moment correspondant calculé au point G_i .

- L'accélération de la pesanteur vaut $g = -9,81 \text{ m/s}^2$.
- Données diverses pour le véhicule étudié : distance entre le centre de l'essieu avant et le centre de gravité de la caisse $a = 943 \text{ mm}$, pour l'essieu arrière $b = 1957 \text{ mm}$, empattement $e = 2900 \text{ mm}$, hauteur du centre de gravité $h = 500 \text{ mm}$, rayon des roues $r = 330 \text{ mm}$, masse de la caisse $M = 1800 \text{ kg}$ (avec une personne à bord), masse d'une roue $m = 22,5 \text{ kg}$.

1.1. Mise en équations du mouvement du véhicule

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au véhicule s'écrit :

$$(4m + M)\vec{a}(G_{1,2,3,4,5}/R_0) = \vec{R}(\bar{S} \rightarrow S) \quad (1)$$

$$\vec{\delta}(I_{34}/R_0) = \vec{M}(I_{34}, \bar{S} \rightarrow S) \quad (2)$$

avec respectivement, $\vec{a}(G_{1,2,3,4,5}/R_0)$ l'accélération du centre de gravité du véhicule, $\vec{\delta}(I_{34}/R_0)$ le moment dynamique exprimé au point I_{34} , milieu des 2 points de contacts des roues arrières, $\vec{R}(\bar{S} \rightarrow S)$ et $\vec{M}(I_{34}, \bar{S} \rightarrow S)$ la résultante et le moment des efforts extérieurs.

Ces écritures vectorielles débouchent sur les équations scalaires suivantes :

$$\sum_{i=1}^4 T_i = (4m + M)\ddot{x} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^4 N_i = (4m + M)g \quad (4)$$

$$g(Mb + 2me) - e(N_1 + N_2) = \left(Mh + \frac{\sum_{i=1}^4 I_{Ri}}{r} + 4mr \right) \ddot{x} \quad (5)$$

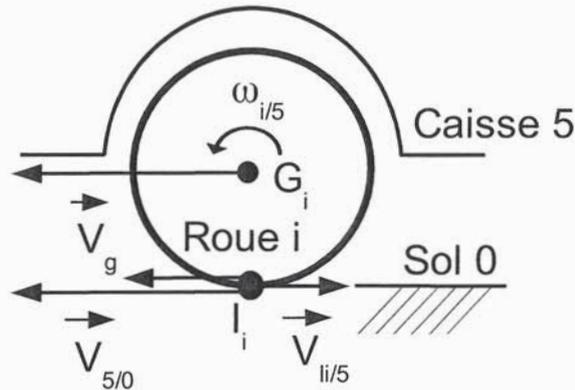
1.2. Mise en équations du mouvement d'une roue

1.2.1. Cinématique de la roue

On considère la distribution suivante vis à vis de la situation de roulage en ligne droite :

$$\vec{V}_g = \vec{V}_{li/0} = \vec{V}_{5/0} + \vec{V}_{li/5} \quad (6)$$

Les vitesses en question sont illustrées sur la figure 2.



- figure 2, distribution des vitesses -

- \vec{V}_g correspond à la vitesse de glissement de la roue i considérée / au sol, au niveau du point I_i, centre de la zone de contact,
- $\vec{V}_{5/0}$ est la vitesse (de translation) de la caisse que l'on annotera $\vec{V}_{réf}$,
- $\vec{V}_{li/5} = -r \omega_i \vec{x}$ (équation 7) est la vitesse périphérique de la roue au niveau du point de contact I_i, avec ω_{i/5} la vitesse de rotation de la roue i, annotée ω_i.

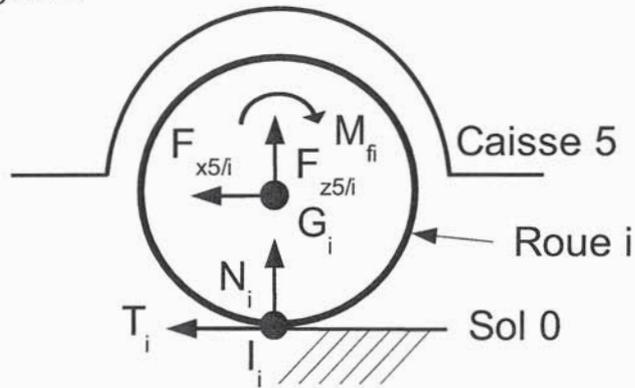
On caractérise classiquement cette distribution à l'aide du "coefficient de pseudo-glissement λ" :

$$\lambda = \frac{V_g}{V_{réf}} = \left(1 - \frac{r \omega_i}{V_{réf}} \right) \quad (8)$$

Ce coefficient λ reflète le niveau de sollicitation du pneumatique (que l'on ne doit pas assimiler à un solide parfait).

1.2.2. Dynamique de la roue freinée

L'analyse des efforts appliqués sur une roue (en l'absence de couple moteur), est retranscrite sur la figure 3.



- figure 3, efforts appliqués sur une roue (signes non présumés pour les composantes d'efforts) -

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la roue i s'écrit :

$$m \vec{a}(G_i/R_0) = \vec{R}(\bar{i} \rightarrow i) = \vec{F}(\text{sol} \rightarrow i) + \vec{F}(\text{frein} \rightarrow i) + \vec{F}(\text{caisse} \rightarrow i) \quad (9)$$

$$\vec{\delta}(G_i/R_0) = \vec{M}(G_i, \bar{i} \rightarrow i) \quad (10)$$

avec respectivement, $\vec{a}(G_i/R_0)$ l'accélération du centre de gravité de la roue, $\vec{\delta}(G_i/R_0)$ le moment dynamique en G_i , $\vec{R}(\bar{i} \rightarrow i)$ et $\vec{M}(G_i, \bar{i} \rightarrow i)$ la résultante et le moment résultant des efforts extérieurs.

Ces écritures vectorielles débouchent sur les équations scalaires suivantes :

$$T_i + F_i + F_{x5/i} = m \ddot{x} \quad (11)$$

$$N_i + F_{z5/i} = mg \quad (12)$$

$$M_a + Mf_i = I_{Ri} \dot{\omega}_i \quad (13)$$

avec $M_a = -rT_i$ (équation 14), grandeur généralement qualifiée de "moment adhérent" (globalement positif lors d'un freinage relativement au repère de travail choisi),

$F_{x5/i}$ et $F_{z5/i}$ les composantes d'inter-efforts dans la liaison entre la caisse 5 et la roue i ,

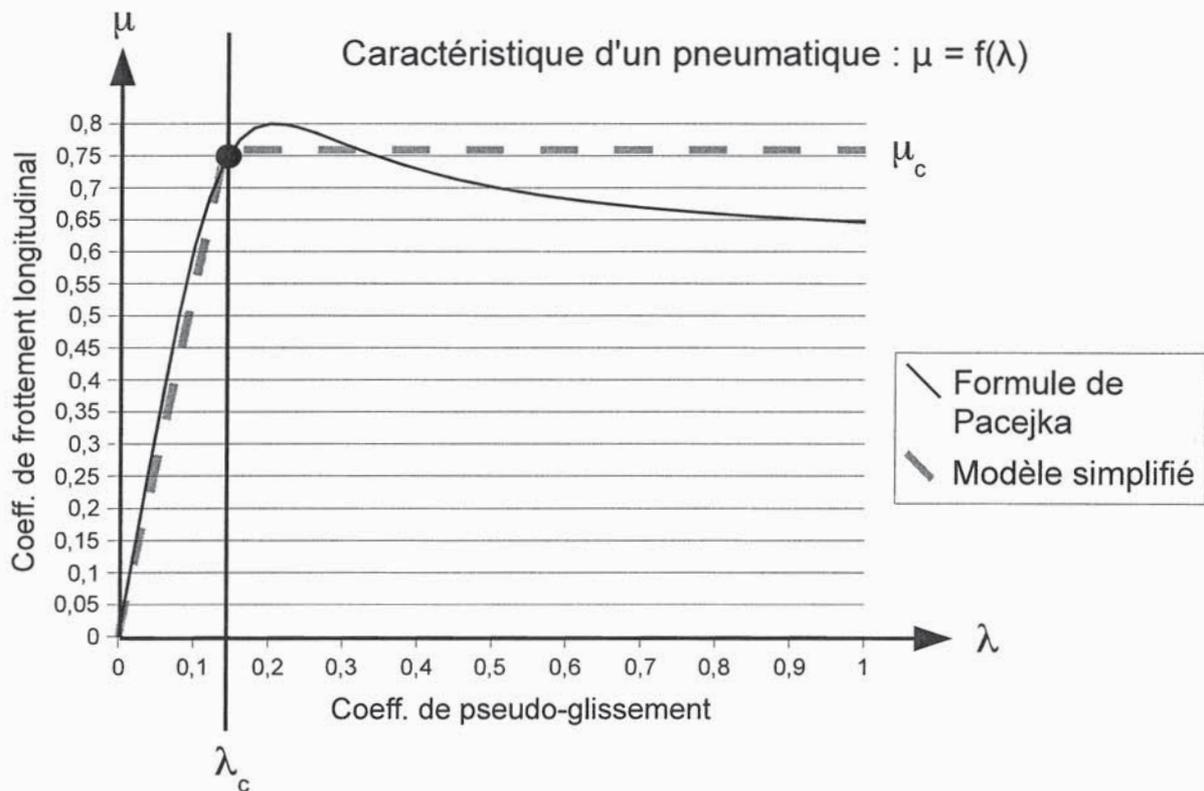
F_i l'effort inhérent au freinage (induit par les freins sur la roue i) et Mf_i le moment de freinage correspondant (de signe négatif).

1.3. Comportement longitudinal d'un pneumatique

L'expérience montre qu'il existe une corrélation entre le pseudo-glissement λ et le coefficient de frottement longitudinal μ donné par l'équation :

$$\mu = \frac{T_i}{N_i} \quad (15) : \text{rapport entre l'effort tangentiel transmis } T_i \text{ et l'effort normal } N_i.$$

Deux lois, illustrées sur la figure 4, sont ainsi classiquement utilisées. La première loi, la plus pertinente sur le plan physique, est associée à la formule de "Pacejka". La seconde loi possède un caractère plus pratique, elle correspond à une simplification de la première.



- figure 4 : comportement du pneumatique selon une sollicitation longitudinale -

Une interprétation du comportement du pneumatique sur la base de la loi simplifiée est proposée ci-après :

- Le fait que les courbes démarrent du point ($\lambda = 0, \mu = 0$), indique que l'adhérence avec le sol et le pseudo-glissement vont de pair.
- Pour $0 < \lambda < \lambda_c$: la relation linéaire entre λ et μ que l'on observe dans cet intervalle, est à mettre sur le compte de la seule déformation périphérique de la bande de roulement en amont et en aval de la zone en contact avec le sol.
- A l'extremum (λ_c, μ_c) correspond une amorce de glissement (cette fois bien réel) entre le pneumatique et le sol, en l'occurrence au niveau de la zone la plus

fortement comprimée (à l'arrière du pneumatique lors d'un freinage).

- Pour $\lambda_c < \lambda < 1$: l'existence d'un "plateau" est à imputer à la propagation du glissement sur toute la surface de contact entre le pneumatique et le sol. On observera qu'il s'agit d'un phénomène instable du fait que λ progresse à effort tangentiel constant et donc à couple de freinage constant.
- $\lambda = 1$ est le résultat du blocage complet de la roue (relativement à l'essieu).

Il ressort de ces considérations que le pneumatique possède un comportement stable en deça du seuil de pseudo-glissement "critique λ_c " et instable au delà de ce seuil.

Précision : on utilisera pour les calculs, les valeurs suivantes se rapportant à un contact sur route sèche et à une sollicitation purement longitudinale du pneumatique :

$$\lambda_c = 15 \% \text{ et } \mu_c = 0,76.$$

1.4. Etablissement du freinage

La résolution directe de l'équation différentielle (13) nécessite d'introduire des hypothèses simplificatrices. On supposera ainsi :

- 1) Que le comportement du pneumatique est caractérisé par la relation linéaire associée à la 1ère partie de la loi simplifiée :

$$\mu = k \lambda \quad (16)$$

- 2) Que l'évolution du freinage dans le temps t , est définie par la loi linéaire ci-dessous, la constante k' introduite dépendant des caractéristiques du véhicule et de la réactivité du conducteur :

$$Mf_i = k't \quad (17)$$

- 3) Que la vitesse du véhicule V_{ref} reste constante sur la durée d'intégration (la variation étant inférieure à 5 % dans la réalité).

On montre que l'on obtient ainsi la loi d'évolution suivante pour la décélération de la roue i considérée (en fonction du temps) :

$$\dot{\omega}_i(t) = -\dot{\omega}_{Max} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (18)$$

$$\text{Avec : } C = \frac{V_{ref}}{kN_i r^2} \text{ (constante), } \dot{\omega}_{Max} = C k' \text{ (accélération maximale)}$$

$$\text{et } \tau = C I_{Ri} \text{ (constante de temps) (jeu d'équations 19)}$$

1.5. Etude du freinage d'urgence

Certaines questions du dossier de travail portent sur le freinage en situation d'urgence.

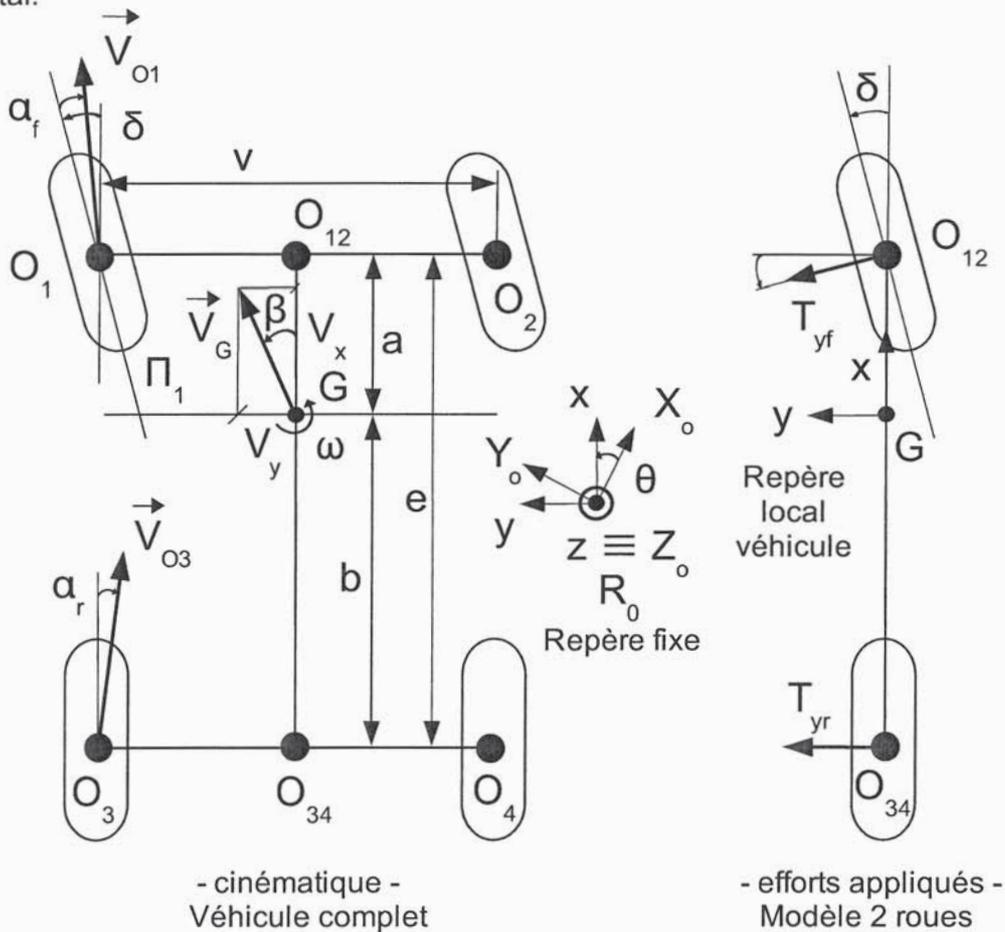
Elles seront abordées en exploitant le même modèle que précédemment (celui basé sur les équations 16 et 17).

On retiendra que l'utilisation de ce modèle reste subordonnée au non-dépassement de la valeur critique de pseudo-glisement λ_c .

2. MODELISATION DU VEHICULE EN VIRAGE

Cette seconde partie du volet "Analyse Mécanique" concerne la modélisation du véhicule en situation de roulage en courbe.

Pour simplifier, nous allons considérer que le véhicule évolue globalement dans un plan horizontal.



- figure 5, modèles mathématiques d'un véhicule en virage -

Hypothèses et grandeurs caractéristiques

- L'illustration en partie gauche de la figure 5 représente la modélisation retenue au niveau de la cinématique du véhicule.
- On assimilera le véhicule à un seul solide S de masse M (on réintègre donc les roues) et de moment d'inertie I_{GZ} autour de l'axe vertical Z passant par le centre de gravité G.
- a et b correspondent cette fois, aux distances mesurées selon l'axe longitudinal x du véhicule, entre le centre de gravité global G (et non le centre de gravité de la caisse seule).
- La description cinématique s'appuie sur la considération des paramètres suivants : l'angle β de "dérive" du véhicule, l'angle θ de "lacet" du véhicule, l'angle δ de "braquage" des roues avant et les angles α_f , α_r de "dérive" des roues avant et arrières.
- A l'angle β correspond l'inclinaison du vecteur vitesse \vec{V}_G du centre de gravité par rapport au plan médian du véhicule.
- A l'angle θ correspond l'orientation du véhicule par rapport au repère fixe et ω la vitesse angulaire du véhicule définie par $\omega = \dot{\theta}$.
- A l'angle δ correspond l'orientation du plan médian Π_i des roues avant par rapport au plan médian du véhicule, cet angle étant induit par le système de direction.
- Aux divers angles α_f et α_r correspondent les déviations des vecteurs vitesses \vec{V}_{O_i} des centres des roues par rapport à leur plan médian, celles-ci étant imputables au comportement des pneumatiques (comme expliqué ci-après dans le paragraphe 2.1). Ces angles sont supposés être les mêmes pour les roues d'un même essieu.
- Le torseur cinématique associé au véhicule est ainsi qualifié (au centre de gravité ; en projection dans le repère local du véhicule) :

$$\left\{ \tau_{S/R_0} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega & 0 \end{array} \right\}_{(x,y,z)}$$

- L'illustration en partie droite de la figure 5 représente la modélisation retenue en ce qui concerne les efforts appliqués. Les contributions respectives des roues gauches et droites y sont globalisées (en vue de ne prendre en compte que des efforts par essieu). On parle de modèle "2 roues".

- Ne sont considérés que les efforts latéraux provenant de la chaussée (du moins pour établir les équations fournies ci-après) : soit T_{yf} pour le train avant et T_{yr} pour le train arrière (y étant l'axe local associé à la roue).
- On néglige les forces aérodynamiques et les effets gyroscopiques.
- Données diverses pour le véhicule étudié : distance entre le centre de l'essieu avant et le centre de gravité global du véhicule $a = 967$ mm, pour l'essieu arrière $b = 1933$ mm, empattement $e = 2900$ mm, voie $v = 1570$ mm (à l'avant comme à l'arrière).

2.1. Comportement latéral du pneumatique

Le comportement d'un pneumatique soumis à une sollicitation latérale, peut être caractérisé à l'aide de la relation suivante :

$$T_y = C\alpha \quad (20)$$

avec T_y l'effort latéral appliqué à la roue et α l'angle de dérive du pneumatique, C le facteur de dérive, lequel dépend de la constitution du pneumatique et du niveau d'adhérence avec le sol.

2.2. Mise en équations du mouvement du véhicule

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au véhicule s'écrit en projection dans le repère local associé à celui-ci :

$$M a_y(G/R_0) = R_y(\bar{S} \rightarrow S) \quad (21)$$

$$\delta_z(G/R_0) = M_z(G, \bar{S} \rightarrow S) \quad (22)$$

avec respectivement, $a_y(G/R_0)$ l'accélération transversale du centre de gravité du véhicule, $\delta_z(G/R_0)$ le moment dynamique autour de l'axe vertical passant par G , $R_y(\bar{S} \rightarrow S)$ et $M_z(G, \bar{S} \rightarrow S)$ la résultante et le moment des efforts extérieurs selon les mêmes axes.

Pour résoudre ce système d'équations différentielles, il convient de le linéariser (en supposant que les angles restent constamment petits). On montre en l'occurrence que ces relations deviennent :

$$MV(\dot{\beta} + \omega) = Y_{\beta}\beta + Y_{\omega}\frac{\omega}{V} + Y_{\delta}\delta \quad (23)$$

$$I_{GZ}\dot{\omega} = N_{\beta}\beta + N_{\omega}\frac{\omega}{V} + N_{\delta}\delta \quad (24)$$

- On rappelle que β est l'angle de "dérive" du véhicule, ω la vitesse de "lacet" du véhicule et l'angle δ de "braquage" des roues avant.
- V étant la norme de la vitesse du centre de gravité du véhicule.
- Les 6 coefficients Y_i et N_i (il s'agit de constantes) sont données par les relations suivantes, les indices f et r désignant respectivement les roues avant (front) et arrières (rear) :

$$Y_{\beta} = -C_f - C_r \quad , \quad Y_{\omega} = -aC_f + bC_r \quad , \quad Y_{\delta} = C_f \quad (25)$$

$$N_{\beta} = -aC_f + bC_r \quad , \quad N_{\omega} = -a^2C_f - b^2C_r \quad , \quad N_{\delta} = aC_f \quad (26)$$

2.3. Comportement en virage établi :

L'étape suivante concerne la formulation d'hypothèses relativement à un virage en "régime établi", à savoir :

$$\omega = \frac{V}{R} = \text{constante} \quad \text{et} \quad \beta = \text{constante} \quad (27)$$

Avec R le rayon de courbure de la trajectoire du véhicule et donc du virage.

On montre que l'angle de braquage est alors donné par la relation :

$$\delta = \frac{e}{R} + K \frac{V^2}{R} \quad (28)$$

- Le premier terme $\frac{e}{R}$ correspondant à l'angle de braquage à "vitesse faible",
- K étant le "gradient sous-vireur" : $K = \frac{M}{e} \left(\frac{b}{C_f} - \frac{a}{C_r} \right)$ (29)

2.4. Perte d'adhérence en virage et intervention de l'ESP

Le modèle introduit (celui associé aux équations 20 à 29) sera utilisé pour :

- 1) Modéliser la perte d'adhérence survenant sur une roue particulière.
- 2) Calculer la compensation à introduire de par le freinage d'une roue de l'autre essieu (l'effort en question étant supposé contenu dans le plan médian Π_i de la roue).

3. RECUEIL DE DONNEES CONCERNANT LE VEHICULE ETUDIE

Les valeurs fournies sont exprimées dans le système SI :

- Accélération de la pesanteur : $g = -9,81 \text{ m/s}^2$.
- Masse de la caisse : $M = 1800 \text{ kg}$ (sans les roues, avec une personne à bord).
- Masse de chaque roue : $m = 22,5 \text{ kg}$.
- Rayon des roues : $r = 0,33 \text{ m}$.
- Empattement : $e = 2,9 \text{ m}$.
- Voie $v = 1,57 \text{ m}$ (à l'avant et à l'arrière).
- Hauteur du centre de gravité / au sol : $h = 0,5 \text{ m}$.
- Pour l'étude du freinage en ligne droite : distance entre le centre de l'essieu avant et le centre de gravité de la **caisse** seule : $a = 0,943 \text{ m}$ et pour l'essieu arrière : $b = 1,957 \text{ m}$.
- Pour l'étude du comportement en virage : distance entre le centre de l'essieu avant et le centre de gravité **global du véhicule** : $a = 0,967 \text{ m}$, pour l'essieu arrière : $b = 1,933 \text{ m}$.