

SESSION DE 2008

---

**CONCOURS EXTERNE  
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES**

**Option : PHYSIQUE**

**PROBLÈME DE PHYSIQUE**

Durée : 6 heures

---

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

# Nanomagnétisme et sonde à effet Hall

Ce problème traite des propriétés magnétiques de la matière, à l'échelle micrométrique ou nanométrique. Les objets d'étude sont des macromolécules paramagnétiques ou ferromagnétiques organisées en cristal de taille nanométrique que l'on dépose sur la surface d'une sonde à effet Hall de taille comparable (voir figure 1). Le champ magnétique créé par la matière est obtenu en mesurant la tension de Hall de la microsonde. Cette technique présente l'avantage de pouvoir fonctionner à la fois sur une très large gamme de températures (du millikelvin à la température ambiante) et sur une très large gamme de champs magnétiques (du microtesla à la dizaine de teslas). Le candidat devra donc être particulièrement attentif aux valeurs des paramètres physiques correspondant aux conditions expérimentales de chacune des expériences décrites dans la deuxième partie.

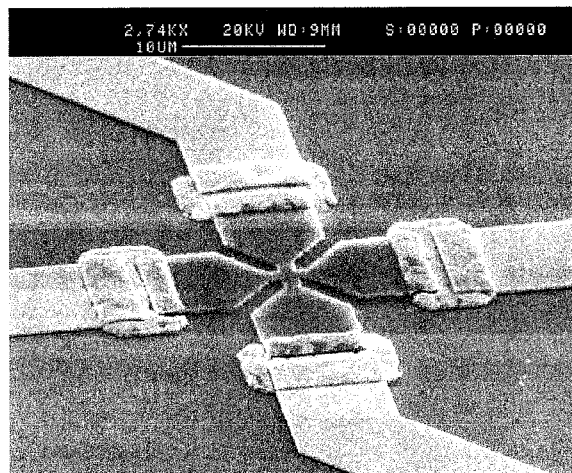


FIG. 1 – Sonde à effet Hall étudiée dans ce problème (Projet ANR NANO HALL). La partie active de la sonde est le carré central.

**Ce problème comporte six questions indépendantes.**

Les six questions sont organisées en deux parties.

La première partie, composée des quatre premières questions, traite de l'effet Hall et de son application à la mesure d'un champ magnétique par une microsonde. Dans la seconde partie, la sonde à effet Hall est mise en situation dans deux expériences, qui sont décrites dans les questions 5 et 6. Dans une première expérience, la sonde est utilisée pour détecter à température ambiante la résonance magnétique d'un grain paramagnétique de taille micrométrique. Dans la deuxième expérience, la sonde à effet Hall est utilisée pour mesurer l'aimantation d'un nanocristal moléculaire  $\text{Fe}_8$ , à très basse température.

## Formulaire :

On note  $x^*$  le complexe conjugué de  $x$ .

L'espace est ramené à un repère cartésien orthonormé à trois dimensions, de vecteurs de base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

## Lagrangien :

Soit  $\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  la fonction "lagrangien" d'une particule de vitesse  $\vec{v}$  à la position  $\vec{r}$ .

- On rappelle que dans cette description les variables  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  sont des variables indépendantes.
- On définit l'impulsion  $\vec{p}$  de la particule par :

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} \vec{e}_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y} \vec{e}_y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} \vec{e}_z$$

- L'énergie de la particule est définie par la transformation de Legendre :

$$\mathcal{E} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L}$$

## "Fonction" $\delta(t)$ de Dirac :

- $\delta(t) = \infty$  si  $t = 0$  ;  $\delta(t) = 0$  si  $t \neq 0$
- Pour toute fonction  $f$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

## Transformée de Fourier :

*Définitions :*

La transformée de Fourier directe d'une fonction  $x(t)$  de la variable réelle  $t$  est définie pour toute fréquence  $f$  par la formule :

$$TF(x(t))(f) = \hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi ft} dt$$

La transformée de Fourier inverse de la fonction  $\hat{x}(f)$  est donnée par la formule :

$$TF^{-1}(\hat{x}(f))(t) = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f)e^{2i\pi ft} df$$

*Quelques propriétés de la transformée de Fourier :*

- $TF\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')y(t-t')dt'\right) = \hat{x}(f)\hat{y}(f)$  ;
- La transformée de Fourier de la fonction  $x(t) = e^{-|t|}$  est :  $\hat{x}(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2}$  ;
- La transformée de Fourier de la "fonction"  $\delta(t)$  est :  $\hat{\delta}(f) = 1$  ;

### Développement en séries de Fourier d'une fonction en créneau :

Soit la fonction en créneau définie par :

$$U(t) = A \text{ pour } t \in \left[ nT, nT + \frac{T}{2} \right[ \text{ et } U(t) = B \text{ pour } t \in \left[ nT + \frac{T}{2}, (n+1)T \right[$$

Alors :

$$U(t) = \frac{A+B}{2} + \frac{2(A-B)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega t)}{2n+1} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

### Double produit vectoriel :

Soit  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{b} = \vec{b}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{c} = \vec{c}(\vec{r}, t)$ , trois champs vectoriels :

- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

### Valeurs numériques de constantes fondamentales :

- Permittivité diélectrique du vide .....  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide .....  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- Vitesse de la lumière dans le vide .....  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Constante de Planck réduite .....  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- Constante de Boltzmann .....  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro .....  $\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Valeur absolue du magnéton de Bohr .....  $|\mu_B| = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$
- Masse de l'électron .....  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge élémentaire .....  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

## Première partie

# Micro-sonde de Hall : de la force de Lorentz aux mesures d'aimantation

## 1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

On se restreint à une description non relativiste des phénomènes physiques (toutes les vitesses sont petites devant la vitesse de la lumière). Soit  $(K)$  un référentiel galiléen  $(Oxyz)$  muni d'une base orthonormée  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

### 1.1 Lagrangien d'une particule dans un champ électromagnétique

En présence d'un champ électromagnétique caractérisé par le potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  et par le potentiel scalaire  $\phi(\vec{r}, t)$ , le lagrangien d'une particule de masse  $m$ , de charge  $q$ , située à la position  $\vec{r}$  et animée de la vitesse  $\vec{v}$  s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{A} \cdot \vec{v} - q\phi$$

1. Calculer l'impulsion  $\vec{p}$  et l'énergie  $\mathcal{E}$  de la particule en fonction des grandeurs  $m$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{A}$  et  $\phi$ .
2. (a) Montrer que l'énergie  $\mathcal{E}$  de la particule peut s'écrire comme une somme de deux termes  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{el}$ , dont on donnera l'expression ainsi qu'une interprétation physique.  
(b) Montrer que  $\mathcal{E}_c$  peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_c = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}$$

### 1.2 Force de Lorentz et transformation des champs

L'équation de Lagrange permet d'aboutir à l'équation du mouvement :

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

1. Donner sans démonstration, l'expression des champs  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  en fonction du potentiel vecteur  $\vec{A}$  et du potentiel scalaire  $\phi$ .
2. Dans le référentiel  $(K)$  règne un champ électromagnétique  $(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t))$ . Dans un référentiel  $(K')$  en translation rectiligne et uniforme par rapport à  $(K)$  à la vitesse  $\vec{v}_e$ , le champ électromagnétique est  $(\vec{E}'(\vec{r}', t), \vec{B}'(\vec{r}', t))$ .

En exprimant l'invariance des lois physiques par changement de référentiel galiléen, montrer que :

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

3. À quelle condition portant sur le rapport  $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$ , existe-t-il un référentiel dans lequel le champ électrique  $\vec{E}'$  s'annule ? Définir alors la vitesse de dérive  $\vec{v}_d$  de ce référentiel  $(K_d)$ , en prenant  $\vec{v}_d$  et  $\vec{B}$  orthogonaux.

### 1.3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

Une particule de charge  $q < 0$  et de masse  $m$  est placée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  avec  $B_0 > 0$ . On note  $\vec{v}$  sa vitesse dans le référentiel ( $K$ ) du laboratoire.

1. Montrer que la projection du mouvement de la particule dans le plan ( $Oxy$ ) est un cercle décrit à la fréquence cyclotron  $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$  et dont on donnera le rayon.

Déterminer les expressions de  $x(t)$  et de  $y(t)$  pour les conditions initiales suivantes : à  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\frac{dx}{dt} = 0$  et  $\frac{dy}{dt} = v_0 > 0$ .

2. On place à présent la particule dans un champ magnétique constant  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  et un champ électrique constant  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_y$  avec  $E_0 > 0$  et  $E_0/B_0 < c$ .

Montrer qu'il existe un référentiel ( $K_d$ ), ( $O', x', y', z'$ ), dans lequel la particule est soumise à l'action du seul champ magnétique. Décrire le mouvement dans ce référentiel.

On donne les conditions initiales : à  $t = 0$ ,  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $\frac{dx'}{dt} = 0$  et  $\frac{dy'}{dt} = v_0 > 0$ . On suppose de plus qu'à  $t = 0$ , les deux référentiels ( $K$ ) et ( $K_d$ ) coïncident. En déduire les expressions de  $x(t)$  et de  $y(t)$  dans le référentiel du laboratoire. Représenter schématiquement l'allure de la projection dans le plan ( $Oxy$ ) de la trajectoire de la particule dans le référentiel du laboratoire dans les trois cas suivants :  $v_0 > \frac{E_0}{B_0}$ ,  $v_0 = \frac{E_0}{B_0}$  et  $v_0 < \frac{E_0}{B_0}$ .

3. On considère un plan infini d'électrons sans interaction, de densité surfacique uniforme  $N_S$ . Ces charges sont soumises à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  orthogonal au plan ( $Oxy$ ) qui contient les charges et à celle d'un champ électrique  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y$ . Décrire brièvement le mouvement des charges et calculer le vecteur densité de courant moyen  $\vec{j}_S$  dans le plan ( $Oxy$ ). Montrer que la grandeur  $R_H = \frac{E_0}{\|\vec{j}_S\|}$  est homogène à une résistance.

Exprimer  $R_H$  en fonction de  $N_S$ ,  $B_0$  et  $e$ .

## 2 Sonde à effet Hall et mesure

On réalise un gaz bidimensionnel d'électrons libres, à l'interface entre deux semiconducteurs que l'on a fait croître couche atomique après couche atomique dans la direction ( $Oz$ ) (voir figure 2) :

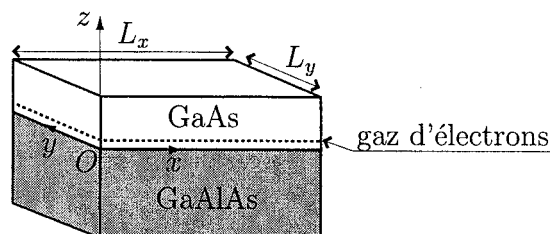


FIG. 2 – Structure de la sonde à effet Hall. Le gaz d'électrons occupe un espace bidimensionnel représenté par les pointillés.

Une barrière composée de GaAlAs est dopée en volume jusqu'au voisinage de l'interface avec le semiconducteur GaAs qui abrite le gaz d'électrons. L'énergie potentielle  $V(z)$  de confinement au voisinage de l'interface est schématisée par un puits triangulaire (voir figure 3).

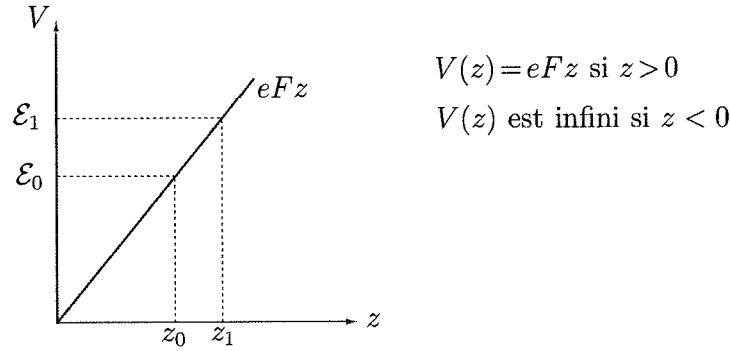


FIG. 3 – Énergie potentielle  $V(z)$  de confinement au voisinage de l'interface.

## 2.1 Bandes d'énergie

On note  $F$  la norme du champ électrique selon l'axe  $z$ , à l'interface. Dans le plan ( $Oxy$ ) de l'interface, les électrons sont considérés comme libres, à condition de prendre pour la masse de l'électron, une masse effective  $m^* = 0,07m_e$  où  $m_e$  est la masse de l'électron dans le vide (Cf. formulaire). L'énergie potentielle électrostatique  $V(z)$  est fonction uniquement de  $z$ .

Soit  $\Psi(x, y, z)$ , la fonction d'onde électronique décrivant un électron de la bande de conduction situé dans le puits triangulaire. On rappelle que la fonction  $\Psi$  obéit à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\Psi(x, y, z) + V(z)\Psi(x, y, z) = \mathcal{E}\Psi(x, y, z)$$

où  $\mathcal{E}$  est l'énergie de l'état quantique et où  $\Delta$  désigne le laplacien.

1. On cherche les solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\Psi(x, y, z) = f(z)\Phi(x, y)$$

Montrer que  $\Phi(x, y)$  et  $f(z)$  sont solutions des équations :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m^*}f''(z) + V(z)f(z) = \mathcal{E}_z f(z) \\ -\frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\phi(x, y) = \mathcal{E}_{x,y}\phi(x, y) \end{cases}$$

avec  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_z + \mathcal{E}_{x,y}$ .

On définit une bande d'énergie associée à l'énergie  $\mathcal{E}_z$ , comme l'ensemble des niveaux d'énergie  $\mathcal{E}_z$  fixée et d'énergie  $\mathcal{E}_{x,y}$  quelconque.

### 2. Mouvement dans le plan

- (a) On cherche  $\Phi(x, y)$  sous la forme :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \exp(ik_x x) \exp(ik_y y)$$

où  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions de la sonde selon les directions  $Ox$  et  $Oy$  (voir figure 2). Donner alors l'expression de  $\mathcal{E}_{x,y}$  en fonction de  $k_x$  et  $k_y$ .

- (b) Pour chaque bande d'énergie associée au mouvement selon  $Oz$ , on admet que le nombre d'états quantiques par unité de surface et d'énergie est donné par la formule (où l'on a tenu compte de la dégénérescence de spin) :

$$g_{x,y}(\mathcal{E}) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette expression et donner la valeur de cette constante pour GaAs en nombre d'états quantiques par meV (milliélectronvolt) et par m<sup>2</sup>.

### 3. Mouvement selon Oz

On se restreint ici à l'étude du mouvement selon la direction Oz. On considère dans cette question le puits triangulaire représenté sur la figure 3, dont l'énergie s'écrit :

$$\text{pour } z < 0, \quad V(z) = +\infty \quad \text{et} \quad \text{pour } z > 0, \quad V(z) = eFz$$

Afin de trouver l'expression des énergies propres  $\mathcal{E}_i$  pour le mouvement selon Oz, on utilise la condition de quantification concernant l'impulsion, écrite par Sommerfeld :

$$\int_0^{z_i} p_i(z) dz = \left( i + \frac{3}{4} \right) \pi \hbar, \quad i \in \mathbb{N}$$

où  $z_i$  vérifie  $V(z_i) = \mathcal{E}_i$  (voir figure 3) et où  $p_i(z)$  est la composante selon Oz, à la coordonnée  $z$ , de l'impulsion  $\vec{p}_i$ .

- Écrire de façon classique la conservation de l'énergie d'une particule de masse  $m$  soumise à l'énergie potentielle  $V(z)$  et en déduire l'expression de l'impulsion  $p_i(z)$  en fonction de l'énergie  $\mathcal{E}_i$  du niveau  $i$ . Établir alors l'expression de l'énergie  $\mathcal{E}_i$ .
- Calculer  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}_1$  en meV dans le cas d'une jonction GaAlAs/GaAs pour laquelle  $F = 6,5 \cdot 10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ .

### 4. Cas général

On considère à présent le mouvement général dans les trois directions de l'espace.

- En utilisant les résultats des sous questions précédentes, montrer que chaque état électronique peut être caractérisé par trois paramètres  $(i, k_x, k_y)$  et que son énergie est :  $\mathcal{E}(k) = \mathcal{E}_i + \Lambda k^2$  où  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  et  $\Lambda$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $m^*$  et  $\hbar$ . Tracer l'allure de  $\mathcal{E}(k)$  pour différents niveaux  $\mathcal{E}_i$ .
- Exprimer le nombre maximal d'électrons par unité de surface,  $N_{S\text{max}}$ , en fonction de  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}_1$  et des constantes du problème, pour que seule la bande  $\mathcal{E}_0$  soit peuplée, dans la limite des très basses températures. Effectuer l'application numérique.
- Le nombre d'électrons par unité de surface (ou densité surfacique) est égal à  $N_S = 8 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Calculer l'énergie du dernier état occupé et donner un critère portant sur la température qui permet de savoir que la deuxième bande n'est pas peuplée. Dans toute la suite, on supposera cette condition vérifiée.

## 2.2 Effet Hall dans la matière

La sonde est taillée dans un cristal contenant le gaz d'électrons bidimensionnel de densité surfacique  $N_S$ . La partie active est un carré de côté  $L_x = L_y = L$ . Elle est placée dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan  $(Oxy)$ ,  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On note  $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r}) \vec{e}_x + E_y(\vec{r}) \vec{e}_y$  le champ électrique dans le plan  $(Oxy)$ . On fait circuler un courant dans cette sonde et on suppose que les électrons dans le plan sont soumis à l'action de la force de Lorentz et d'une force de frottement sur le réseau cristallin  $\vec{f} = -\frac{m^* \vec{v}}{\tau}$  où  $\tau$  désigne un temps de collision moyen et  $m^*$  la masse effective de l'électron. Dans tous les calculs, la masse de l'électron est remplacée par sa masse effective :  $m^* = 0,07m_e$ .

- Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron, et montrer que la solution en régime permanent peut se mettre sous la forme tensorielle :

$$\begin{pmatrix} j_{Sx} \\ j_{Sy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$



où la matrice  $\sigma$  est appelée *tenseur de conductivité* et où  $\vec{j}_S$  est la densité surfacique de courant qui parcourt le gaz d'électrons bidimensionnel.

Exprimer les composantes du tenseur conductivité en fonction de la fréquence cyclotron (positive)  $\omega_c = \frac{eB_0}{m^*}$  et de  $\sigma_0 = \frac{N_s e^2 \tau}{m^*}$ . Que représente ce dernier terme ?

- Lors d'une mesure d'effet Hall, un courant circule, en régime permanent, dans la direction  $Ox$  en présence d'un champ  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On mesure la tension transversale  $V_H$  à l'aide d'un voltmètre d'impédance d'entrée infinie (voir figure 4) :

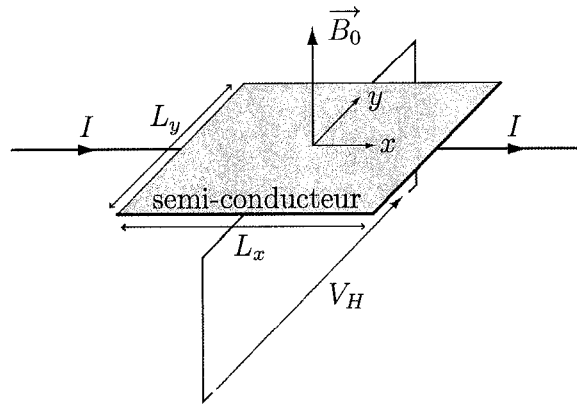


FIG. 4 – Schéma de la partie active de la sonde à effet Hall.

Établir la relation entre  $j_{Sx}$  et  $E_y$  en régime permanent en fonction de  $\sigma_0$ ,  $\omega_c$  et  $\tau$  (effet Hall).

- En déduire l'expression de la résistance de Hall définie par :  $R_H = \frac{V_H}{I}$ , en fonction de  $e$ ,  $B_0$  et  $N_s$ .
- Application numérique : on polarise une sonde à effet Hall avec une densité surfacique de courant limitée à cause des problèmes d'échauffement à  $j_S = 200 \text{ A.m}^{-1}$ . Exprimer la sensibilité de la sonde de Hall définie par  $s = \frac{\delta V_H}{\delta B}$ , en fonction de  $L$ ,  $N_s$ ,  $j_S$  et  $e$ . En prenant  $N_s = 8 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ , calculer la sensibilité de la sonde de Hall dans les deux cas suivants :  $L = 100 \text{ nm}$  et  $L = 5 \text{ }\mu\text{m}$ .

L'imperfection des appareils limite la précision de la mesure de la tension de Hall à  $\pm 1 \text{ nV}$ . Quel est le champ minimal que l'on peut mesurer à l'aide de ces deux sondes ?

### 3 Bruit de mesure

#### 3.1 Signal aléatoire et densité spectrale de bruit

On considère un signal aléatoire  $v(t)$  à valeurs réelles, de moyenne temporelle nulle, appelé *bruit* dans la suite du problème. On note  $\hat{v}(f)$  la transformée de Fourier de  $v(t)$ , définie dans le formulaire. On définit la fonction de corrélation du signal  $v(t)$  par :

$$C(\tau) = \langle v(t)v(t + \tau) \rangle$$

la valeur moyenne  $\langle \dots \rangle$  étant une moyenne statistique sur l'ensemble des électrons. La fonction de corrélation ne dépend pas de  $t$  pour les signaux considérés.

Pour ces signaux, la valeur moyenne peut également être prise sur le temps (hypothèse ergodique) selon la formule (indépendante du choix de  $t_0$ ) :

$$C(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_0 - T_0/2}^{t_0 + T_0/2} v(t)v(t + \tau) dt$$

On définit enfin la densité spectrale de bruit  $S(f)$  par la transformée de Fourier de la fonction de corrélation, c'est-à-dire :

$$S(f) = \widehat{C}(f)$$

1. Quel est le sens de la quantité  $C(0)$ ? Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)df = \langle v^2(t) \rangle$ . Justifier le terme de densité spectrale pour la quantité  $S(f)$ .
2. Montrer que  $C(\tau) = C(-\tau)$ . En déduire que la densité spectrale  $S(f)$  est une fonction réelle.
3. Dans les deux cas suivants où l'on connaît la fonction de corrélation, calculer la densité spectrale du bruit, représenter la fonction  $S(f)$  et interpréter le résultat obtenu pour :
  - (a) un bruit blanc,  $C(\tau) = \Gamma\delta(\tau)$ ;
  - (b) un bruit lorentzien,  $C(\tau) = C_0 \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|\right)$ .

### 3.2 Fluctuations de la vitesse dans les conducteurs

On considère un conducteur à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , constitué d'un réseau cristallin dans lequel se déplacent des électrons à la vitesse  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_x$ . Les porteurs de charge sont soumis, de la part de ce réseau, à une force de frottement  $\vec{f}(t) = -\frac{m^*}{\tau_0}v(t)\vec{e}_x$  qui freine leur mouvement et à une force aléatoire  $\vec{f}_a(t) = m^*\eta(t)\vec{e}_x$  où  $m^*$  est la masse effective des porteurs de charge et  $\eta(t)$  un bruit blanc caractérisé par les relations :

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \Gamma\delta(\tau)$$

les valeurs moyennes  $\langle \dots \rangle$  étant des moyennes statistiques sur l'ensemble des électrons.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron de masse effective  $m^*$  et écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse  $v(t)$ .
2. Montrer que la solution de cette équation vérifiant  $v(0) = v_0$  est :

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \eta(u) du$$

En déduire que le système perd rapidement la mémoire de ses états antérieurs.

Dans la suite de cette partie, on considérera que le régime transitoire est négligeable.

3. Calculer  $\langle v(t) \rangle$  et donner l'expression de  $\langle v^2(t) \rangle$  pour  $t$  grand devant  $\tau_0$ , en fonction de  $\Gamma$  et  $\tau_0$  (on pourra intervertir les intégrales temporelles et les moyennes statistiques).
4. Le théorème d'équipartition de l'énergie implique par ailleurs qu'à l'équilibre thermodynamique :  $\frac{1}{2}m^* \langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ . En déduire la relation qui existe entre les deux grandeurs qui caractérisent les forces dans le conducteur,  $\Gamma$  et  $\lambda = \frac{m^*}{\tau_0}$ .
5. Montrer que la fonction de corrélation de la vitesse s'écrit :

$$\langle v(t)v(t+\tau) \rangle = \frac{k_B T}{m^*} \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|\right)$$

Pour ce faire, on calculera  $\langle v(t)v(t+\tau) \rangle$  pour  $t$  grand devant  $\tau_0$  (condition pour que le résultat ne dépende pas de  $t$ ) et  $\tau > 0$  et on utilisera la parité de la fonction de corrélation.

6. En déduire la densité spectrale de la vitesse  $S(f)$ . Tracer la courbe  $20 \log(S)$  en fonction de  $\log(f)$  pour  $f > 0$ . Mettre en évidence une fréquence de coupure  $f_c$  que l'on définira. En déduire que, pour  $0 < f \ll f_c$  :

$$S(f) = \frac{2k_B T \tau_0}{m^*}$$

Sachant que  $\tau_0 < 10$  ns, que peut-on dire de  $f_c$ ? Dans la suite, on ne s'intéresse qu'aux fréquences inférieures à cette fréquence de coupure.

### 3.3 Bruit de Johnson Nyquist dans une résistance

On considère un gaz d'électrons bidimensionnel de longueur  $L_x$  et de largeur  $L_y$  (voir figure 4), de densité surfacique  $N_s$ , soumis aux forces  $\vec{f}$  et  $\vec{f}_a$  définies en 3.2 ainsi qu'à l'action du champ électrique  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ .

1. Montrer que la conductivité surfacique de ce gaz est :

$$\sigma_S = \frac{N_s e^2 \tau_0}{m^*}$$

2. Établir l'expression de la résistance  $R$  du gaz bidimensionnel en fonction de  $N_s$ ,  $e$ ,  $m^*$ ,  $\tau_0$ ,  $L_x$  et  $L_y$ .
3. Exprimer l'intensité du courant  $I(t)$  des électrons dans le semiconducteur à l'instant  $t$  en fonction de  $e$ ,  $L_x$  et des vitesses  $v_i(t)$  de chaque électron ( $i \in (1, 2, \dots, N)$ , où  $N$  est le nombre total d'électrons contenus dans le gaz bidimensionnel).

En déduire l'expression de la différence de potentiel  $V(t)$  aux bornes de ce conducteur en fonction de  $R$ ,  $e$ ,  $L_x$  et des vitesses  $v_i$ .

4. Écrire la différence de potentiel  $V(t)$  sous la forme :  $V(t) = \sum_i V_i(t)$  et donner l'expression des  $V_i(t)$ . Exprimer la densité spectrale de la quantité  $V_i(t)$ , notée  $S_{V_i}(f)$ , en fonction de la densité spectrale de vitesse  $S(f)$  dont l'expression est donnée en 3.2.6.

5. Dans le cas où  $V = \sum_{i=1}^N V_i$ , on admet que :  $S_V(f) = N S_{V_i}(f)$ . Déduire de cette relation et de la question précédente, la relation ( $R$  est la résistance) :

$$S_V(f) = 2k_B T R$$

## 4 Champ de moments magnétiques

### 4.1 Moments magnétiques et moments cinétiques. Facteur de Landé.

Soit un référentiel ( $Oxyz$ ) galiléen, dans lequel un ensemble de charges  $q$ , situées aux points  $M_n$  tels que  $\vec{r}_n = \overrightarrow{OM_n}$ , se déplacent avec la vitesse  $\vec{v}_n = \frac{d\overrightarrow{OM_n}}{dt}$ . Il n'y a aucun mouvement d'ensemble et  $\vec{j} = \sum_n q \vec{v}_n = \vec{0}$ .

On désigne par *moment magnétique* d'une collection de charge, la quantité classique, indépendante du point fixe  $O$  choisi :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_n \frac{1}{2} \vec{r}_n \wedge q \vec{v}_n$$

1. Écrire le moment cinétique en  $O$ ,  $\vec{L}_O$ , de l'ensemble des charges. Montrer que le moment magnétique de l'ensemble est proportionnel au moment cinétique :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \gamma_c \vec{L}_O$$

où  $\gamma_c$  est le *rapport gyromagnétique classique* dont on donnera l'expression en fonction de  $q$  et  $m$ .

2. Dès lors que l'on considère les aspects quantiques de la matière, le moment cinétique  $\vec{J}$  ne se résume plus au moment orbital  $\vec{L}$  mais comprend également le spin  $\vec{S}$  des particules :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

La relation entre moment cinétique et moment magnétique devient :

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{J} \quad \text{avec} \quad \gamma = -g \frac{e}{2m_e} \quad \text{où} \quad g \text{ est le facteur de Landé.}$$

La relation entre  $g$  et les nombres quantiques  $L$ ,  $S$  et  $J$  qui caractérisent l'état quantique atomique ou moléculaire est :

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

- (a) Exprimer les valeurs possibles de  $\mathcal{M}_z$ , projection de  $\vec{\mathcal{M}}$  sur l'axe  $Oz$ , en fonction de  $g$ , du magnéton de Bohr  $\mu_B = \frac{-e\hbar}{2m_e}$  et d'un nombre quantique  $m$  dont on précisera la définition et les valeurs possibles.

- (b) **Le spin de l'électron**

Quelles valeurs prend le nombre  $m$  dans le cas d'un moment cinétique demi entier pour lequel  $L = 0$  et  $J = S = 1/2$ ? Calculer le facteur de Landé des spins électroniques et donner les valeurs possibles de la composante  $\mathcal{M}_z$ .

- (c) **La molécule  $\text{Fe}_8$**

Les propriétés magnétiques de la molécule  $\text{Fe}_8$  (qui sera étudiée dans la deuxième partie) peuvent être correctement décrites par un "macro-spin"  $S = 10$ . Calculer le facteur de Landé dans le cas d'un macro-spin  $S = 10$  avec  $L = 0$  et  $J = S = 10$ . Donner les valeurs permises de la composante  $\mathcal{M}_z$ .

## 4.2 Champ créé par la matière aimantée

Dans cette question, on revient à une représentation classique. On rappelle le champ magnétique créé en un point  $P$  par un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mathcal{M}}$  situé au point  $O$  :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \left( 3 \left( \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r} \right) \vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}} \right) \quad \text{où} \quad \vec{r} = \vec{OP} \quad \text{et} \quad r = OP$$

### 1. Champ sur l'axe d'un dipôle isolé

- (a) Exprimer le champ  $\vec{B}$  créé sur l'axe  $Oz$  colinéaire à  $\vec{\mathcal{M}}$ , à la distance  $d$  du point  $O$ , par un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mathcal{M}}$  situé en  $O$ .
- (b) Application numérique : une nanoparticule comprenant un moment magnétique unique est déposée sur la surface d'une sonde à effet Hall. On suppose que le moment magnétique est perpendiculaire à la surface de la sonde. Le champ magnétique est mesuré au niveau du gaz électronique, soit à une distance  $d = 200$  nm de la particule. Calculer le champ maximal que peut induire un seul atome de fer pour lequel  $\mathcal{M} = 4\mu_B$ . Même question pour une molécule  $\text{Fe}_8$  dont le macro-spin vaut  $S = 10$ .

- (c) Quel est le principal obstacle à la mesure du moment magnétique d'une seule particule ou atome, si on utilise cette technique de sonde de Hall ?

## 2. Champ magnétique de la matière solide

On considère une sphère homogène, de rayon  $R$ , uniformément aimantée, plongée dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . Le vecteur aimantation (moment magnétique moyen par unité de volume) de la sphère est :  $\vec{M} = M \vec{e}_z$ .

- (a) Montrer que les courants d'aimantation qui apparaissent ont une densité volumique nulle et une densité surfacique (en coordonnées sphériques) :

$$\vec{J}_{Sa} = M \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

- (b) Calculer le champ magnétique créé par ces courants au centre  $O$  de la sphère.  
 (c) Calculer le champ magnétique à l'extérieur de la sphère en assimilant celle-ci à un dipôle magnétique dont on précisera le moment.  
 (d) On suppose que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur de la sphère. Montrer que cette hypothèse est compatible avec les relations de passage du champ magnétique à la surface de la sphère.  
 (e) En déduire que le champ magnétique en un point situé à l'extérieur de la sphère, sur l'axe  $Oz$ , au voisinage immédiat de la surface, est :

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

## 3. Aimantation d'un cristal ferromagnétique

Soit  $\sigma_{\mu_B}$  le nombre de magnéton de Bohr porté par chaque atome dans un cristal composé d'un seul type d'atome. Exprimer l'aimantation à saturation du matériau en fonction de  $\sigma_{\mu_B}$ , de la masse volumique  $\rho$  du cristal, de sa masse molaire  $M_o$  et du nombre d'Avogadro. Calculer  $\mu_0 M_{\text{sat}}$  (en teslas) pour un cristal de fer pour lequel  $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\sigma_{\mu_B} = 2,2$  et  $M_o = 56 \text{ g.mol}^{-1}$ .

## 4. Aimantation d'un cristal paramagnétique

On considère un grain de DPPH (Diphenylpicrylhydrazil) paramagnétique de forme sphérique. Le DPPH a une grande densité d'électrons non appariés :  $n = 2 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}$ .

- (a) Exprimer l'aimantation à saturation en fonction de la densité d'électrons non appariés et de  $\mu_B$ . Calculer  $\mu_0 M_{\text{sat}}$  (en teslas). Comparer cette valeur avec la valeur obtenue pour le fer.  
 (b) On note  $\chi$  sa susceptibilité et on plonge l'ensemble dans un champ magnétique  $B_0$ . On suppose que le sel paramagnétique reste dans le régime linéaire :  $\mu_0 \vec{M} = \chi \vec{B}_0$ . On donne :  $\chi = 2,5 \cdot 10^{-5}$ .  
 i. Calculer la valeur de  $\mu_0 M$ , notée  $\mu_0 M_0$ , pour un champ  $B_0 = 10 \text{ mT}$ . Comparer cette valeur avec la valeur à saturation. L'approximation linéaire est-elle justifiée ?  
 ii. On dépose un grain de DPPH sur une sonde à effet Hall placée elle-même dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  perpendiculaire au plan d'électrons. Calculer le champ mesuré par la sonde (on supposera que le gaz bidimensionnel est à proximité immédiate de la matière aimantée). Quelle est la différence  $\Delta B$  entre le champ mesuré en présence de DPPH et le champ mesuré en l'absence de DPPH ? Conclure sur la faisabilité de la mesure de  $\chi$  par cette méthode.

## Deuxième partie

# Mesures d'aimantation

### 5 Résonance paramagnétique électronique

#### 5.1 Effet gyroscopique et précession de Larmor

On place un dipôle magnétique, d'origine électronique, de moment  $\vec{M}$  dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On rappelle la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique associés au dipole magnétique :  $\vec{M} = \gamma \vec{L}$  où le rapport gyromagnétique  $\gamma$  de l'électron est négatif.

1. Donner sans démonstration, les expressions de l'énergie potentielle du dipôle dans le champ magnétique, de la résultante et du moment de l'action mécanique exercée par le champ magnétique sur le dipôle.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique au dipôle. En déduire que la norme du moment dipolaire magnétique est constante au cours du temps, de même que sa projection sur l'axe  $Oz$ . Montrer que le moment magnétique tourne autour de l'axe  $Oz$  à la pulsation de Larmor :  $\omega_L = |\gamma|B$ . Préciser le sens de rotation du dipôle.

#### 5.2 Configuration de mesure

On place un grain sphérique microscopique de DPPH (Diphenylpicrylhydrazil) d'aimantation  $\vec{M}$  (moment magnétique moyen par unité de volume) sur une sonde de Hall de même taille. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0$  aligné sur l'axe  $Oz$  perpendiculaire au plan de la sonde (on rappelle que la sonde de Hall est sensible au champ magnétique orthogonal à son plan). On superpose à ce champ  $\vec{B}_0$  un autre champ magnétique, de norme constante, tournant à la pulsation  $\omega$  dans le plan  $(Oxy)$  de la sonde :  $\vec{B}_1(t) = B_1 \vec{u}_1(t)$  (où  $\vec{u}_1(t)$  est un vecteur unitaire tournant dans le plan  $(Oxy)$  à la pulsation  $\omega$ ) (Cf. fig. 5).

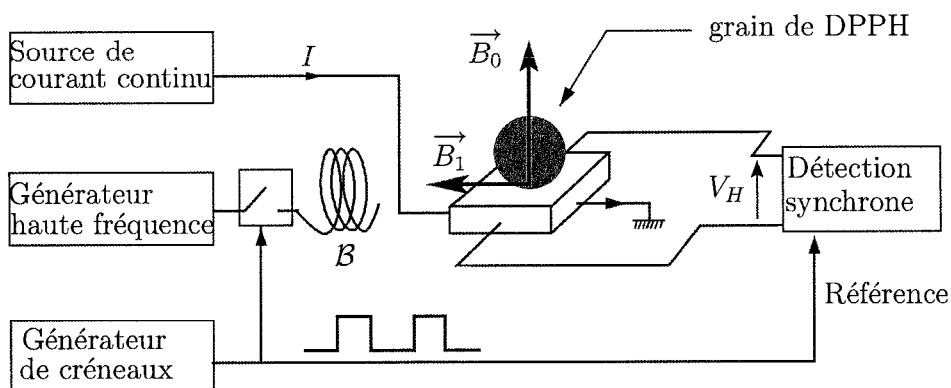


FIG. 5 – Configuration de mesure. Un grain sphérique de DPPH est déposé sur la sonde

Le champ uniforme  $\vec{B}_0$  est créé par un dispositif non représenté sur la figure. Le champ  $\vec{B}_1$  est créé par la bobine  $B$ . Il tourne, dans le plan de la sonde, autour de l'axe  $Oz$ , à la fréquence  $f = 265$  MHz. Il est "allumé" et "éteint" périodiquement, grâce au générateur de créneaux, avec une fréquence  $f_R = 45$  kHz.

On note  $\omega_0 = |\gamma|B_0 = -\gamma B_0$ ,  $\delta\omega = \omega - \omega_0$  et  $\omega_1 = |\gamma|B_1 = -\gamma B_1$ . On définit  $(K_t)$  le référentiel tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de  $Oz$ . On appelle  $(K)$  le référentiel du laboratoire  $(Oxyz)$ .

1. Appliquer le théorème du moment cinétique en  $O$  à un dipôle de moment  $\vec{\mathcal{M}}$  dans le référentiel du laboratoire. En déduire l'expression de  $\left(\frac{d\vec{\mathcal{M}}(t)}{dt}\right)_{(K_t)}$  dans le référentiel tournant, puis celle de  $\left(\frac{d\vec{M}(t)}{dt}\right)_{(K_t)}$  dans ce même référentiel, en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_0$ , du vecteur aimantation  $\vec{M}$  et des vecteurs unitaires  $\vec{e}_z$  et  $\vec{u}_1(t)$ .
2. Pour tenir compte des phénomènes de relaxation (interaction avec un réservoir), on introduit un couple de dissipation :

$$\vec{\Gamma}_r = \frac{\vec{M}_0 - \vec{M}(t)}{\tau}$$

où  $\vec{M}_0 = M_0 \vec{e}_z$  est l'aimantation à l'équilibre créée par  $\vec{B}_0$  en l'absence de  $\vec{B}_1$ .

Écrire la nouvelle expression de  $\left(\frac{d\vec{M}(t)}{dt}\right)_{(K_t)}$ .

3. Soient  $u$ ,  $v$ , et  $M_z$ , les composantes cartésiennes du vecteur  $\vec{M}$  dans la base orthonormée  $(\vec{u}_1(t), \vec{v}_1(t), \vec{e}_z)$  où  $\vec{v}_1(t)$  est un vecteur du plan  $(Oxy)$  orthogonal à  $\vec{u}_1(t)$  :  $\vec{M}(t) = (u(t), v(t), M_z(t))$  dans cette base.

Établir les équations de Bloch qui donnent l'expression des dérivées  $\frac{du(t)}{dt}$ ,  $\frac{dv(t)}{dt}$  et  $\frac{dM_z(t)}{dt}$ , en fonction de  $u(t)$ ,  $v(t)$ , et  $M_z(t)$ , ainsi que des pulsations  $\omega_0$ ,  $\omega$  et  $\omega_1$ .

4. On admettra que la solution de ce système en régime permanent est :

$$\begin{cases} u = -M_0 \frac{\omega_1 \delta \omega \tau^2}{1 + \delta \omega^2 \tau^2 + \omega_1^2 \tau^2} \\ v = -M_0 \frac{\omega_1 \tau}{1 + \delta \omega^2 \tau^2 + \omega_1^2 \tau^2} \\ M_z = M_0 \frac{1 + \delta \omega^2 \tau^2}{1 + \delta \omega^2 \tau^2 + \omega_1^2 \tau^2} \end{cases}$$

Tracer l'allure des courbes  $u$ ,  $v$  et  $M_z$  en fonction de  $\delta \omega$ . Commenter. Préciser le comportement de  $M_z$  pour  $\delta \omega = 0$  et donner une interprétation physique du phénomène.

5. Exprimer en fonction de  $\mu_0$  et  $M_0$ , la différence entre la valeur de la quantité  $\mu_0 M_z$  en présence du champ  $B_1$  et en l'absence de celui-ci, à la résonance  $\delta \omega = 0$  :  $\Delta(\mu_0 M_z) = (\mu_0 M_z)_{\text{on}} - (\mu_0 M_z)_{\text{off}}$ . On donne  $\tau = 60$  ns et  $B_1 = 0,15$  mT. En déduire la valeur numérique du rapport  $\Delta(\mu_0 M_z)/\mu_0 M_0$ .
6. Le champ  $\vec{B}_1$  est "allumé" et "éteint" à la fréquence  $f_R = 45$  kHz. Montrer que la fonction  $V_H(t)$  mesurée par la sonde à effet Hall polarisée en courant continu est une fonction en créneaux. On appellera  $V_0$  et  $V_1$  les valeurs minimale et maximale de  $V_H(t)$  et on notera  $\Delta V_H = V_1 - V_0$ . On supposera acquis le résultat de la question 4.2.2 ainsi que la proportionnalité entre la mesure  $V_H$  et le champ  $B$  perpendiculaire à la sonde.

### 5.3 Résultats expérimentaux

L'expérience décrite précédemment est réalisée, à température ambiante  $T = 300$  K, avec une sonde de Hall de côté  $5 \mu\text{m}$ , dont la sensibilité est :  $s = 0,8 \text{ V} \cdot \text{T}^{-1}$ . On donne  $B_1 = 0,15$  mT.

La courbe représentant  $\Delta V_H = V_1 - V_0$  est reportée sur la figure 6<sup>1</sup> pour plusieurs valeurs du champ magnétique statique  $B_0$ .

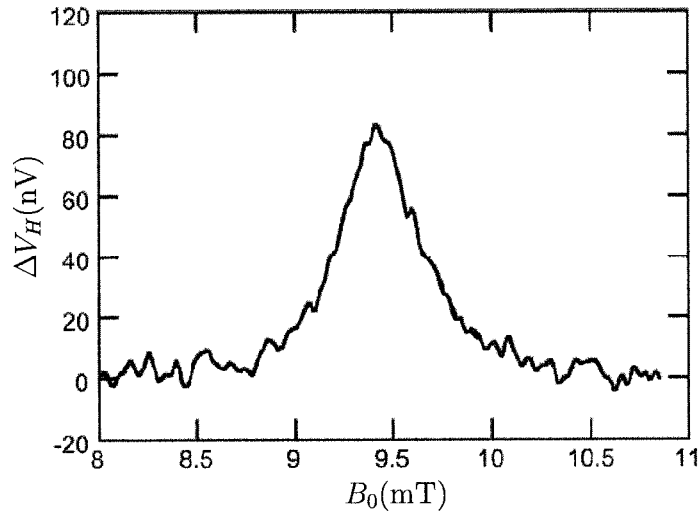


FIG. 6 – Résonance de spin pour un grain de DPPH mesuré à l’aide d’une sonde à effet Hall. En ordonnées : la mesure -en nanovolts- de la grandeur  $\Delta V_H = V_1 - V_0$  définie en 5.2.6.

1. Expliquer pourquoi cette courbe présente un maximum. Montrer que la connaissance du champ  $B_0$  à la résonance permet de calculer  $|\gamma|$ . Effectuer l’application numérique.
2. Évaluer la largeur du pic et donner une valeur approximative du temps de relaxation  $\tau$ , en précisant le critère utilisé.

Une étude détaillée des résultats expérimentaux permettrait de trouver  $\tau = 60$  ns, valeur adoptée dans la suite de la question.

3. On se propose enfin de déterminer  $\chi$  pour le DPPH. Évaluer la valeur maximale de  $\Delta V_H$  d’après la figure 6. En déduire la valeur de  $\chi$  pour le DPPH (on utilisera la définition de  $\chi$  donnée en 4.2.4.b, et on admettra le résultat de la question 4.2.2). La valeur tabulée est  $\chi = 2,5 \cdot 10^{-5}$ . Proposer une explication pour interpréter la différence.

## 5.4 Détection synchrone et bruit de mesure

Pour effectuer la mesure précédemment décrite, la tension de Hall est injectée en entrée de la détection synchrone dont l’impédance d’entrée est supposée infinie (voir figure 7).

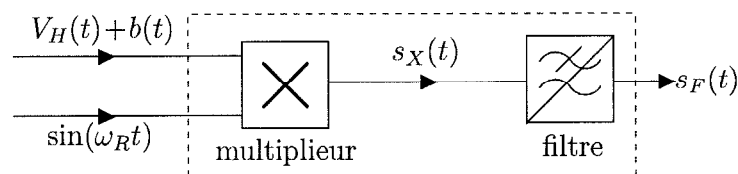


FIG. 7 – Détection synchrone

Le signal est la somme de deux termes :  $s(t) = V_H(t) + b(t)$ , où  $b(t)$  est le bruit du composant et de la chaîne de mesure. La densité spectrale totale de bruit est la somme de la densité spectrale de bruit thermique  $S_V(f)$  (étudié à la question 3.3 de la première partie), de la densité spectrale du bruit des appareils  $S_A(f)$  et d’un bruit supplémentaire en  $1/f$  :

<sup>1</sup> G.Boero et al., Applied Physics Letters 79, p1498 (2001).



$$S(f) = S_V(f) + S_A(f) + \frac{\alpha}{f} \quad \text{où} \quad \alpha = \text{cste}$$

Le principe de la détection synchrone consiste dans un premier temps à multiplier le signal  $s(t)$  par la composante  $\sin(\omega_R t)$  où  $\omega_R$  est la pulsation à laquelle on allume et on éteint le champ  $B_1$ . Le signal de sortie du multiplieur est :  $s_X(t) = (V_H(t) + b(t)) \sin(\omega_R t)$ . Dans un deuxième temps, la détection synchrone filtre le signal pour ne conserver que la composante continue. On note  $H(f)$  la fonction de transfert de ce filtre définie par :  $\widehat{s}_F(f) = H(f)\widehat{s}_X(f)$  (voir figure 7). La fonction  $H(f)$  vaut 1 si  $|f| < \Delta f$ , 0 sinon, avec  $\Delta f \ll f_R$ .

1. On suppose d'abord que le bruit est nul ( $b(t) = 0$ ). Utiliser le formulaire pour écrire le signal  $V_H(t)$  (trouvé en 5.2.6) sous forme d'une série de Fourier. Écrire le signal  $s_X(t)$  en sortie du multiplieur. Le signal passe ensuite par le filtre  $H(f)$ . Quelle est la valeur  $s_{F0}(t)$  du signal en sortie du filtre ?
2. On s'intéresse maintenant au bruit  $b(t)$  caractérisé par sa densité spectrale  $S(f)$ . On appelle  $b_X(t)$  et  $b_F(t)$  les signaux obtenus respectivement en sortie du multiplieur et en sortie du filtre. Soit  $C_X(\tau)$  la fonction de corrélation de  $b_X(t)$  et  $C(\tau)$  celle du bruit  $b(t)$ . On admet que :

$$C_X(\tau) = \frac{1}{2}C(\tau) \cos(\omega_R \tau)$$

- (a) Montrer que la densité spectrale du bruit (définie à la question 3.1) en sortie du multiplieur s'écrit :

$$S_X(f) = \frac{1}{4}(S(f + f_R) + S(f - f_R))$$

- (b) En déduire que la densité spectrale du bruit après le filtre est donnée par la formule :

$$S_F(f) = \frac{1}{2}S(f_R) \quad \text{si} \quad |f| < \Delta f \quad \text{et} \quad S_F(f) = 0 \quad \text{sinon.}$$

- (c) Montrer finalement que  $\langle b_F^2(t) \rangle = S(f_R)\Delta f$ . Comment diminuer la valeur efficace du bruit  $\sqrt{\langle b_F^2(t) \rangle}$  en sortie de la détection synchrone ?
- (d) **Application numérique**

On s'intéresse au bruit de mesure que l'on peut observer sur la courbe expérimentale (figure 6). On évalue les fluctuations à  $\sqrt{\langle b_F^2(t) \rangle} = 4,5 \text{ nV}$ . On donne :  $\Delta f = 0,24 \text{ Hz}$  et  $S_A(f) = 2,5 \text{ nV}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ . La résistance de la sonde est  $R = 200 \Omega$ .

En utilisant le résultat de la question précédente, calculer la valeur de la densité spectrale du bruit total, en  $\text{nV}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ , puis celle du bruit thermique (dont l'expression a été établie à la question 3.3) dans la même unité. En déduire la valeur de la densité spectrale du bruit en  $1/f$ . À quelle fréquence  $f'_R$  devrait-on travailler pour que cette valeur reste inférieure à la densité spectrale du bruit des appareils ?

## 6 Anisotropie magnétique et "effet tunnel de spin"

### 6.1 La molécule $\text{Fe}_8$

La molécule  $\text{Fe}_8$  est constituée de 8 atomes de fer tenus entre eux par des ligands. Les interactions ferromagnétiques et antiferromagnétiques dans la molécule entraînent l'orientation de six spins atomiques selon l'axe  $Oz$  et deux de façon antiparallèle. Le spin équivalent est  $S = 10$  : la molécule  $\text{Fe}_8$  est ainsi un "macro-spin". Ces molécules sont ensuite cristallisées en un monocristal de taille nanométrique et de symétrie triclinique, qui est déposé sur la surface d'une nanosonde à effet Hall. L'anisotropie magnétique entraîne une dépendance quadratique de l'hamiltonien en fonction des opérateurs de spin<sup>2</sup> : si  $Oz$  est l'axe facile d'aimantation et  $B_z$  le champ selon  $Oz$ ,

<sup>2</sup> C.Sangregorio et al., Physical Review Letters 78, p.4645 (1999)

$$\mathcal{H} = -\frac{D}{\hbar^2} \hat{S}_z^2 + \frac{K}{\hbar^2} (\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2) - \frac{g\mu_B}{\hbar} B_z \hat{S}_z$$

où  $\mu_B = \frac{-e\hbar}{2m_e}$  est le magnéton de Bohr et  $g$  le facteur de Landé ( $g = 2$ ).

L'objectif de cette question est de déterminer les valeurs des constantes  $D$  et  $K$  à partir de résultats expérimentaux.

On note  $|m\rangle_{m \in \{-10, \dots, 10\}}$  la base orthonormée des états propres de  $\hat{S}_z$  qui sera utilisée tout au long de cette question :

$$\hat{S}_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle \quad \text{avec } m \text{ entier relatif et } |m| \leq 10$$

Le terme  $W = \frac{K}{\hbar^2} (\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$  sera considéré comme une perturbation de l'hamiltonien :

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{D}{\hbar^2} \hat{S}_z^2 - \frac{g\mu_B}{\hbar} B_z \hat{S}_z$$

### 1. Niveaux d'énergie

(a) Pour  $K = 0$  montrer que les vecteurs  $|m\rangle$  sont également vecteurs propres de l'hamiltonien  $\mathcal{H}_0$ . Calculer les valeurs propres  $\mathcal{E}_0(m)$  de  $\mathcal{H}_0$ .

Sur la figure 9 sont représentées les énergies  $\mathcal{E}_0(m)$  d'une molécule  $\text{Fe}_8$  en fonction de  $m$  ( $m \in \{-10, 10\}$ ) pour un champ magnétique  $B_z$  nul.

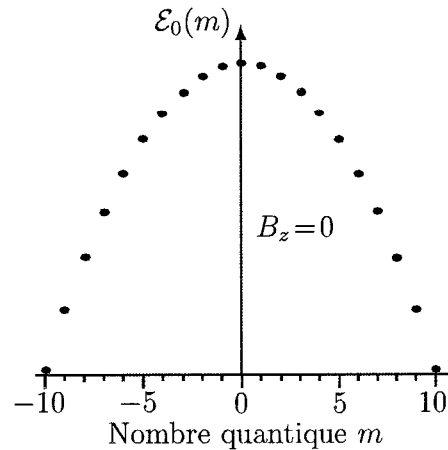
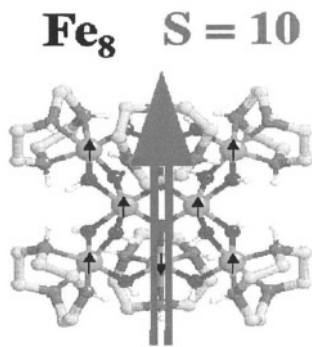


FIG. 8 - Représentation de la molécule  $\text{Fe}_8$ .

FIG. 9 - Diagramme énergétique de  $\mathcal{H}_0$  pour  $B_z = 0$ .

Expliquer ce diagramme. En particulier montrer que si  $B_z = 0$ ,  $\mathcal{E}_0(m) = \mathcal{E}_0(-m)$ . Quelle est la valeur en énergie de la barrière d'anisotropie que doit passer un état de spin  $S = \pm 10$  pour inverser son spin ?

En écrivant que cette énergie correspond à  $k_B T_c$ , déterminer la température  $T_c$  en dessous de laquelle il ne sera plus possible pour une molécule d'être thermiquement activée pour passer la barrière. Pour l'application numérique, on prendra  $D = 0,275 k_B$ .

(b) Reprendre le schéma de la figure 9 et représenter le diagramme  $\mathcal{E}_0(m)$  pour un champ  $B_z \neq 0$ .

Tracer, sur un même graphique, les courbes  $\mathcal{E}_0(m)$  en fonction de  $B_z$  pour  $m = -10, \dots, +10$ . Montrer que les énergies des états  $m > 0$  et celles des états  $m' < 0$  se croisent pour des valeurs de  $B_z$  vérifiant :

$$B_z = n \frac{D}{g\mu_B} \quad \text{où } n \text{ est un entier relatif.}$$

- (c) On considère à présent deux niveaux ( $|m\rangle$ ) et ( $|m'\rangle$ ), et on se place près du champ  $B_z$  pour lequel  $\mathcal{E}_0(m) = \mathcal{E}_0(m')$ ; on traite le terme  $W = \frac{K}{\hbar^2}(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$  comme une perturbation de  $\mathcal{H}_0$ . L'objectif de cette question est de montrer que les niveaux d'énergie se séparent au lieu de se croiser et que la dégénérescence entre les états ( $|m\rangle$ ) et ( $|m'\rangle$ ) est levée (voir figure 11).

On part de l'équation de Schrödinger stationnaire  $\mathcal{H}\Psi = \mathcal{E}\Psi$  appliquée dans l'espace des états de spins.

On note ( $\beta$  et  $\delta$  sont deux nombres réels non nuls) :

$$\langle m|W|m'\rangle = \langle m'|W|m\rangle = \beta, \quad \langle m|\mathcal{H}_0|m\rangle = \mathcal{E}_0(m), \quad \langle m|W|m\rangle = \langle m'|W|m'\rangle = \delta$$

- i. Montrer que les états ( $|m\rangle$ ) ne sont plus états propres de l'hamiltonien  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + W$ .
- ii. On cherche un nouvel état propre sous la forme :

$$|\Psi\rangle = x|m\rangle + y|m'\rangle \quad \text{avec } x \text{ et } y \text{ deux complexes}$$

Établir le système d'équations vérifié par  $x$  et  $y$ . Déterminer les deux énergies propres de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$ , en fonction de  $\mathcal{E}_0(m)$ ,  $\mathcal{E}_0(m')$ ,  $\delta$  et  $\beta$ . L'allure des nouvelles énergies est représentée sur la figure 11 en fonction de  $B_z$  : l'écart énergétique est minimal au niveau du croisement  $\mathcal{E}_0(m) = \mathcal{E}_0(m')$ . Exprimer cet écart énergétique minimal (noté  $\Delta$ ), en fonction de  $\beta$ . Déterminer les vecteurs propres dans le cas particulier où  $\mathcal{E}_0(m) = \mathcal{E}_0(m')$ . Interpréter physiquement ce résultat.

## 2. Paramagnétisme de $\text{Fe}_8$

Dans cette question on prend  $W = 0$  donc  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ .

En présence d'un champ magnétique externe, les spins de la matière paramagnétique ont tendance à s'aligner le long du champ pour diminuer l'énergie potentielle. L'agitation thermique vient contrebalancer cette tendance. On décrit ici le paramagnétisme dans le cadre de la mécanique statistique en calculant la probabilité d'occupation des états quantiques et en faisant la moyenne sur  $N$  spins indépendants par unité de volume.

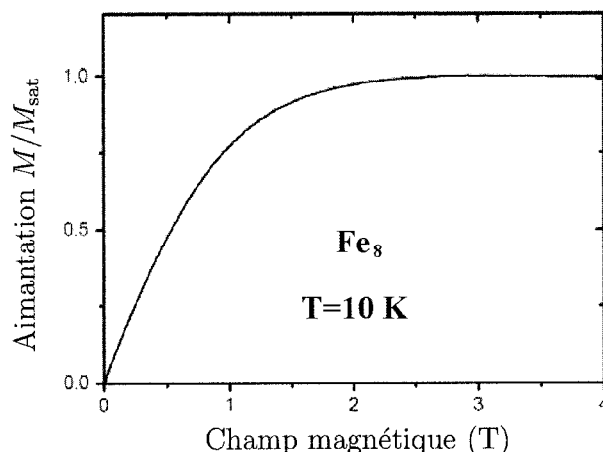


FIG. 10 – Aimantation normalisée en fonction du champ magnétique  $B_z$ .

- (a) On considère un mono-cristal de molécules  $\text{Fe}_8$  placé dans un champ magnétique orienté selon l'axe facile  $Oz$ . Quelles sont les énergies accessibles à un macro-spin

(on rappelle que  $g = 2$ ) ? Écrire l'expression de la fonction de partition  $Z$  pour un macro-spin ainsi que l'expression de la moyenne statistique  $\langle M_z \rangle$  de l'aimantation (on rappelle que l'aimantation  $M_z$  d'un macrospin dans l'état  $|m\rangle$  est  $M_z = mg\mu_B$ ).

(b) Montrer que :  $\langle M_z \rangle = Nk_B T \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dB_z}$ .

(c) Montrer que  $Z$  peut se mettre sous la forme :

$$Z = 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=10} \exp(\alpha m^2) \text{ch}(mx)$$

où  $\alpha$  et  $x$  sont des constantes à exprimer en fonction de  $g, \mu_B, k_B, T, B_z$  et  $D$ .

(d) Calculer alors la valeur moyenne  $\langle M_z \rangle$  et montrer que, pour  $B_z$  faible ou  $T$  grand :

$$\langle M_z \rangle = N \frac{(g\mu_B)^2 B_z}{k_B T} F(\alpha) \quad \text{où} \quad F(\alpha) = \frac{2 \sum_{m=1}^{m=10} m^2 \exp(\alpha m^2)}{1 + 2 \sum_{m=1}^{m=10} \exp(\alpha m^2)}$$

(e) La figure 10 représente la courbe expérimentale d'aimantation obtenue pour un cristal  $\text{Fe}_8$  à une température  $T = 10$  K. Déduire de cette courbe la valeur de  $F(\alpha)$ . En déduire la valeur de  $D/k_B$  à l'aide du tableau de valeurs suivant :

$\alpha$	0.018	0.020	0.022	0.024	0.026	0.028	0.030	0.032	0.034	0.036
$F(\alpha)$	57.9	60.3	62.6	64.8	66.9	69.0	71.0	72.8	74.6	76.3

## 6.2 Effet tunnel magnétique

Un cristal de  $\text{Fe}_8$  de taille nanométrique est déposé sur une sonde de même taille et placé dans le régime quantique à  $T = 40$  mK. Expérimentalement, on constate qu'en dessous de la température de 360 mK, l'activation thermique cesse et que la relaxation des macro-spins est due uniquement aux processus tunnels. Lorsque le champ magnétique correspond à une situation de croisement, le macro-spin a une probabilité  $P$  de se retourner et de changer d'état. Il a une probabilité  $1 - P$  de rester dans le même état (voir figure 11). La probabilité  $P$  est donnée par la formule (admise) de Landau-Zener-Stückelberg (appelée "formule de LZS" dans la suite du problème) :

$$P = 1 - \exp\left(-\frac{\pi \Delta^2}{2\hbar g |\mu_B| |m - m'| \left|\frac{dB_z}{dt}\right|}\right)$$

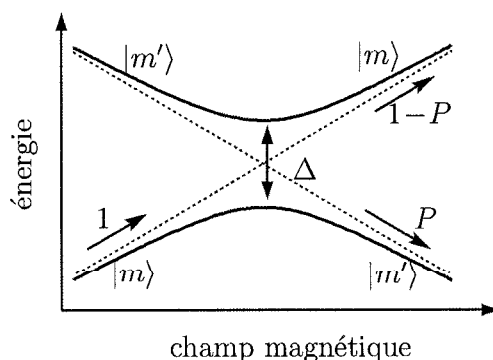


FIG. 11 – Au croisement de niveaux, le spin a la possibilité de se retourner par "effet tunnel".

Cette situation se manifeste clairement dans les cycles d'hystérésis représentés sur la figure 12<sup>3</sup>. On prépare l'échantillon dans un état tel que tous les macro-spins sont dans l'état  $m = 10$  à  $B_z = -1$  T. On augmente ensuite continûment le champ magnétique et l'on s'intéresse au passage par la valeur  $B_z = 0$ .

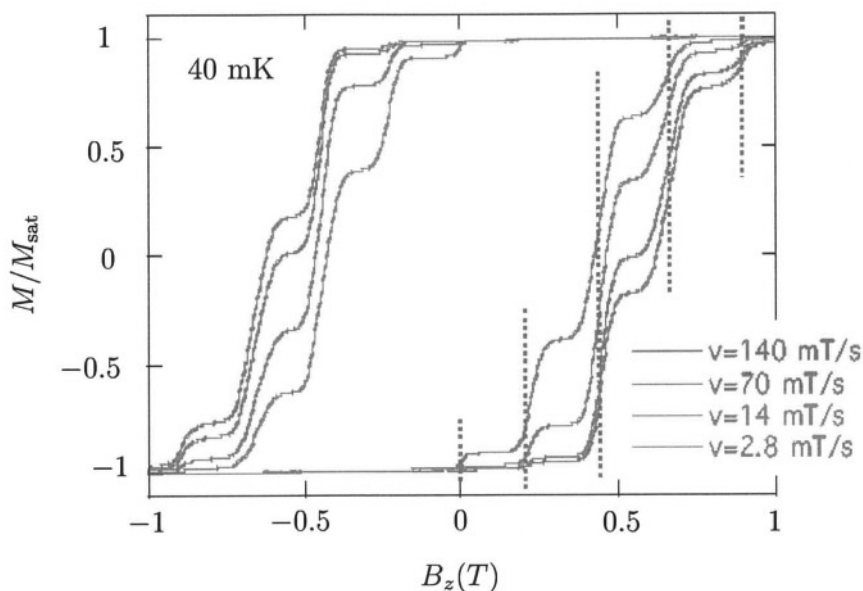


FIG. 12 – Cycles d’hystérésis de  $\text{Fe}_8$  à  $T = 40$  milli Kelvin. Les différentes courbes correspondent à différentes vitesses de balayage  $v = \frac{dB_z}{dt}$  données en milli Tesla par seconde.

1. Montrer que l’aimantation ne peut évoluer tant que  $B_z < 0$ . Que se passe-t-il pour la valeur  $B_z = 0$ ? En déduire le sens de parcours des cycles.
2. Lorsque le champ continue de croître, on observe une série de plateau d’aimantation. A quoi correspondent ces transitions? On s’appuiera sur la courbe  $\mathcal{E}_0(m)$  en fonction de  $B_z$  pour les différentes valeurs de  $m$ , tracée à la question 6.1.1.b. Déduire de ces observations une valeur de  $D/k_B$ .

3. Montrer que les résultats expérimentaux de la figure 12, obtenus pour plusieurs vitesses de balayage en champ, corroborent la formule de LZS.

En utilisant la courbe obtenue pour la vitesse de balayage la plus faible, calculer une valeur approchée de la probabilité  $P_{10,-10}$  de retournement du spin en  $B_z = 0$ .

4. Donner une expression approchée de la formule LZS dans le cas où la probabilité  $P$  est très inférieure à 1. Déduire de la question précédente, la valeur  $\Delta$  de la séparation tunnel au niveau du croisement. Donner la valeur de  $\Delta/k_B$  en  $\mu\text{K}$ .

Il est alors théoriquement possible de remonter à la valeur du paramètre  $K$  et l’on trouverait  $K = 0,046k_B$ .

## Fin du problème

<sup>3</sup> W.Wernsdorfer et al., Physical Review Letters 82, p.3903 (1999)