

SESSION DE 2008

**CONCOURS EXTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

Section : SCIENCES - PHYSIQUES

Option : PHYSIQUE APPLIQUÉE

**PROBLÈME DE PHYSIQUE APPLIQUÉE,
DE TRAITEMENT DU SIGNAL ET D'AUTOMATIQUE**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Introduction à l'automatique, appliquée à la régulation mise en œuvre sur des procédés industriels

Préambule

Le problème comporte quatre parties, de longueur et de difficultés non égales, largement indépendantes, hormis les notions de base communes.

De plus, au sein de chaque partie de **nombreuses questions indépendantes** des autres pourront être traitées séparément. De ce fait, les candidats sont invités à parcourir le sujet en entier avant de commencer la rédaction de leur copie.

De nombreux schémas sont proposés au cours du sujet. Le candidat ne devra pas s'étonner des notations utilisées en régulation industrielle ni des schémas, conformes aux normes industrielles en vigueur : il devra respecter ces notations.

Notations

Dans le sujet, les vitesses sont notés v . On utilisera la notation habituelle (avec des flèches) si nécessaire sur la copie.

La représentation temporelle d'un signal déterministe sera $S(t)$, utilisant l'indication explicite de la variable t qui représente le temps.

La représentation minuscule $s(t)$ sera employée pour une petite variation de $S(t)$ autour d'un point de fonctionnement S_0 . Pour des tels signaux $s(t)$ on admettra l'hypothèse linéaire permettant d'utiliser la transformée de Laplace monolatérale (habituelle), que l'on notera $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$, utilisant une lettre majuscule et l'indication de la variable complexe p .

On ne s'étonnera pas de l'usage simultané des deux notations sur un même schéma fonctionnel.

Tous les modèles utilisés sont supposés continus, linéaires, invariants (sauf mention contraire) par translation dans le temps, et représentent des systèmes (ou processus) causaux.

Tous sont initialement définis par leur fonction de transfert isomorphe $F(p)$, définissant la relation liant l'entrée unique à la sortie unique, conformément au schéma bloc (ou schéma fonctionnel) de la figure 1.

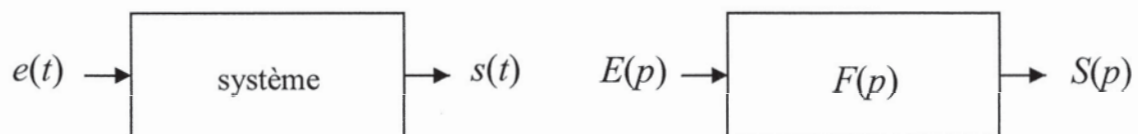


Figure 1

Pour les régimes variables au cours du temps, la notation $\dot{s}$ désigne la dérivée par rapport au temps :

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt}.$$

Sauf mention contraire (en partie D) les variations $s(t)$ sont envisagées à partir d'un point de fonctionnement S_0 initial stable. A ce titre les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont alors considérées comme nulles. Les temps s'expriment en secondes à partir de l'origine des temps $t = 0$. En temps discret les échantillons seront notés $s(nTe)$ ou s_n .

PARTIE A

Notions de base en régulation industrielle

Le schéma fonctionnel d'une boucle de régulation peut être représenté par celui de la figure 2.

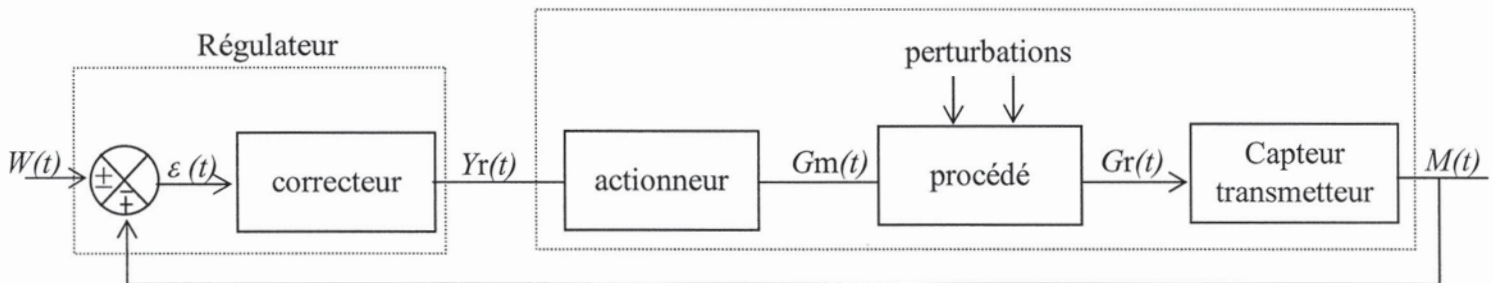


Figure 2

$W(t)$ = consigne, $\varepsilon(t)$ = signal d'écart, $Yr(t)$ = signal réglant,
 $Gm(t)$ = grandeur manipulée, $Gr(t)$ = grandeur réglée,
 $M(t)$ = signal mesure, grandeur image des variations de $Gr(t)$

Par souci de normalisation industrielle, $Yr(t)$ et $M(t)$ sont des signaux normalisés, le plus souvent véhiculés par une tension (0 – 10V) ou par un courant (4 – 20 mA), lorsque la grandeur réglée $Gr(t)$ (grandeur physique) évolue sur une plage de variation définissant l'échelle Ech du dispositif capteur-transmetteur.

Exemple : $Gr_{\min} = -50^\circ\text{C} \leftrightarrow 4 \text{ mA}$

$Gr_{\max} = 200^\circ\text{C} \leftrightarrow 20 \text{ mA}$ alors Echelle Ech = 250°C

Pour s'affranchir de la nature des signaux (courant ou tension) $Yr(t)$ et $M(t)$ sont exprimés en pourcentage de leur échelle de variation.

1 Etude de la caractéristique statique d'un transmetteur de niveau (Level Transmitter)

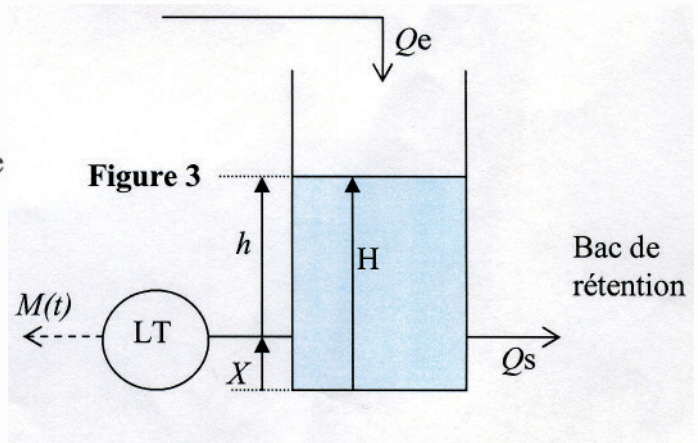
Soit l'installation représentée à la figure 3.

On pose Q_e = débit entrant

Q_s = débit sortant.

Cette installation a été amenée à un état d'équilibre H_0 tel que $H_0 = 1 \text{ m}$.

Q1 Sachant que le débit de sortie vaut $Q_s = 1 \text{ L/s}$, déterminer la valeur du débit entrant Q_{e0} .



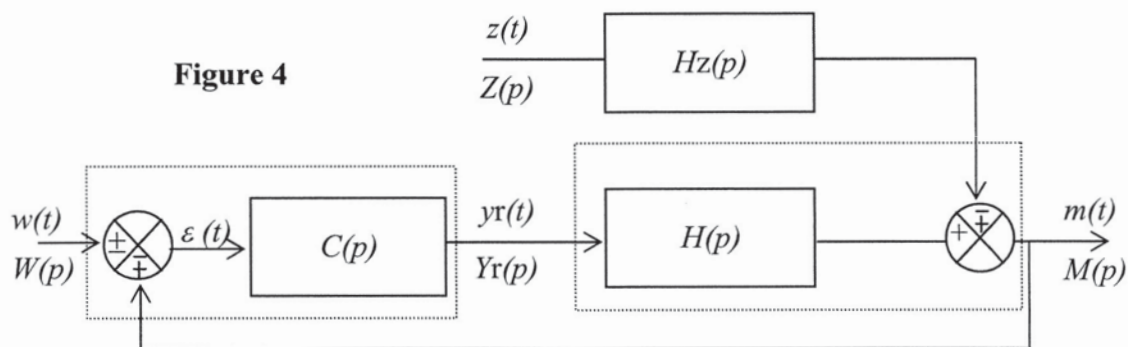
Q2 Sachant que le transmetteur de niveau élabore un signal de sortie M variant de 0 % à 100 %, pour une variation h du niveau ($Ech = 2$ m) à partir de sa prise de mesure (située à $X = 0,4$ m du fond de la cuve), tracer (pour un transmetteur parfaitement linéaire) la caractéristique $M(\%)$ en fonction de H . En déduire la relation littérale liant $M(\%)$ à H .

Q3 Que vaut la valeur $M_o(\%)$ correspondant à H_o .

Q4 Déterminer la valeur numérique $M_o(mA)$ sachant que le support physique du transmetteur est un courant dont l'intensité varie de 4 à 20 mA lorsque h varie de 0 à 2 m.

2 Modélisation dynamique autour d'un point de fonctionnement stable

Pour des signaux temporels représentant des variations de faibles amplitudes autour d'un point de fonctionnement (M_o , Yr_o), le schéma fonctionnel de la figure 2 peut alors être représenté sous la forme de la figure 4. L'hypothèse linéaire pouvant être adoptée, on est conduit à définir deux fonctions de transfert :



$$H(p) = \text{fonction de transfert réglante} = \frac{M(p)}{Yr(p)} \quad \text{à } z(t) = 0$$

$$Hz(p) = \text{fonction de transfert perturbatrice} = \frac{M(p)}{Z(p)} \quad \text{à } w(t) = 0$$

NB : $H(p)$ globalise : actionneur + procédé + transmetteur et relie directement la variation du signal de commande $yr(t)$ au signal $m(t)$, image des variations de la grandeur physique réglée.

a) Identification par modèle de connaissance

A la suite d'une étude physique, un système a pu être modélisé par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec } K = 1,5 \quad \tau_1 = 10 \text{ s et } \tau_2 = 20 \text{ s}.$$

Afin de valider ce modèle, valable autour d'un point de fonctionnement donné (M_o , Yr_o), ce système est soumis à un échelon de commande unitaire $yr(t) = 1 \cdot u(t)$. En enregistrant la variation de la mesure $m(t)$, on obtient la réponse indicielle de la figure 5 (annexe 1).

Q5 Déterminer l'expression de la réponse indicielle $M(p)$.

Q6 En déduire l'expression de la variation $m(t)$ qui en découle.

Q7 Pour les valeurs t_i valant 20 s, 40 s, 60 s et 80 s, déterminer les valeurs $m(t_i)$ et porter ces points sur la réponse indicielle de la figure 5. Que peut-on conclure sur la qualité de cette modélisation ?

b) Identification par modèle expérimental

Pour les dispositifs industriels mettant en jeu des transferts d'énergie ou des transferts de matière, il apparaît un retard pouvant être modélisé par un « temps mort ». Le modèle le plus naturel devient alors le modèle de BROÏDA, défini par :

$$H(p) = \frac{M(p)}{Yr(p)} = \frac{K e^{-Tp}}{1 + \tau p} \quad \text{avec } K = \text{gain statique}, T = \text{temps mort et } \tau = \text{constante de temps}.$$

Q8 Pour un tel modèle, exprimer la relation différentielle liant $m(t)$ et $yr(t)$.

Q9 Le signal d'entrée $yr(t)$ est un échelon d'amplitude E , tel que $yr(t) = E \cdot u(t)$. Déterminer l'expression de $m(t)$, avec la condition initiale $m(0) = 0$.

Q10 En déduire l'allure de la réponse temporelle $m(t)$, en précisant :

la valeur finale, l'expression du temps de réponse à 5% en fonction de T et τ .

Méthode d'identification de BROÏDA

On reprend la réponse indicielle de la figure 5. Pour une bonne détermination des paramètres du modèle et pour une telle allure de réponse, BROÏDA a montré que la réponse indicielle réelle du système et celle de son modèle devaient coïncider en deux points, respectivement définis à 28% et 40% de la stabilisation asymptotique (cf figure 6).

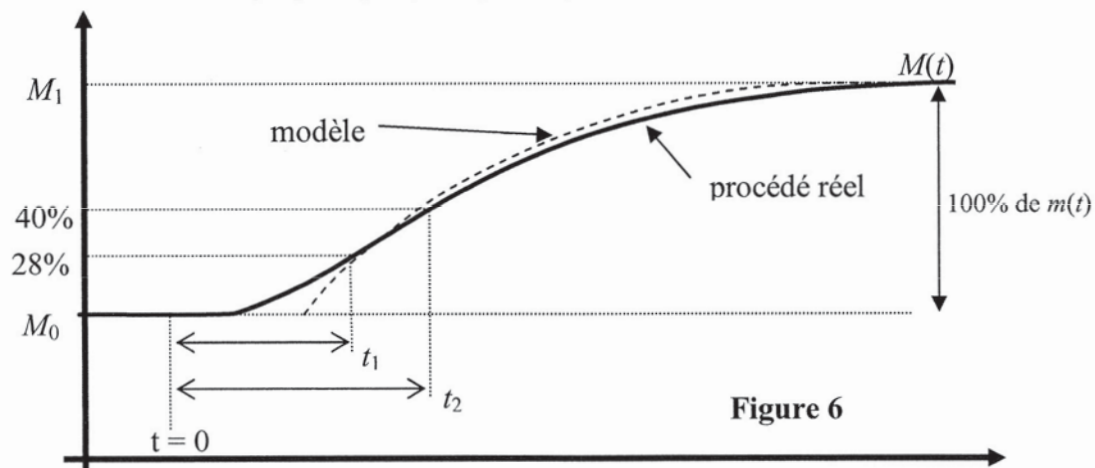


Figure 6

On est donc amené à envisager deux instants t_1 et t_2 de coïncidence tels que :

$$m(t_1)_{\text{modèle}} = m(t_1)_{\text{réelle}} = 0,28 K.E$$

$$m(t_2)_{\text{modèle}} = m(t_2)_{\text{réelle}} = 0,40 K.E$$

Q11 Pour la réponse indicielle de la figure 5 et sachant que $yr(t) = 1 \cdot u(t)$, déterminer la valeur numérique de K .

Q12 A partir de l'expression obtenue à Q9, et du système d'équations :

$$m(t_1)_{\text{modèle}} = 0,28 K.E$$

$$m(t_2)_{\text{modèle}} = 0,40 K.E$$

déterminer les deux équations permettant d'obtenir t_1 et t_2 en fonction de T et τ .

Q13 En déduire les formules de BROÏDA :

$$\tau = f(t_1, t_2) \quad T = f(t_1, t_2)$$

Applications numériques :

Q14 Déterminer graphiquement les valeurs de t_1 et t_2 pour l'enregistrement de la figure 5.

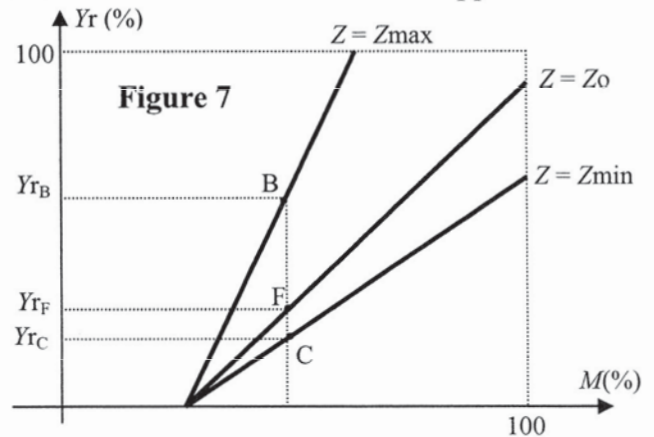
Q15 En déduire les valeurs numériques de T et τ .

3 Point de fonctionnement d'une boucle de régulation

En régulation, on travaille avec une consigne W constante. On cherche à régler les paramètres du régulateur de façon à obtenir (sauf pendant les régimes transitoires) $M = W$, lorsque la perturbation principale Z a évolué. Habituellement l'installation et le dimensionnement des appareils correspondent à une valeur nominale

de la perturbation Z . Pour cette valeur nominale Z_0 , le système est défini par sa caractéristique nominale $Y_r(\%)$ en fonction de $M(\%)$ (voir figure 7).

Lorsque Z prend différentes valeurs, on est amené à utiliser un réseau de caractéristiques où ne sont souvent représentées que les caractéristiques extrêmes. La figure 7 représente par exemple le réseau obtenu pour un échangeur de chaleur, lorsque le débit de charge Z varie. M représente l'image de la température du produit en sortie de l'échangeur et Y_r le signal réglant alimentant l'ouverture d'une vanne de vapeur, qui s'ouvre si Y_r augmente.

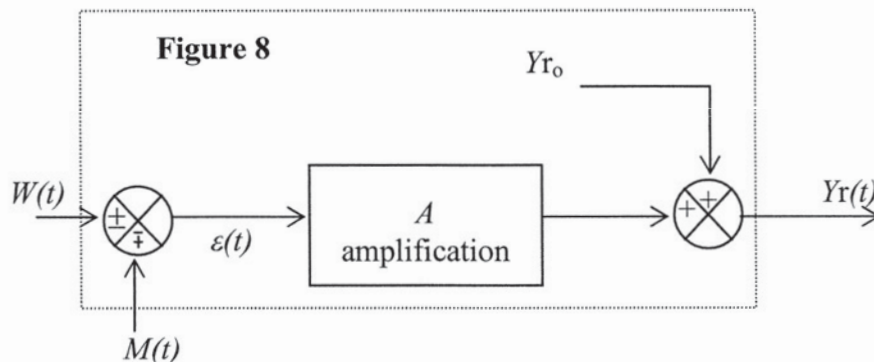


En régime établi stable, on voit donc que le point de fonctionnement peut évoluer entre B et C.

D'après le schéma fonctionnel de la figure 4, le point de fonctionnement d'une boucle de régulation est l'intersection d'une caractéristique du réseau et de la caractéristique du régulateur.

a) Détermination du point de fonctionnement statique en régulation proportionnelle

On utilise un régulateur à action proportionnelle (action P) dont le schéma fonctionnel est celui de la figure 8 :



Le régulateur est dit « direct » si le comparateur réalise $\varepsilon(t) = M(t) - W(t)$.

Il est dit « inverse » si $\varepsilon(t) = W(t) - M(t)$.

Q16 A partir d'une explication graphique et pour une caractéristique donnée du réseau, déterminer si le régulateur doit être en « direct » ou en « inverse », pour le réseau de la figure 7 et fournir l'équation $Y_r = f(M)$ de la caractéristique statique de ce régulateur.

Q17 En supposant $Z=Z_0$, pour obtenir le point de fonctionnement F, quelle doit être la valeur du talon Y_{r0} ?

Q18 Si la perturbation quitte sa valeur $Z=Z_0$, peut-on obtenir une précision statique parfaite $\varepsilon = 0$, après stabilisation ? Justifier.

b) Détermination du point de fonctionnement statique en régulation PI

On appelle régulateur à action proportionnelle et intégrale (ou PI) à **structure parallèle** un régulateur dont le schéma fonctionnel est celui de la figure 9 (sens d'action inverse ici) :

Q19 Fournir l'expression temporelle reliant $Y_r(t)$ à $\varepsilon(t)$.

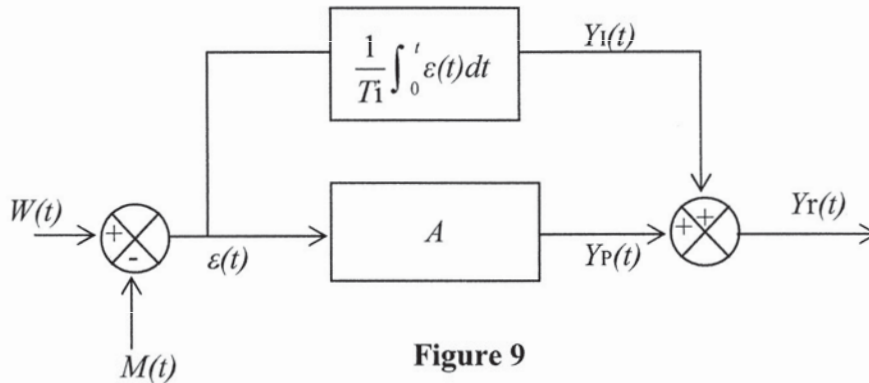


Figure 9

Q20 Expliquer pourquoi la présence de l'étage intégrateur permet d'obtenir $\varepsilon = 0$ en régime d'équilibre stable ?

Q21 Déterminer la fonction de transfert du correcteur pour cette structure parallèle :

$$C(p) = \frac{Y_r(p)}{\varepsilon(p)}$$

4 Réglage PI et robustesse du réglage

Le réglage des actions dépend de la structure du régulateur disponible, du modèle du système évalué autour d'un point de fonctionnement, déterminé par sa fonction de transfert $H(p)$ et des performances à atteindre, tant sur le plan statique que dynamique.

On peut généralement :

- soit appliquer des méthodes de réglages (par exemple celle de ZIEGLER et NICHOLS),
- soit s'imposer des marges de stabilité, définissant la robustesse du réglage.

On rappelle qu'un réglage est robuste si la boucle conserve un fonctionnement satisfaisant lorsqu'un paramètre (par exemple K ou T ou τ pour un modèle de BROÏDA) du système évolue. Cette seconde méthode sera abordée dans la partie b) .

On reprend le schéma fonctionnel de la figure 4, avec $Z(p) = 0$ et un régulateur en inverse.

Q22 Déterminer, en fonction de $C(p)$ et $H(p)$, l'expression de la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte.

Q23 Fournir l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p) = \frac{M(p)}{W(p)}$ en fonction de $C(p)$ et $H(p)$.

a) Réglage qualitatif par la méthode de NASLIN

Pour des systèmes dont la fonction de transfert $H(p)$ peut être écrite sous forme d'une fraction rationnelle en p , NASLIN a développé une méthode de réglage basée sur la théorie des polynômes à amortissement réglable.

Hypothèse : la fonction de transfert en chaîne fermée $F(p)$ peut alors, avec un régulateur PI, être mis sous la forme : $F(p) = \frac{Num(p)}{P(p)}$ où $P(p)$ est le polynôme caractéristique, que l'on peut écrire sous la

forme :

$$P(p) = a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

NASLIN écrit alors $N-1$ coefficients (dits de NASLIN) de la forme :

$$\alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1} \times a_{i-1}}$$

Résultats de la théorie de NASLIN : si tous les coefficients α_i prennent une valeur commune α , la réponse indicielle à un saut de consigne est pseudo-oscillante et présente un 1^{er} dépassement $D_1\%$ dont la valeur dépend de α et des termes du numérateur de $F(p)$.

Q24 On adopte pour fonction de transfert du système (voir question Q5) la fonction :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \text{ avec } K = 1,5 \quad \tau_1 = 10 \text{ s et } \tau_2 = 20 \text{ s}.$$

On utilise un régulateur de **structure mixte**, dont le correcteur a pour fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{Yr(p)}{\varepsilon(p)} = A \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$$

Déterminer l'expression littérale du polynôme caractéristique $P(p)$.

Q25 Fournir les expressions des deux coefficients α_1 et α_2 .

Q26 Pour $\alpha = 2$, en déduire les valeurs numériques de A et T_i (en secondes).

b) Réglage à partir des marges de stabilité

On utilise toujours le régulateur PI à structure mixte évoqué ci-dessus, mais on modélise le système par son modèle de BROÏDA, avec les valeurs $K = 1,5$, $\tau = 25$ s et $T = 9,5$ s, valeurs adoptées jusqu'à la fin de la partie A.

Q27 Déterminer la nouvelle expression de $T(p)$.

Q28 Pour obtenir des performances satisfaisantes, BROÏDA conseille d'adopter $T_i = \tau$. Que devient alors l'expression littérale de $T(p)$?

Q29 Représenter l'allure de $T(j\omega)$ dans un diagramme de BLACK, en indiquant bien la position du point critique, les tendances asymptotiques lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.

Q30 Indiquer sur le schéma où lire la marge de gain G_m et la marge de phase φ_m .

Q31 On désire obtenir une marge de gain $G_m = + 6\text{dB}$. En déduire l'expression littérale de l'amplification A en fonction de K , T , $T_i = \tau$.

Q32 Quelle est alors la marge de phase φ_m obtenue ?

Q33 Application numérique :

Pour les valeurs numériques adoptées pour K , τ et T , déterminer les valeurs de A et T_i .

Q34 Les régulateurs industriels préfèrent souvent utiliser la « bande proportionnelle » au lieu de l'amplification A . Par définition la largeur de bande proportionnelle s'exprime par : $X_p = \frac{100}{A}$.

A partir de l'expression littérale trouvée à la question Q31, montrer que X_p peut s'écrire sous la forme : $X_p = k \cdot \frac{KT}{\tau}$. Déterminer la valeur numérique de k .

L'expression $\frac{KT}{\tau}$ représente la difficulté de réglage et est parfois appelé coefficient de réglabilité.

c) Robustesse du réglage obtenu

Pour une même consigne W , le réseau de caractéristiques de la figure 7 montre que le point de fonctionnement évolue entre les points B et C.

Q35 Compte tenu de l'allure des caractéristiques, K_B (gain statique au point de fonctionnement B) est-il plus grand ou plus petit que K_F ? Justifier. A partir des résultats de Q29, en déduire l'influence du passage de la perturbation de la valeur Z_o à $Z_{\max}$ sur les marges de stabilité de la boucle.

Q36 Mêmes questions pour K_C .

Q37 Quelle variation de K , par rapport à la valeur K_F déterminée à la question Q11 et pour le réglage PI déterminé à la question Q34, conduit à l'instabilité ?

d) Comparaison avec la robustesse du réglage de NASLIN

Notion de robustesse en gain : celle-ci s'intéresse, pour un réglage donné du régulateur, à l'influence de l'évolution du gain statique K sur la stabilité de la boucle de régulation.

Elle est dite absolue si une variation quelconque du gain statique K du système ne peut conduire à l'instabilité de la boucle de régulation. Elle est par contre conditionnelle si il existe une valeur maximale de K conduisant à l'instabilité.

Q38 Le réglage PI, déterminé à la question Q33, présente-t-il une robustesse absolue ou conditionnelle ? Justifier.

Q39 Ce résultat dépend-il de la valeur de l'amplification A ?

On se propose d'étudier l'influence du choix du modèle sur la robustesse en gain. Pour cela on reprend le modèle du second ordre et les résultats de la question Q26.

Q40 Reprendre l'expression littérale du polynôme caractéristique $P(p)$. Dresser un tableau de ROUTH sous sa forme habituelle.

Q41 Déterminer l'équation littérale liant A , T_i , K , τ_1 et τ_2 traduisant l'instabilité limite de la boucle.

Q42 Compte tenu des valeurs numériques de τ_1 et τ_2 , écrire cette équation sous la forme :

$$A \cdot K = f(T_i)$$

Q43 Après une étude sommaire du graphe de cette équation, montrer qu'il existe une valeur minimale limite de T_i en dessous de laquelle la robustesse devient conditionnelle.

Q44 En reprenant les valeurs du réglage de la question 26, la robustesse de ce réglage est-elle conditionnelle ou non ?

Q45 En raisonnant dans le domaine fréquentiel (par exemple sur un diagramme de BLACK) sur l'influence du retard fictif T introduit par le modèle de BROÏDA, expliquer en quoi l'adoption de ce modèle contribue à la robustification de la boucle de régulation.