

SESSION DE 2008

---

**CONCOURS EXTERNE  
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

**Section : SCIENCES - PHYSIQUES**

**Option : PHYSIQUE APPLIQUÉE**

**COMPOSITION D'ÉLECTRONIQUE,  
D'ÉLECTROTECHNIQUE**

Durée : 5 heures

---

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

Cette épreuve contient deux problèmes totalement indépendants.

Il est rappelé que les correcteurs seront particulièrement sensibles à la qualité de la rédaction tant sur le fond (rigueur et clarté des explications) que sur la forme (présentation, lisibilité, respect des notations de l'énoncé, indication du numéro complet de la question traitée, mise en évidence des résultats, applications numériques et unités...).

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en précisant les initiatives qu'il prend pour la rédaction de sa solution.

## Problème 1

### Onduleur pour système photovoltaïque raccordé au réseau

Nous allons nous intéresser à un système de production d'énergie photovoltaïque, raccordé au réseau basse tension  $400\text{ V} - 50\text{ Hz}$  (figure 1). Ce système comprend :

- Un « champ » de modules photovoltaïques, constitué de modules (générateurs) photovoltaïques groupés en série et/ou parallèle ; la tension produite par ce champ photovoltaïque est continue ;
- Un onduleur qui convertit le courant continu en courant alternatif et permet l'injection de puissance électrique sur le réseau ;
- Un filtre en sortie de l'onduleur.

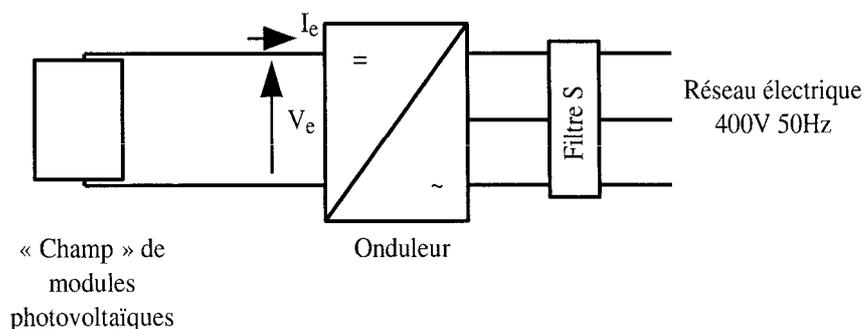


Figure 1: Système photovoltaïque de production d'énergie, raccordé au réseau.

La partie A traite du fonctionnement de l'onduleur et du filtre permettant l'injection de courant sur le réseau.

La partie B aborde quelques aspects liés aux condensateurs utilisés dans le filtre. On étudiera en particulier le rapport entre l'énergie stockée et le volume, ainsi que l'impédance des condensateurs.

Dans l'énoncé  $x$  représente une grandeur instantanée,  $X$  sa valeur efficace et  $\bar{x}$  sa valeur moyenne.  $\vec{X}$  représente un vecteur.

On associe à  $x = X\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$  la grandeur complexe  $\underline{X} = X e^{-j\varphi}$ .

## A - Première partie

### Système de conversion photovoltaïque

On s'intéresse dans cette partie au fonctionnement du système de conversion photovoltaïque (figure 1).

Les sous-parties I et II sont très largement indépendantes.

#### A.I. Onduleur de tension triphasé

L'onduleur de tension étudié est représenté sur la figure 2.

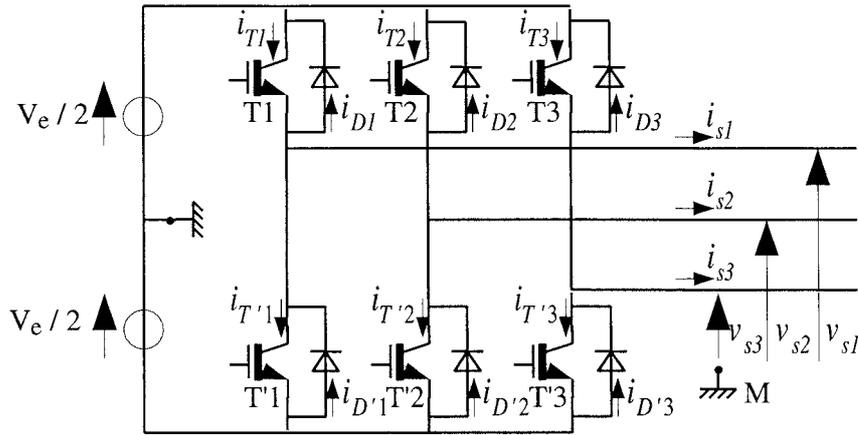


Figure 2: Onduleur de tension

La paire de transistors T1/T'1 est commandée de façon complémentaire, c'est-à-dire que le transistor T1 est bloqué quand T'1 est passant, et inversement. De même, les paires T2/T'2 d'une part et T3/T'3 d'autre part sont aussi commandées de façon complémentaire.

Dans un premier temps, on prend comme référence de potentiel le point M (figure 2).

Par la suite, on notera  $T$  la période de fonctionnement de l'onduleur et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

On note  $f_c(t)$  une fonction périodique de période  $T$  pouvant prendre les valeurs 0 ou 1. La commande des interrupteurs est définie à partir de  $f_c(t)$  comme suit :

- T1 est passant pour  $f_c(t)=1$ , et bloqué si  $f_c(t)=0$  ;
- T2 est passant pour  $f_c(t-\frac{T}{3})=1$ , et bloqué si  $f_c(t-\frac{T}{3})=0$  ;
- T3 est passant pour  $f_c(t+\frac{T}{3})=1$ , et bloqué si  $f_c(t+\frac{T}{3})=0$ .

#### A.I.1. Commande de l'onduleur en pleine onde

A.I.1.1. Donner les expressions de  $v_{s1}$ ,  $v_{s2}$ , et  $v_{s3}$  en faisant intervenir  $f_c$  et  $V_e$ .

On considère dans la suite de ce paragraphe que  $f_c(t)$  vaut 1 pour  $-\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4}$ , et 0 pour

$$\frac{-T}{2} \leq t < \frac{-T}{4} \text{ et pour } \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2}.$$

A.I.1.2. Représenter l'allure de  $f_c(t)$  pour  $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$ .

A.I.1.3. Sur le document-réponse A1, donner l'allure de  $v_{s1}$ ,  $v_{s2}$ , et  $v_{s3}$ .

A.I.1.4. On suppose que la charge connectée à l'onduleur absorbe des courants  $i_{s1}$ ,  $i_{s2}$  et  $i_{s3}$  définis comme suit :

$$i_{s1} = \hat{I}_{ch} \cos(\omega t - \varphi) ; i_{s2} = \hat{I}_{ch} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi) ; i_{s3} = \hat{I}_{ch} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi)$$

Compléter le document-réponse A1 en représentant l'allure du courant  $i_{T1}$  dans le transistor T1 et du courant  $i_{D1}$  dans la diode D1 quand  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .

A.I.1.5. On connecte maintenant à l'onduleur une charge triphasée constituée de trois résistances  $R$  (figure 3). On note  $v_h$  le potentiel du point commun de l'étoile. Représenter sur le document-réponse A2 l'allure de  $v_h$ .

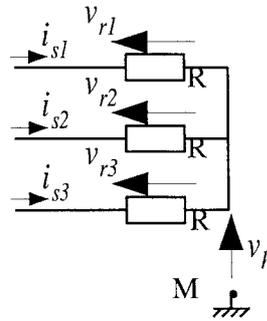


Figure 3: Charge résistive en étoile.

A.I.1.6. On suppose que l'onduleur est toujours connecté à la charge de la figure 3. Compléter le document-réponse A2 en représentant l'allure de  $v_{r1}$ .

On s'intéresse à partir de maintenant à la décomposition en série de Fourier de la tension  $v_{s1}$  sous la forme :

$$v_{s1}(t) = V_s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} V_s(n) \sqrt{2} \cos(n\omega t + \psi_{V_s}(n))$$

A.I.1.7. Donner la valeur de  $V_s(0)$ .

A.I.1.8. Justifier **en une ligne** que, pour tout  $n$ ,  $\psi_{V_s}(n) = 0$ .

A.I.1.9. Déterminer l'expression, pour les  $n$  pairs ( $n = 2k$ ,  $k$  entier), de  $V_s(n)$ .

A.I.1.10. Déterminer l'expression, pour les  $n$  impairs ( $n = 2k + 1$ ,  $k$  entier), de  $V_s(n)$ .

### A.I.2. Commande de l'onduleur en modulation de largeur d'impulsion (MLI)

On suppose maintenant que  $f_c(t)$  est obtenue à l'aide d'un modulateur à largeur d'impulsion. Cette fonction, qui est périodique de période  $T$  et qui ne prend que des valeurs 0 ou 1, peut se mettre sous la forme :

$$f_c(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cos(n\omega t) \tag{1}$$

où  $a(n)$  sont des coefficients réels tels que  $a(n)=0$  pour  $n$  pair. On supposera bien-sûr que  $f_c$  ne prend que les valeurs 0 et 1.

A.I.2.1. Donner la décomposition de  $v_{s1}$ , de  $v_{s2}$  et de  $v_{s3}$  sous forme de série de fonctions cosinus, en faisant apparaître les coefficients  $a(n)$ .

A.I.2.2. Montrer que, pour certains rangs  $n$  (que l'on précisera), les harmoniques de  $v_{s1}$ ,  $v_{s2}$  et  $v_{s3}$  forment un système triphasé direct.

A.I.2.3. Montrer que, pour certains rangs  $n$  (que l'on précisera), les harmoniques de  $v_{s1}$ ,  $v_{s2}$  et  $v_{s3}$  forment un système triphasé inverse.

A.I.2.4. Montrer que, pour certains rangs  $n$  (que l'on précisera), les harmoniques de  $v_{s1}$ ,  $v_{s2}$  et  $v_{s3}$  forment un système triphasé homopolaire.

### A.II. Filtre de sortie de l'onduleur

La structure de base du filtre de sortie de l'onduleur (filtre en « T ») est donnée à la figure 4a. Elle est constituée de deux dipôles inductifs d'inductance  $L$  et de résistance interne  $R$ , ainsi que d'un condensateur de capacité  $C$ .

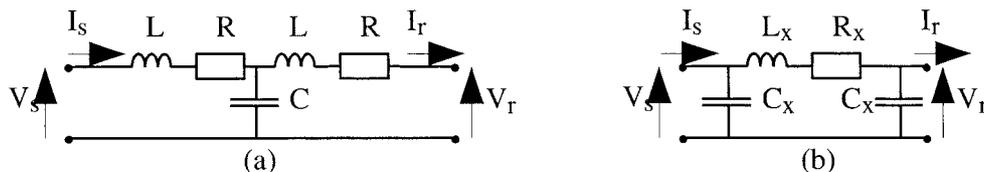


Figure 4: Filtre en « T » (a) et filtre équivalent dans un domaine restreint de fréquences (b)

A.II.1. Déterminer la transadmittance complexe  $\underline{T}(\omega) = \frac{I_r(\omega)}{V_s(\omega)}$  du filtre de la figure 4a, **quand sa**

**sortie est en court-circuit.** On pourra s'aider de l'annexe A1. On exprimera  $\underline{T}(\omega)$  sous la forme suivante :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{2R} \times \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \times \underline{H}(\omega) \quad \text{avec} : \quad \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + 2j m \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} .$$

On précisera les expressions de  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $m$ .

A.II.2. Montrer que, sous certaines conditions que l'on précisera,  $|\underline{H}(\omega)|$  admet un maximum  $Q$  pour une pulsation  $\omega_R$  non nulle. Donner l'expression de  $\omega_R$ , ainsi que celle de  $Q$  en fonction de  $m$  et  $\omega_0$ .

A.II.3. Pour  $\omega_1 = \frac{\omega_0}{100}$ , donner l'allure du diagramme de Bode asymptotique (module et phase) de  $2R \times \underline{T}(\omega)$ .

A.II.4. Montrer que pour des pulsations  $\omega \ll \omega_0$ , le filtre de la figure 4a peut être approximé par celui de la figure 4b. On donnera alors les expressions de  $L_x$ ,  $C_x$  et  $R_x$ .

### A.III. Association onduleur – filtre triphasé

On connecte l'onduleur au réseau triphasé à travers un filtre (figure 5). Le filtre triphasé est constitué de filtres élémentaires monophasés, identiques à celui étudié au . On remarquera que le point milieu de l'alimentation (point M, figure 2) n'est connecté à aucun point extérieur à l'onduleur.

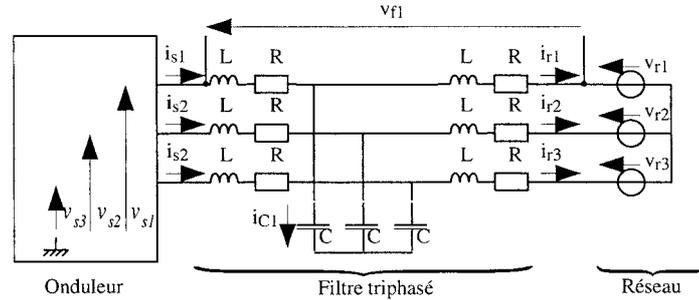


Figure 5: Onduleur, filtre et réseau.

La commande des interrupteurs est obtenue avec l'expression de  $f_c$  donnée par (1).

Les expressions des tensions du réseau sont :

$$\begin{aligned} v_{r1} &= V_r \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi) \\ v_{r2} &= V_r \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{r3} &= V_r \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \phi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

On considère que la décomposition du courant  $i_{r1}$  en série de Fourier peut s'écrire :

$$i_{r1}(t) = I_r(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I_r(n) \sqrt{2} \cos(n\omega t + \psi_{I_r}(n)) \quad (3)$$

A.III.1. Pour  $n > 1$ , donner l'expression de  $I_r(n)$  en fonction de  $a(n)$ ,  $\omega$  et  $V_e$ . On fera apparaître le module de la transadmittance  $\underline{T}$  définie au . On pourra considérer séparément les cas où  $n = 3k$ ,  $n = 3k + 1$  et  $n = 3k + 2$  ( $k$  entier).

On souhaite commander l'onduleur de sorte que le fondamental du courant  $i_{r1}$  soit en phase avec la tension  $v_{r1}$ . On note  $V_f(1)$  la valeur efficace du fondamental de la tension  $v_{f1}$  (figure 5). On considère que  $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_0$  et on néglige l'influence de la résistance  $R$ .

A.III.2. Montrer, à partir du schéma équivalent de la figure 4b que le fondamental de la tension  $v_{f1}$

est en avance d'un angle  $\frac{\pi}{2} + \beta$  sur  $v_{r1}$ . Donner l'expression de  $\tan \beta$  en fonction de  $I_r(1)$ ,  $C$ ,

$\omega$  et  $V_r$  pour que  $i_{r1}$  soit en phase avec  $v_{r1}$ . On pourra s'aider d'un diagramme de Fresnel.

A.III.3. On note  $V_s(1)$  la valeur efficace du fondamental de  $v_{s1}$ . Donner l'expression de  $V_s(1)$  en fonction de  $V_r$ ,  $V_f(1)$  et  $\beta$  pour que  $i_{r1}$  soit en phase avec  $v_{r1}$ .

A.III.4. A partir de maintenant, on cherche une expression du rapport  $C/L$  permettant d'obtenir  $V_s(1) = V_r$ . On considère toujours que le fondamental du courant  $i_{r1}$  est en phase avec la tension  $v_{r1}$ .

A.III.4.1. Exprimer  $V_f(1)$  en fonction de  $V_r$  et  $\beta$ .

A.III.4.2. On suppose que  $\tan \beta \ll 1$ . Dédurre de la question précédente l'expression de  $V_f(1)$

en fonction de  $V_r$ ,  $C$ ,  $\omega$  et  $I_r(1)$ . On pourra s'aider de développements limités à l'ordre 1 (voir annexe A2).

A.III.4.3. Donner l'expression de  $V_f(1)$  en fonction de  $L$ ,  $\omega$ ,  $I_r(1)$  et  $\beta$ . Dans l'hypothèse où l'on peut effectuer un développement limité à l'ordre 1, que devient cette expression ?

A.III.4.4. Déduire des questions qui précèdent l'expression de  $C/L$  en fonction de  $I_r(1)$  et  $V_r$ .

On désire injecter une puissance  $P=4\text{ kW}$  sur un réseau  $400\text{ V}$ ,  $50\text{ Hz}$  selon les conditions du A.III.4. L'onduleur travaille en modulation de largeur d'impulsion, avec injection d'harmonique de rang trois. Sa fréquence de découpage est  $F_d=10\text{ kHz}$ . Les amplitudes  $a(n)$  des harmoniques de la fonction  $f_c$  sont donnés ci-dessous pour  $n<300$  et  $a(n)>0,01$  :

n	1	3	196	198	200	202	204
a(n)	0,56	0,06	0,05	0,15	0,21	0,15	0,05

Pour les harmoniques tels que  $n\geq 300$ , on a :  $a(n)<0,21$ .

A.III.5. Calculer  $I_r(1)$ .

A.III.6. Déterminer la valeur de  $V_e$ .

A.III.7. Est-ce que l'harmonique de rang 3 présent dans  $f_c$  se retrouve dans les tensions  $v_s$  ? Est-ce qu'il se retrouve dans les courants  $i_r$  ?

A.III.8. Quel peut-être l'intérêt de rajouter cet harmonique ?

A.III.9. On souhaite que la valeur efficace de tous les harmoniques du courant  $i_r$ , de rangs

supérieurs à 1, soit inférieure à  $I_{\text{lim}}=10\text{ mA}$ . On suppose que  $\left(\frac{2\pi F_d}{\omega_0}\right)^2 \gg 1$ .

A.III.9.1. Déterminer la valeur de  $C/L$ .

A.III.9.2. En déduire les valeurs de  $L$  et  $C$  en effectuant les approximations nécessaires sur l'expression de la transadmittance  $T$ .

A.III.10. Vérifier que les approximations suivantes sont valables :

- $\omega \ll \omega_0$
- $\text{tg } \beta \ll 1$
- $\left(\frac{2\pi F_d}{\omega_0}\right)^2 \gg 1$

## ***B - Deuxième partie***

### ***Étude des composants passifs***

On s'intéresse dans cette partie aux phénomènes physiques dans les condensateurs. Les questions I et II sont très largement indépendantes. On pourra s'aider de l'annexe B qui rappelle quelques relations en électromagnétisme.

#### ***B.I. Condensateur plan à symétrie de révolution***

On s'intéresse aux phénomènes physiques prenant place dans les condensateurs utilisés en électronique de puissance et au dimensionnement de ces composants.

##### ***B.I.1. Étude en statique***

On considère le condensateur plan de la figure 6. Ses armatures sont des disques conducteurs de rayon  $R_{ext}$  séparés par un diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  et d'épaisseur  $e$ . Les armatures A et B sont soumises respectivement à un potentiel électrostatique  $V_A$  et  $V_B$ . On note  $Q_A$  la charge électrique de l'armature A et  $Q_B = -Q_A$  celle de l'armature B. On note  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. On suppose que le champ électrique  $\vec{E}$  est orienté le long de l'axe  $\vec{e}_z$  et qu'il est uniforme dans le diélectrique.

B.I.1.1. A l'aide du théorème de Gauss, donner l'expression de la composante  $D_z$  du déplacement électrique  $\vec{D}$  suivant  $\vec{e}_z$ . On exprimera  $D_z$  en fonction de  $Q_A$  et de  $R_{ext}$ .

B.I.1.2. En déduire l'expression de  $E_z$ , composante de  $\vec{E}$  suivant  $\vec{e}_z$ .

B.I.1.3. Donner l'expression du potentiel électrostatique  $V(z)$  en fonction de  $R_{ext}$ ,  $Q_A$  et  $z$ .

On prendra comme référence  $V(0) = V_A = 0$ .

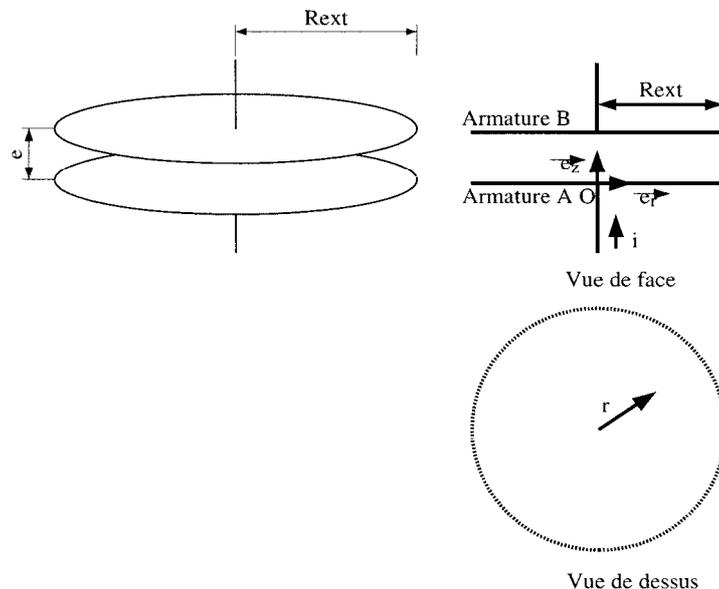


Figure 6: Condensateur plan à symétrie de révolution

B.I.1.4. Donner l'expression de la capacité  $C$  du condensateur en fonction de  $e$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$  et  $R_{ext}$ .

B.I.1.5. On considère un condensateur de capacité  $C$ , initialement déchargé, qui est connecté à

**Tournez la page S.V.P.**

une source de courant constant  $I_0$ . Démontrer que l'énergie stockée dans le condensateur sous une différence de potentiel  $V = V_A - V_B$  est  $\frac{1}{2} C V^2$ .

B.I.1.6. On suppose que cette énergie est uniformément répartie dans le diélectrique. Donner l'expression de cette énergie volumique  $W_{ev}$  en fonction de  $E_z$ ,  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_r$ .

B.I.1.7. On souhaite réaliser un condensateur avec un diélectrique composé de polypropylène, de permittivité relative  $\epsilon_r = 2,2$ . Afin d'éviter un claquage (destruction du diélectrique suite à l'application d'un champ électrique trop important), on se restreint à un champ électrique  $E_{max} = 70 \text{ MVm}^{-1}$ .

B.I.1.7.a. Quelle est la densité volumique d'énergie que l'on peut stocker ? On supposera que le volume des armatures est négligeable.

B.I.1.7.b. Quelle doit-être l'épaisseur  $e$  du diélectrique pour une différence de potentiel maximale  $\hat{v}_{max} = 350 \text{ V}$  ?

B.I.1.7.c. Quel doit-être le rayon  $R_{ext}$  du condensateur pour une capacité  $C = 1 \mu F$  ? Commenter brièvement le résultat obtenu.

### B.I.2. Puissances en régime quasi-statique

On suppose maintenant que le condensateur est alimenté par un courant sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . Une différence de potentiel de valeur efficace  $V$  apparaît alors aux bornes du condensateur. En notation complexe, les expressions de la tension et du courant sont :  $\underline{V}_{AB} = V$  et  $\underline{I} = C \omega V e^{j(\pi/2 - \delta)}$ .  $\delta$  est un angle, généralement petit devant  $\frac{\pi}{2}$ .

B.I.2.1. Donner l'expression du champ électrique  $\underline{E}_z$  en fonction de  $\underline{V}_{AB}$  et des dimensions du condensateur.

B.I.2.2. Donner l'expression de la charge  $\underline{Q}_A$  puis du déplacement électrique  $\underline{D}_z$  en fonction de  $\underline{I}$  et des dimensions du condensateur.

B.I.2.3. Montrer que  $\underline{D}_z = (\epsilon' - j\epsilon'') \underline{E}_z$ , où  $\epsilon'$  et  $\epsilon''$  sont deux réels dont on donnera l'expression en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$  et  $\delta$ .

B.I.2.4. Donner l'expression de la puissance active  $P$  et de la puissance réactive  $Q$  consommées par le condensateur, en fonction de  $C$ ,  $\omega$ ,  $V$  et  $\delta$ . Que vaut le rapport  $P/|Q|$  ? Justifier **brièvement** l'appellation d'angle de pertes utilisée pour  $\delta$ .

### B.I.3. Champ magnétique dans le condensateur en régime quasi statique et inductance.

On suppose que le condensateur est alimenté par un courant variable d'intensité instantanée  $i$  et que le déplacement électrique  $\vec{D}$  est homogène dans le diélectrique. La perméabilité magnétique relative des matériaux constituant le condensateur est égale à 1 (matériaux amagnétiques).

B.I.3.1.a. Rappeler la relation entre le vecteur densité de courant de déplacement  $\vec{j}_D$  et le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$ .

B.I.3.1.b. Représenter, sur le document-réponse B1, le vecteur  $\vec{j}_D$  dans le diélectrique, orienté en fonction de  $i$ .

B.I.3.1.c. On note  $j_{Dz}$  la composante de  $\vec{j}_D$  orientée suivant  $z$ . Donner l'expression de  $j_{Dz}$ .

en fonction de  $i$  et des caractéristiques géométriques du condensateur.

- B.I.3.2. Justifier **en trois lignes maximum** l'existence d'un champ magnétique dans le condensateur et donner l'équation de Maxwell qui permet de le calculer.
- B.I.3.3. Rajouter sur le document-réponse B1 (vue de face et vue de dessus) l'allure des lignes de champ magnétique. On précisera l'orientation de ces lignes en fonction de celle de  $i$ .
- B.I.3.4. Donner l'expression de l'excitation magnétique  $H(r)$  en fonction de  $i$  et des caractéristiques géométriques du condensateur.
- B.I.3.5. En déduire l'expression de l'énergie magnétique stockée **dans le condensateur** et l'expression de l'inductance correspondante.

### B.II. Condensateurs multicouches

Afin de conserver des dimensions raisonnables, on utilise des condensateurs multicouches métallisés, tel que celui représenté sur les figures 7 et 8. Ces condensateurs sont constitués de couches de diélectrique métallisées puis empilées. Une fois l'empilement réalisé, un alliage de zinc fondu, appelé shoopage, est pulvérisé sur les faces supérieure et inférieure afin d'établir les contacts électriques avec les métallisations. Les métallisations sont disposées de telle sorte que chaque shoopage est en contact avec la moitié des métallisations. Des conducteurs électriques sont brasés sur les shoopages afin de réaliser les connexions au circuit extérieur. Les métallisations entre les couches de diélectriques forment des condensateurs plans élémentaires. On supposera que, dans le diélectrique, le champ électrique est orienté suivant  $x$ .

L'empilement de couches a pour dimensions  $L \times l \times h$ . On note  $i$  l'intensité du courant qui circule dans les conducteurs d'alimentation et  $i_s(x)$  l'intensité du courant qui circule dans le shoopage inférieur à l'abscisse  $x$ .

On notera  $e$  l'épaisseur du diélectrique (quelques micromètres),  $e_m$  l'épaisseur des métallisations (quelques dizaines de nanomètres),  $h$  la distance entre les shoopages (environ un centimètre),  $h_u$  la distance le long de laquelle les métallisations sont en regard,  $\epsilon_r$  la permittivité relative du diélectrique. On considérera que  $h \approx h_u$  et que  $e_m \ll e$ .

On s'intéresse d'abord uniquement à un domaine élémentaire D (figure 8) comprenant deux couches de diélectrique, une métallisation entière (épaisseur  $e_m$ ) et deux moitiés de métallisation (épaisseur  $e_m/2$ ). Il est à noter que l'ensemble du condensateur correspond à la juxtaposition d'un certain nombre (généralement quelques centaines) de domaines élémentaires D.

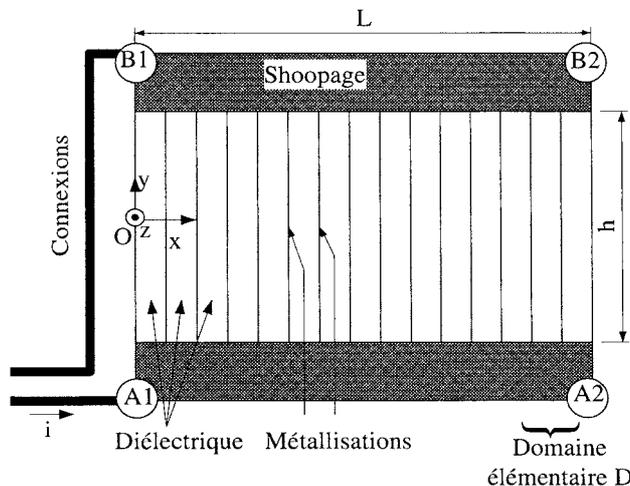


Figure 7: Structure d'un condensateur multicouches.

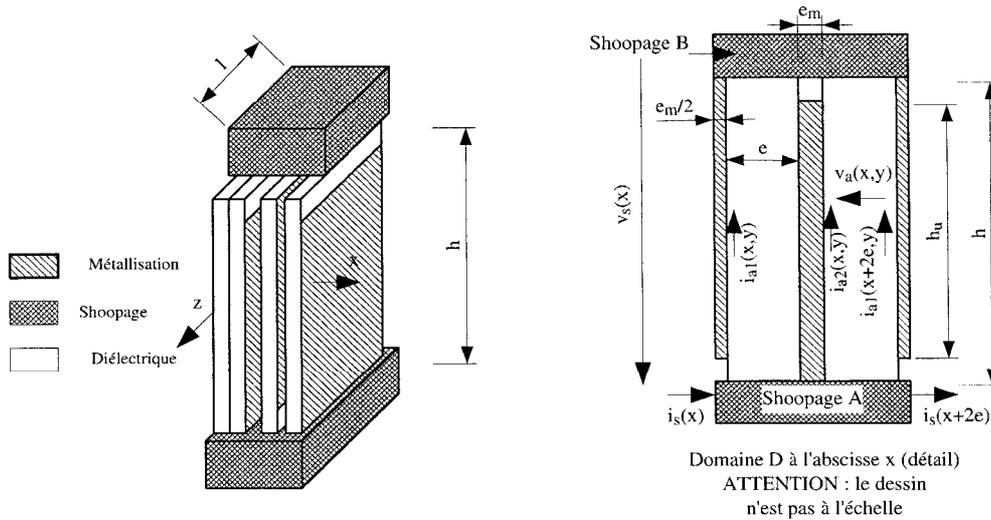


Figure 8: Condensateur multicouche, détails.

### B.II.1. Champ magnétique dans le domaine D

On suppose que le champ magnétique est nul à l'extérieur du condensateur et que, à l'intérieur, il est parallèle à l'axe  $z$ . Tous les matériaux constitutifs du condensateur ont une perméabilité relative  $\mu_r = 1$ .

B.II.1.1. En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour adapté, donner l'expression du champ magnétique  $B$  dans le domaine D en fonction de  $i_s(x)$ .

B.II.1.2. En déduire l'énergie magnétique emmagasinée dans D et l'inductance correspondante. On supposera que le champ magnétique est uniforme sur le domaine D.

B.II.1.3. Montrer que l'inductance par unité de longueur de shoopage vaut :  $L_l = \mu_0 \mu_r \frac{h}{l}$ .

### B.II.2. Matériau homogène équivalent

On suppose d'abord que les conducteurs (métallisations et shoopages) ont une résistivité nulle. On note  $V_s(x)$  la différence de potentiel entre les deux éléments de shoopage.

B.II.2.1. Donner l'expression de la capacité  $C_s$  entre la métallisation centrale du domaine D et les deux demi-métallisations. En déduire l'expression de  $I_D(x) = I_s(x+2e) - I_s(x)$  en fonction de  $V_s(x)$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon_r$ ,  $h$ ,  $l$  et  $e$ . Donner l'expression de la puissance réactive  $Q_D$  consommée par le volume élémentaire D, en fonction de  $|V_s(x)|$ .

B.II.2.2. Montrer que l'on obtiendrait la même capacité en remplaçant les couches de diélectriques et les métallisations par un matériau homogène de très forte permittivité relative  $\epsilon_{req}$ , les shoopages servant alors d'armatures. Calculer  $\epsilon_{req}$  pour  $\epsilon_r = 2,2$ ,  $e = 5 \mu m$ ,  $h = 1 cm$ .

B.II.2.3. Montrer que le courant  $I_{a2}(x, y)$  dans la métallisation centrale et les courants

$I_{a1}(x, y)$  dans les demi-métallisations latérales obéissent aux équations :

$$\frac{\partial I_{a2}(x, y)}{\partial y} = -K_c V_s(x) \quad (4)$$

$$\frac{\partial I_{a1}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial I_{a1}(x+2e, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} K_c V_s(x) \quad (5)$$

où  $K_c$  est une constante que l'on explicitera.

B.II.2.4. Préciser les conditions aux limites en  $y = -\frac{h}{2}$  et  $y = +\frac{h}{2}$  que doivent vérifier

$$\underline{I}_{a1}(x, y) \text{ et } \underline{I}_{a2}(x, y).$$

B.II.2.5. Résoudre les équations (4) et (5) et montrer que :

$$\underline{I}_{a1}(x, y) = \underline{I}_{a1}(x + 2e, y) = \frac{1}{2} \underline{I}_D(x) \left( \frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (6)$$

$$\underline{I}_{a2}(x, y) = \underline{I}_D(x) \left( \frac{-y}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

A partir de maintenant, on prend en compte les pertes dans les métallisations et le diélectrique. On note  $\rho_m$  la résistivité des métallisations et  $\delta$  l'angle de perte du diélectrique. On négligera l'influence des pertes Joule et des pertes diélectriques sur la répartition des champs et des courants.

B.II.2.6. Donner l'expression des pertes diélectriques  $P_{DD}$  dans le domaine D en fonction de  $\underline{V}_s(x)$  et en fonction de  $\underline{I}_D(x)$ . On pourra s'aider des résultats du paragraphe .

B.II.2.7. Donner l'expression de l'ensemble des pertes Joule  $P_{JD}$  dans les métallisations du domaine D en fonction de  $\underline{I}_D(x)$ .

B.II.2.8. Proposer un schéma électrique modélisant le comportement électrique du domaine D entre les deux éléments de shoopages. On fera apparaître la capacité  $C_s$  et une résistance  $R_s$  dont on donnera une expression en fonction de  $\rho_m, h, l$  et  $e_m$ .

B.II.2.9. Montrer que l'on peut aussi modéliser le domaine D par l'association en parallèle d'une conductance  $2e \times G_l(\omega)$  et d'un condensateur de capacité  $2e \times C_l(\omega)$ . On donnera les expressions de l'admittance linéique  $G_l(\omega)$  et de la capacité linéique  $C_l(\omega)$  en fonction de  $R_s, C_s, e$  et  $\omega$ . Vers quelle valeur tend  $G_l(\omega)/(C_l(\omega)\omega)$  quand  $\omega$  tend vers  $+\infty$  ?

### B.II.3. Répartition des tensions et des courants le long du shoopage

On assimile le condensateur multicouches à une ligne de transmission d'impédance linéique  $\underline{Z}_l(x)$  et d'admittance linéique  $\underline{Y}_l(x)$  (Figure 9). On s'intéresse à la répartition de  $\underline{V}_s(x)$  et  $\underline{I}_s(x)$ .

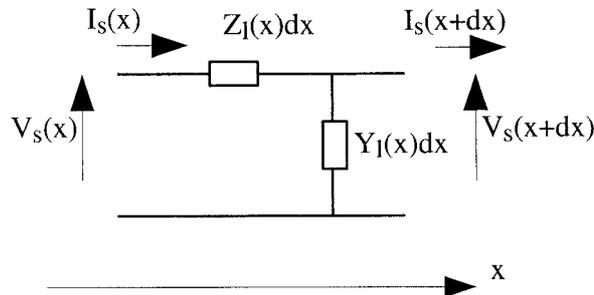


Figure 9: Ligne de transmission

B.II.3.1. Déterminer les équations différentielles auxquelles doivent obéir  $\underline{V}_s(x)$  et  $\underline{I}_s(x)$ .

B.II.3.2. En déduire, dans le cas général où  $\underline{Z}_l(x)$  et  $\underline{Y}_l(x)$  dépendent de  $x$ , les expressions :

- de  $\frac{d^2 V_s(x)}{dx^2}$  en fonction de  $V_s(x)$ ,  $Z_l(x)$ ,  $Y_l(x)$  et de leurs dérivées par rapport à  $x$  ;
- de  $\frac{d^2 I_s(x)}{dx^2}$  en fonction de  $V_s(x)$ ,  $Z_l(x)$ ,  $Y_l(x)$  et de leurs dérivées par rapport à  $x$ .

B.II.3.3. On suppose maintenant que  $Z_l$  et  $Y_l$  sont indépendants de  $x$  et valent respectivement  $Z_l = j\omega L_l$  et  $Y_l = G_l + j\omega C_l$ . Simplifier les équations différentielles obtenues précédemment

B.II.3.4. Résoudre ces équations et montrer qu'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} V_s(x) \\ I_s(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\gamma x) & -Z_c sh(\gamma x) \\ -\frac{1}{Z_c} sh(\gamma x) & ch(\gamma x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s(0) \\ I_s(0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

où  $\gamma$  et  $Z_c$  sont des paramètres dont on donnera l'expression en fonction de  $L_l$ ,  $G_l$ ,  $C_l$  et  $\omega$ .

On notera par la suite  $\alpha$  et  $\beta$  les parties réelle et imaginaire de  $\gamma$ .

B.II.3.5. Donner une expression approchée de  $Z_c$  quand  $G_l$  tends vers 0. En effectuant un développement limité de  $\gamma$  au premier ordre, donner une expression approchée de  $\alpha$  et  $\beta$ .

B.II.3.6. On note  $Z_{co}(0)$  l'impédance du condensateur vu en  $x=0$  (c'est-à-dire entre les points A1 et B1 de la figure 7) quand l'autre extrémité est en circuit ouvert (points A2 et B2). Donner l'expression de  $Z_{co}(0)$  en fonction de  $Z_c$ ,  $\gamma$  et de la longueur  $L$  de la ligne.

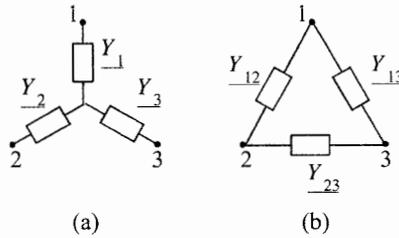
B.II.3.7. Donner une expression approchée de  $1/Z_{co}(0)$  quand  $\omega$  tend vers 0. On montrera que cette impédance est effectivement assimilable à celle d'un condensateur idéal  $C_0$  en parallèle avec une conductance idéale  $G_0$ .

B.II.3.8. On souhaite réaliser un condensateur au polypropylène ( $\epsilon_r=2,2$ ) de capacité  $1\mu\text{F}$ , avec comme autres caractéristiques :  $h=l=1\text{cm}$ ,  $e=5\mu\text{m}$ . Déterminer la longueur  $L$  nécessaire.

Annexes du problème 1

**Annexe A1**  
**Transformation étoile-triangle**  
**(théorème de Kennely)**

On considère un circuit formé de trois admittances en étoile ( $\underline{Y}_1$ ,  $\underline{Y}_2$ ,  $\underline{Y}_3$ ), connectées entre les bornes 1, 2 et 3 (figure a).



On démontre que le comportement vu de l'extérieur du circuit est identique si l'on remplace les admittances  $\underline{Y}_1$ ,  $\underline{Y}_2$ ,  $\underline{Y}_3$  par trois admittances  $\underline{Y}_{12}$ ,  $\underline{Y}_{23}$ ,  $\underline{Y}_{13}$  (figure b), à condition que :

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 \times \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2 \times \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\underline{Y}_{13} = \frac{\underline{Y}_1 \times \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Annexes du problème 1

**Annexe A2**  
**Quelques développements limités**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Annexes du problème 1

**Annexe B**  
**Électromagnétisme et Équations de Maxwell**

**Notations**

Champ magnétique :	$\vec{B}$
Excitation magnétique :	$\vec{H}$
Champ électrique :	$\vec{E}$
Déplacement électrique :	$\vec{D}$
Densité volumique de charges électriques :	$\rho_Q$
Vecteur densité surfacique de courant électrique :	$\vec{j}$
Perméabilité magnétique du vide :	$\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$
Perméabilité magnétique relative :	$\mu_r$
Permittivité diélectrique du vide :	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Permittivité diélectrique relative :	$\epsilon_r$

**Équations de Maxwell**

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_Q \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

**Relations dans les matériaux linéaires**

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \end{aligned}$$

**Potentiel électrostatique et champ électrique**

$$V_N - V_M = - \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

## Problème 2

Cette épreuve va s'intéresser à l'étude d'un système d'émission – réception opto-électronique pour des transmissions de données sur fibres optiques, avec pour exemple d'application le cas d'un réseau local informatique.

De façon générale, dans tout le problème, nous allons étudier une transmission sur fibre optique, qui comprend les éléments suivants, figure 1:

- un circuit d'émission, autour d'une diode électroluminescente (DEL)
- le milieu de transmission = la fibre optique en silice de longueur  $L$
- un circuit de réception, autour d'une photodiode PIN

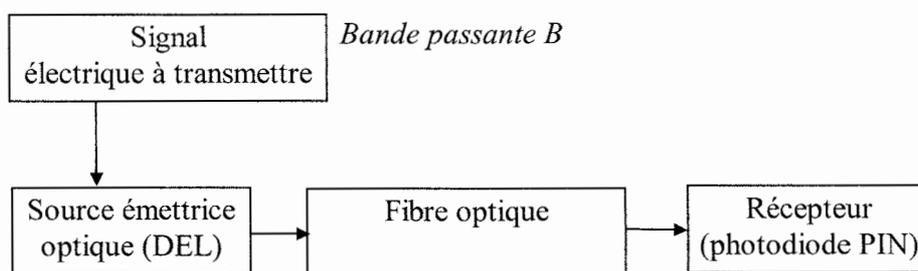


Figure 1. Synoptique général de la liaison optique

Le sujet se décompose en 4 parties qui peuvent être traitées de façon totalement indépendante, et les points principalement développés seront les suivants :

- étude des blocs fonctionnels du système d'émission-réception permettant de réaliser une transmission sur fibre optique, avec le cas de différents types de modulations et de récepteurs (Parties A et B)
- étude des phénomènes de propagation, de dispersion et de bruit dans la liaison à fibre (Partie C)
- étude d'une application particulière, correspondant à une transmission de données sur un réseau local informatique en étoile (Partie D)

Dans l'énoncé, les grandeurs statiques seront notées en majuscules (courant continu  $I$ , tension continue  $V$ ) et les grandeurs dynamiques en minuscules (courant alternatif  $i$ , tension alternative  $v$ ). Enfin, si  $x(t)$  représente une grandeur instantanée,  $\underline{X}(p)$  représentera sa transformée de Laplace et  $\underline{X}(j\omega)$  sa transformée de Fourier dans le domaine fréquentiel.

*Quelques définitions et données générales sur les composants sont fournies en Annexe. Les informations détaillées sur les composants utilisés seront données au fur et à mesure de l'avancement du sujet (et répétées si besoin entre les parties).*

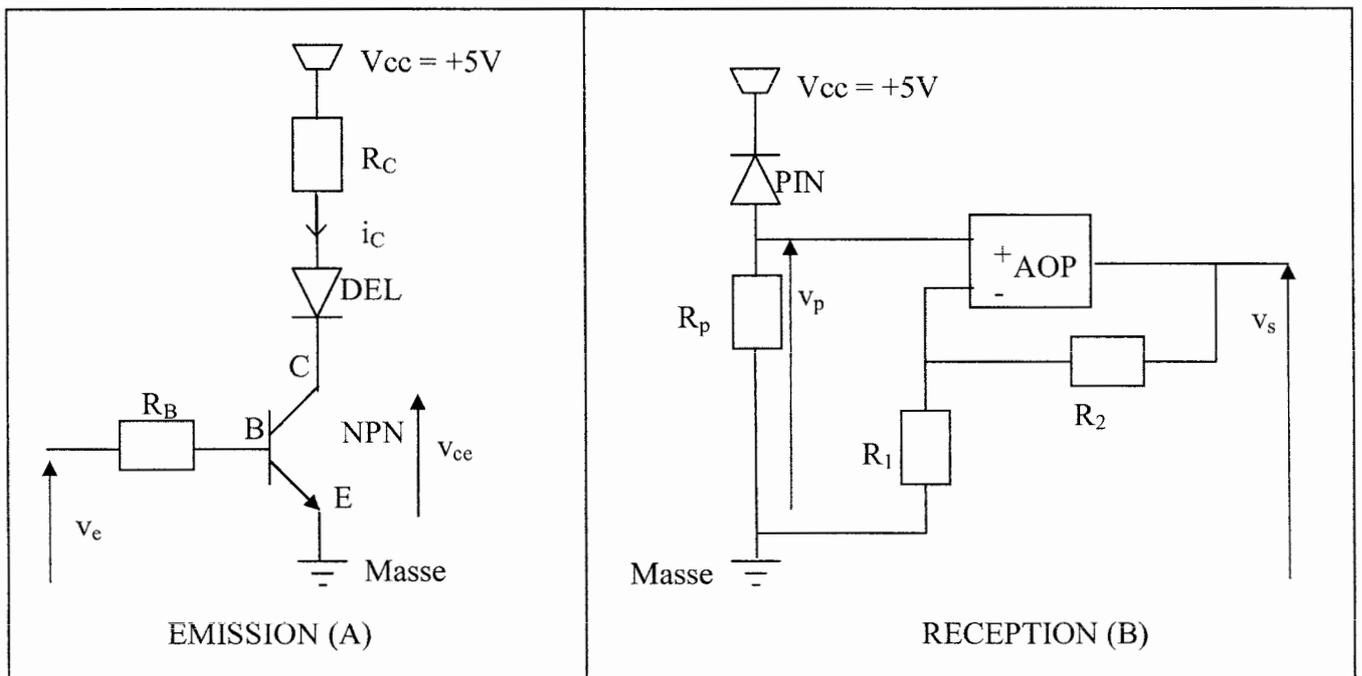
## A – Première partie

### Etude de la modulation OOK du système d'émission-réception

Dans le cas des liaisons optiques, il est souvent assez simple de mettre en œuvre des modulations discrètes de type "tout ou rien" ou OOK (On Off Keying).

Le signal électrique utile est alors transmis sous forme de signaux binaires tels que:  
 0 → niveau de puissance  $P_0$  a priori nul correspondant à une absence de signal lumineux  
 1 → niveau de puissance  $P_1$  correspondant à une commande de la source lumineuse

Nous proposons d'étudier les montages suivants, figure 2, en émission 2(A) et réception 2(B).



Résistances	Diode DEL	Transistor NPN	Photodiode PIN
$R_C = 680 \Omega$	$\lambda_0 = 935\text{nm}$	$V_{be(sat)} = 0,6\text{V}$	$S_{PIN}(\lambda_0) = 0,64\text{A/W}$
$R_B = 39\text{k}\Omega$	$S_{DEL}(\lambda_0) = 0,27 \text{ W/A}$	$V_{ce(sat)} = 0,2\text{V}$	$I_0 = 10\text{nA}$
$R_p = 51\text{k}\Omega$	$V_{DEL(ON)} = 1,8\text{V}$	$\beta_{linéaire} = 150$	$C_d = 7\text{pF}$
$R_1 = 1\text{k}\Omega$		$C_{be} = 70\text{pF}$	
		$h_{11} = 30\text{mV} / I_{b0}$	

Figure 2. Montage pour modulation OOK et caractéristiques des composants

### A.I. Etude du circuit d'émission

Soit  $v_e(t)$  un signal carré périodique de fréquence 1kHz et d'amplitude 0-2V, voir figure 3.

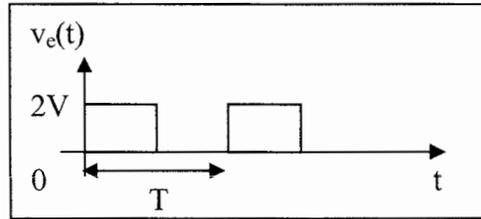


Figure 3. Chronogramme du signal  $v_e(t)$

A.I.1. Expliquer qualitativement le fonctionnement du circuit d'émission sur chaque demi-période de  $v_e(t)$ .

**On se place dans le cas où  $v_e = 2V$  ( $0 < t < T/2$ ).**

A.I.2. Calculer le courant dans la base  $I_B$ .

A.I.3. Connaissant la tension  $V_{DEL}$  aux bornes de la diode électroluminescente, calculer le courant collecteur  $I_C$ . La condition de saturation du transistor NPN est-elle vérifiée? (Justifier votre réponse).

A.I.4. Calculer le flux lumineux  $\phi_E$  émis par la DEL correspondant à ce fonctionnement, pour le cas idéal d'une émission au maximum de sensibilité, soit à la longueur d'onde  $\lambda_0$ .

A.I.5. Si l'on modélise la jonction base-émetteur du transistor NPN par une résistance  $h_{11}$  en parallèle avec la capacité de jonction  $C_{be}$ , exprimer la fonction de transfert du circuit d'émission  $\underline{H}_1(p) = \underline{V}_{be} / \underline{V}_e$  dans l'hypothèse classique d'un fonctionnement petits signaux en régime harmonique (*Un modèle simplifié du transistor est disponible en Annexe*).

Tracer ensuite dans un diagramme de Bode l'allure asymptotique du module de cette fonction de transfert  $\underline{H}_1(p)$ , en donnant les valeurs numériques des points remarquables : gain statique, coupures, pentes.

Pour quelle gamme de fréquences ce montage est-il intéressant ?

A.I.6. Une amélioration du circuit d'émission est proposée ci-après, figure 4, avec l'ajout d'une capacité  $C_B$  en parallèle sur la résistance de base  $R_B$  du transistor. Avec la même modélisation du transistor que précédemment (A.I.5), exprimer en fonction des éléments du circuit la fonction de transfert  $\underline{H}_2(p) = \underline{V}_{be} / \underline{V}_e$  de ce nouveau montage.

A.I.7. Quelle différence observe-t-on entre les fonctions de transfert  $\underline{H}_1(p)$  et  $\underline{H}_2(p)$ ? En déduire la valeur numérique de  $C_B$  pour obtenir un fonctionnement indépendant de la fréquence.

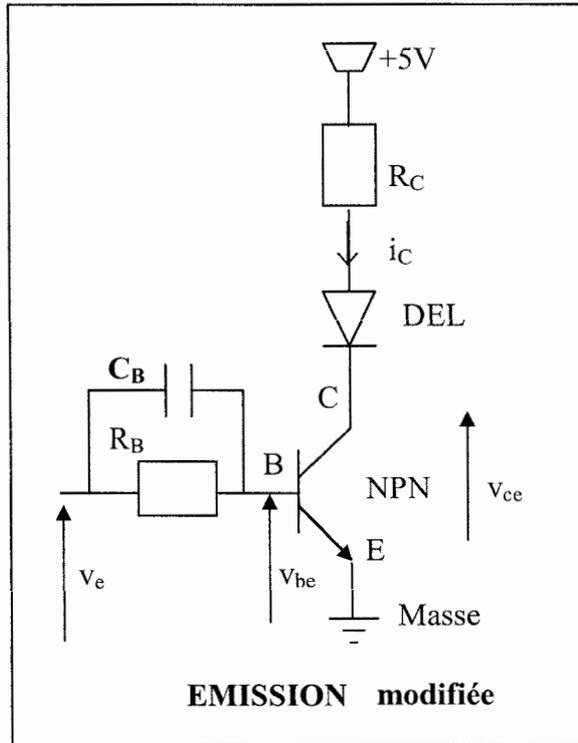


Figure 4. Emission modifiée avec capacité sur la base

## A.II. Etude du circuit de réception

On fait référence ici à la figure 2(B) vue précédemment.

A.II.1. En faisant l'hypothèse d'une atténuation de 20dB le long de la fibre optique reliant les deux circuits, calculer le flux maximal reçu  $\phi_R$  sur la photodiode PIN pour la même longueur d'onde  $\lambda_0$ .

A.II.2. En déduire le niveau de tension maximal  $V_{pmax}$  en sortie de la PIN.

A.II.3. En considérant l'amplificateur opérationnel (AOP) idéal, calculer la valeur de la résistance  $R_2$  à choisir pour observer une tension maximale en sortie  $V_{smax}$  de 1V.

A.II.4. Sachant que la valeur de la capacité en inverse de la photodiode PIN vaut  $C_d = 7$  pF, estimer le retard introduit par cette photodiode sur les informations à transmettre.

A.II.5. Tracer sur 2 graphes distincts l'allure des chronogrammes correspondant à  $v_s(t)$  sur une période complète du signal dans les cas suivants (*en choisissant une échelle astucieuse dans chaque cas*) :

- cas initial du signal  $v_e(t)$  à 1kHz
- cas d'un signal plus rapide à 300kHz

A.II.6. Une amélioration du circuit de réception est obtenue en ajoutant un filtre en sortie, comme celui illustré sur la figure 5.

A.II.6.1. Calculer les fonctions de transfert  $H_A(p)$ ,  $H_B(p)$ , et  $H_C(p)$  correspondant aux 3 sorties  $v_A$ ,  $v_B$  et  $v_C$  des amplificateurs opérationnels considérés comme idéaux, et indiquer de quel type de filtre il s'agit dans chaque cas (le signal d'entrée est la tension  $v$ , et  $\alpha$  représente un coefficient multiplicatif constant).

A.II.6.2. Donner l'expression du facteur de surtension  $Q$ , et de la fréquence propre  $f_0$  associée à ces filtres.

A.II.6.3. Expliquer, en le justifiant, quelle sortie ( $v_A$ ,  $v_B$  ou  $v_C$ ) semble la mieux adaptée à cette application en réception, et comment régler alors le gain statique de ce filtre.

A.II.6.4. Donner un avantage de ces filtres par rapport à d'autres structures classiques que vous connaissez.

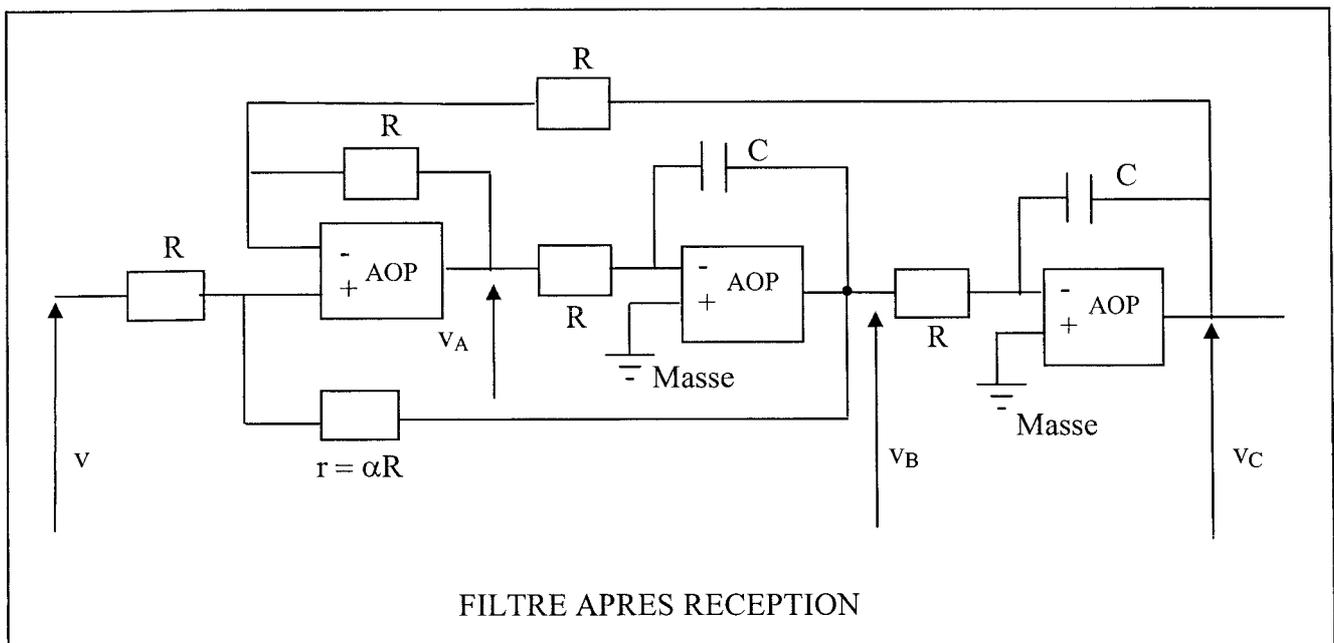


Figure 5. Cellule de filtrage pour circuit de réception

## B – Deuxième partie

### Etude de la modulation linéaire du système d'émission-réception

Dans cette partie, nous étudierons le cas d'une modulation analogique linéaire, qui correspond à la variation de la puissance optique émise par la diode électroluminescente (DEL) proportionnelle au signal électrique à transmettre. Le principe de la modulation repose sur la modification du courant d'excitation de la DEL autour d'un point de fonctionnement, comme illustré figure 6.

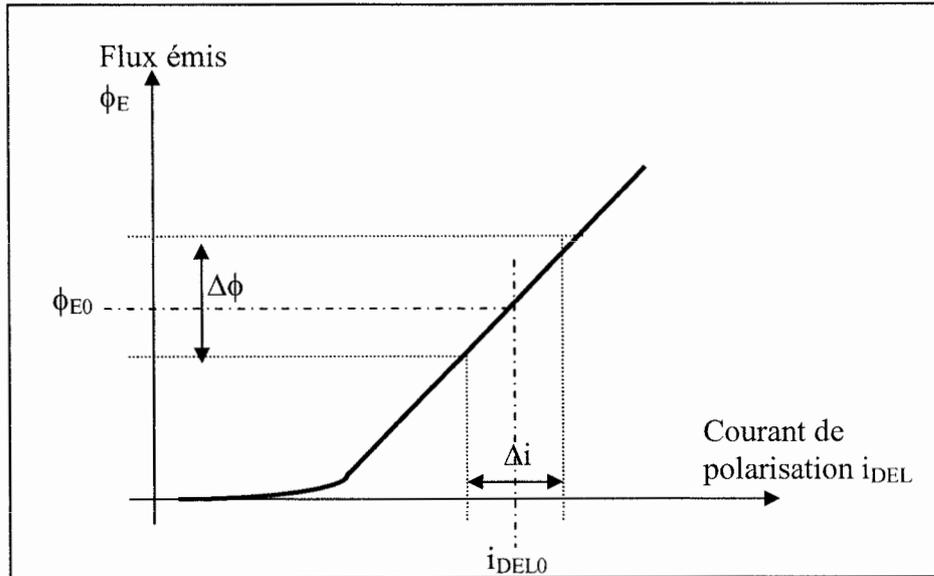


Figure 6. Principe de la modulation linéaire d'intensité d'une DEL

Nous proposons d'étudier successivement plusieurs montages:

- un circuit en émission, figure 7
- un premier circuit en réception, dit « transimpédance », figure 8
- un second circuit en réception à comparateur, figure 9 (vu plus loin).

Les valeurs utiles des composants sont données dans le tableau ci-dessous :

Composants	$R_c$	$R_a$	$R_b$	$C_0$
Valeurs	100 $\Omega$	6800 $\Omega$	1200 $\Omega$	10 $\mu F$

Diode DEL	Transistor NPN	Photodiode PIN
$\lambda_0 = 935\text{nm}$	$V_{be(sat)} = 0,6\text{V}$	$S_{PIN}(\lambda_0) = 0,64\text{A/W}$
$S_{DEL}(\lambda_0) = 0,27\text{ W/A}$	$V_{ce(sat)} = 0,2\text{V}$	$I_0 = 10\text{nA}$
$V_{DEL(ON)} = 1,8\text{V}$	$\beta_{linéaire} = 150$	$C_d = 7\text{pF}$
	$C_{be} = 70\text{pF}$	
	$h_{11} = 30\text{mV} / I_{b0}$	

Rappel des caractéristiques des composants (valeurs de la partie A).

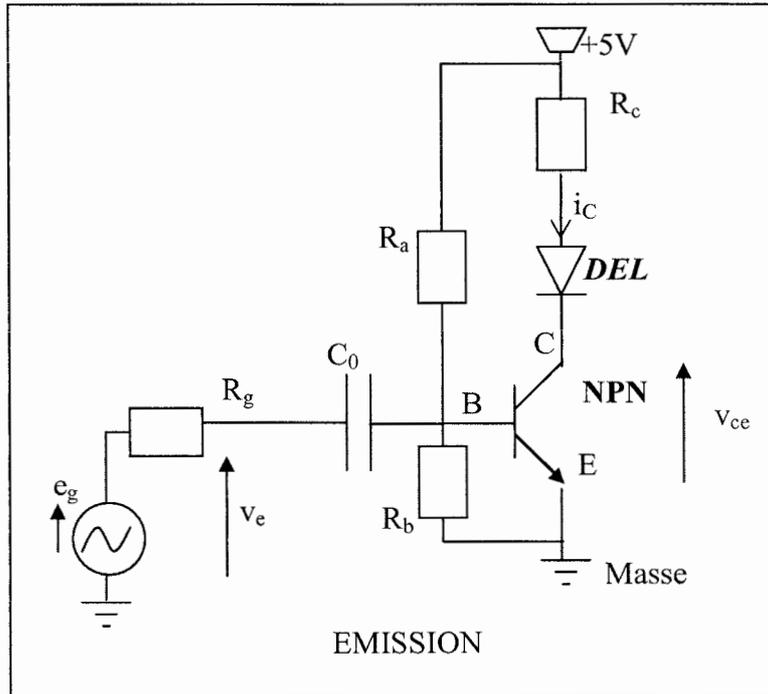


Figure 7. Modulation linéaire, circuit d'émission

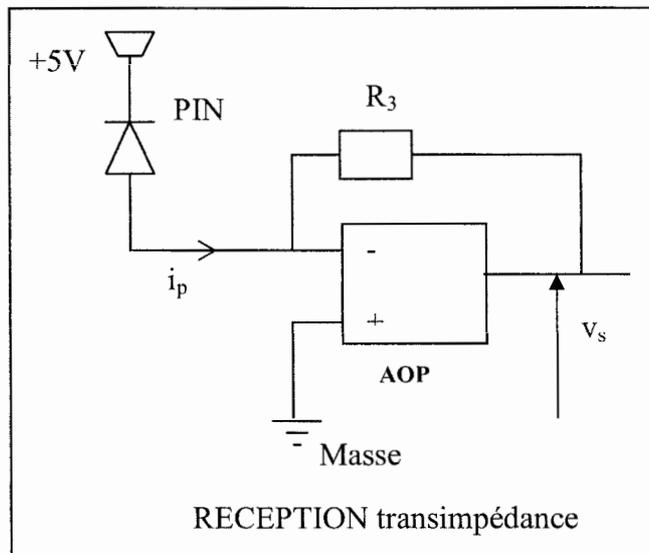


Figure 8. Modulation linéaire, circuit en réception transimpédance

### B.1. Etude du circuit d'émission

On se réfère au circuit de la Figure 7.

La tension d'entrée est issue d'un générateur basse fréquence de résistance interne  $R_g = 50\Omega$ , délivrant un signal sinusoïdal  $v_e(t)$  de fréquence 1kHz :

$$v_e(t) = V_{e_{\max}} \cdot \sin(\omega_0 t), \text{ avec } V_{e_{\max}} = 5\text{mV}, \omega_0 = 2\pi f_0 \text{ et } f_0 = 1\text{kHz}$$

B.I.1. Calculer le point de fonctionnement du circuit d'émission, soit les valeurs du courant  $I_{C0}$  traversant la DEL, de la tension  $V_{CE0}$  aux bornes du transistor NPN, et du flux lumineux émis moyen  $\phi_{E0}$ .

B.I.2. Quel est le rôle de la capacité d'entrée  $C_0$  de  $10\mu\text{F}$  ?

B.I.3. En utilisant le modèle petits signaux simplifié du transistor NPN proposé en Annexe, exprimer le gain en tension du circuit d'émission  $A_V = \frac{V_{ce}}{V_e}$  en fonction des paramètres  $h_{ij}$  du transistor et des éléments du circuit, puis calculer la valeur numérique de ce gain.

B.I.4. En déduire les fluctuations du courant circulant dans la diode émettrice  $\Delta i_C$  puis les fluctuations correspondantes du flux émis  $\Delta \phi_E$ .

B.I.5. Toujours à partir du modèle petits signaux du transistor, calculer maintenant le rapport  $\frac{V_{ce}}{E_g}$ , en faisant l'hypothèse suivante:  $(R_a/R_b) \gg h_{11}$

En supposant que l'on souhaite travailler au moins une décade au dessus de la fréquence de coupure qui apparaît dans cette expression, donner la condition à respecter sur le choix de la valeur de  $C_0$ .

B.I.6. Vérifier que la valeur choisie  $C_0 = 10\mu\text{F}$  permet bien une transmission à 1kHz.

## **B.II. Etude du circuit de réception transimpédance**

**On se réfère au circuit de la figure 8.**

### **B.II.1. Etude à partir d'un modèle élémentaire de la photodiode**

En considérant la photodiode comme une simple source de courant (le photocourant  $i_p$ , avec le courant d'obscurité  $i_0$  négligé), calculer la tension de sortie  $V_s$  du montage en fonction de ce photocourant  $I_p$  dans les deux cas suivants :

B.II.1.1. AOP idéal

B.II.1.2. AOP modélisé par une fonction de transfert en boucle ouverte d'ordre 1 de la forme

$$A(p) = \frac{A_0}{1 + T_p p}, \text{ avec } A_0 = 1,1 \cdot 10^5 \gg 1 \text{ et } T = 0,015\text{s}.$$

B.II.1.3. En déduire l'expression de la fréquence de coupure du montage  $f_l$  puis donner sa valeur numérique. Préciser le rôle de la résistance  $R_3$ .

### **B.II.2. Etude avec prise en compte de la capacité $C_d$ dans le modèle de la photodiode**

On considère finalement la photodiode comme un générateur de courant avec sa capacité de jonction  $C_d$  en parallèle (*voir modèle équivalent fourni en Annexe*).

B.II.2.1. Exprimer la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{V_s}{I_p}$  sous une forme canonique d'ordre 2, en conservant le modèle d'ordre 1 de l'AOP proposé en B.II.1.2.

Forme canonique d'ordre 2 proposée : 
$$\underline{H}_3(p) = \frac{H_{30}}{1 + \frac{p}{\omega_0 Q} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

B.II.2.2. Donner les expressions du gain statique  $H_{30}$ , de la pulsation  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$  en fonction des éléments du circuit, en simplifiant les expressions sachant que  $A_0 \gg 1$ .

B.II.2.3. Quel compromis voit-on apparaître sur le choix de la valeur de  $R_3$  ?

B.II.2.4. Application numérique : en considérant une atténuation de 20dB le long de la fibre optique reliant Emetteur et Récepteur, calculer la valeur de  $R_3$  telle que la valeur moyenne de la tension de sortie,  $V_{s0}$ , dans la bande passante du circuit soit de 1V au point de fonctionnement du montage. En déduire l'amplitude des fluctuations  $\Delta v_s$  de cette tension.

B.II.2.5. En déduire les valeurs numériques de  $H_{30}$ ,  $\omega_0$  et la fréquence correspondante  $f_0$ , ainsi que la valeur de  $Q$ .

### B.III. Etude d'un circuit de réception à comparateur

L'amplificateur opérationnel est maintenant utilisé en comparateur comme illustré figure 9.

Composants	$R_p$	$R_n$	$R_4$	$C_n$
Valeurs	47 k $\Omega$	10 k $\Omega$	2700 $\Omega$	10 $\mu$ F

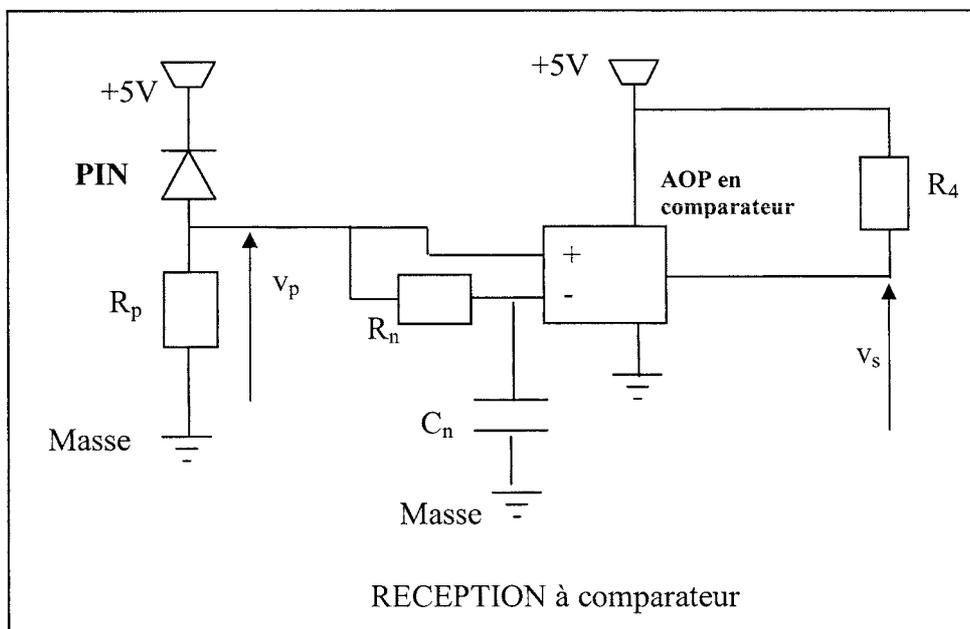


Figure 9. Modulation linéaire, circuit de réception modifié avec AOP en comparateur

B.III.1. Indiquer la principale différence entre un fonctionnement comparateur et amplificateur pour l'amplificateur opérationnel.

B.III.2. Expliquer à quoi sert l'ensemble {résistance  $R_n$  - capacité  $C_n$ } sur l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel.

B.III.3. Dans le cas d'un fonctionnement en comparateur idéal, expliquer le principe de ce montage sur une période du signal  $v_p(t)$ .

B.III.4. Si l'amplificateur opérationnel monté en comparateur présente en fait un phénomène d'hystérésis comme celui illustré figure 10, exprimer la valeur maximale  $V_{ref\ max}$  possible de  $V_{ref}$ .

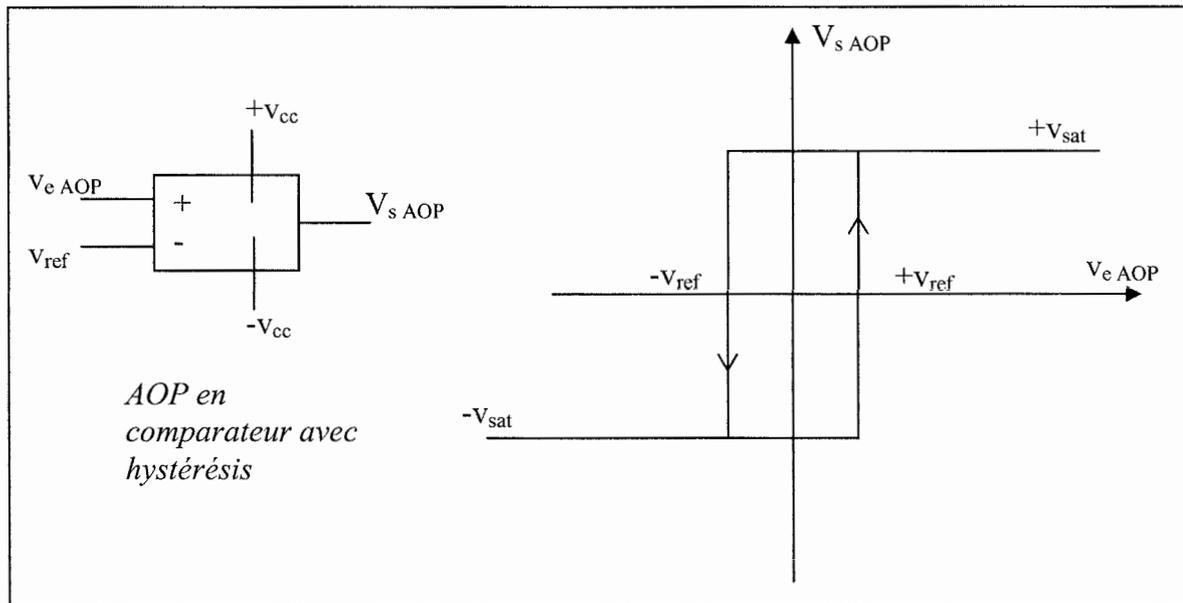


Figure 10. Exemple de courbe d'hystérésis

B.III.5. Tracer sur 2 graphes distincts les chronogrammes de  $v_p(t)$  et  $v_s(t)$  relatifs au montage récepteur de la figure 9, en utilisant certaines données numériques issues de la partie B.I. On choisira comme échelle 1cm pour 0,5V et  $V_{ref} = V_{ref\ max}/5$ .

## C - Troisième partie

### Propagation dans la fibre optique et analyse du bruit dans la liaison

La liaison utilise une fibre multimodes à saut d'indice (cœur d'indice  $n_1$  et gaine d'indice  $n_2$ ), travaillant à  $\lambda_0 = 935\text{nm}$ .

*Quelques définitions concernant les fibres optiques sont rappelées en Annexe.*

#### C.I. Propagation et dispersion dans la fibre optique

On considère un modèle simplifié de propagation dans la fibre optique à partir de l'optique géométrique, comme une succession de réflexions totales à l'interface cœur/gaine, figure 11.

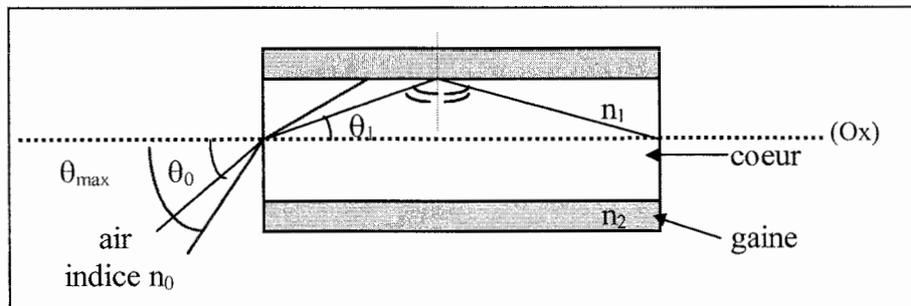


Figure 11. Modèle simplifié de propagation dans la fibre, vue en coupe longitudinale

C.I.1. Rappeler la valeur numérique de l'indice de l'air  $n_0$ .

#### C.I.2. Ouverture numérique.

Démontrer à l'aide des lois de la réfraction de Descartes que l'angle d'acceptance  $\theta$  de la fibre s'exprime par  $\sin\theta_{\max} = \text{ON} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ , où ON représente l'Ouverture Numérique de la fibre.

#### C.I.3. Dispersion.

C.I.3.1. A partir de l'expression de la dispersion modale linéique dans une fibre à saut d'indice donnée par  $D_m = \Delta\tau = \frac{1}{c} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot (n_1 - n_2)$ , trouver une relation simple entre  $D_m$ ,  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide, ON l'ouverture numérique de la fibre et  $n_2$  l'indice de la gaine, dans le cas où les indices  $n_1$  et  $n_2$  sont très proches.

C.I.3.2. En déduire l'expression de l'élargissement total d'impulsion  $\Delta T$  induit pour une longueur de fibre  $L$ .

C.I.3.3 Calculer cet élargissement  $\Delta T$  pour  $L = 1 \text{ km}$ ,  $\text{ON} = 0,25$  et  $n_2 = 1,469$  (on prendra  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$ ). En déduire le débit maximal admissible dans la fibre, en faisant l'hypothèse d'un codage simple de rapport cyclique  $\frac{1}{2}$ .

**Tournez la page S.V.P.**

## C.II. Analyse du bruit en réception

La définition générale du **rapport signal sur bruit** est donnée en Annexe par :

$$RSB = \frac{\text{puissance du signal utile}}{\text{puissance totale du bruit}}, \text{ ainsi que quelques rappels sur les notions de bruit.}$$

Dans cette application d'optoélectronique, le signal utile correspond au signal optique détecté converti en photocourant puis en tension  $v_s$ , et le bruit doit prendre en compte toutes les contributions en réception au niveau de la photodiode et du circuit électronique associé. On notera B la bande utile de fréquences.

Nous ferons systématiquement l'**hypothèse de contributions indépendantes** des différentes sources de bruit.

Dans cette partie, nous nous limiterons au circuit de réception transimpédance de la figure 12.

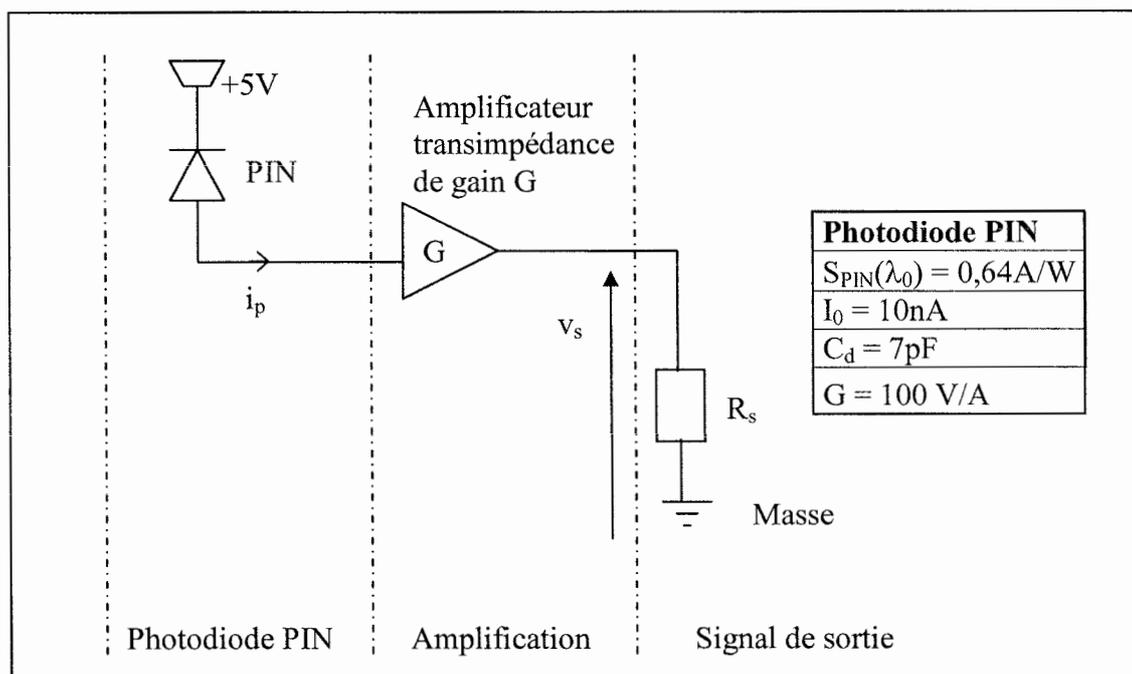


Figure 12. Montage utilisé en réception pour les calculs de bruit

C.II.1. Calculer la puissance du signal utile  $P_u$  disponible en sortie.

C.II.2. Calcul des différentes contributions du bruit, supposées indépendantes.

C.II.2.1. Contribution de la photodiode : exprimer la densité spectrale de puissance liée au bruit généré par la photodiode PIN, en déduire la densité spectrale de puissance en sortie, puis la puissance de bruit en sortie liée à la photodiode sur la bande passante utile pour la transmission.

C.II.2.2. Contribution de l'amplificateur : on supposera l'amplificateur transimpédance de gain constant  $G = 100 \text{ V/A}$  sur toute la bande utile et apportant un bruit électronique de densité spectrale observée en entrée constante  $i_G^2 = 5 \cdot 10^{-24} \text{ A}^2/\text{Hz}$ . Exprimer la densité spectrale de puissance générée en sortie due au bruit de l'amplificateur. Déduire la puissance de bruit en sortie liée à l'amplificateur sur la bande passante utile pour la transmission.

C.II.2.3. Autres contributions : proposer d'autres sources de bruits susceptibles de modifier ce bilan (mais qui restent négligeables devant les contributions précédentes).

C.II.3. **Calcul du rapport signal sur bruit (RSB)** : D'après les questions C.II.1 et C.II.2, exprimer le rapport signal sur bruit en sortie.

#### C.II.4. **Application numérique.**

C.II.4.1. Calculer la valeur du RSB exprimé en dB pour un flux reçu minimal  $\phi_R$  de  $1 \mu\text{W}$  et une bande passante utile en transmission  $B$  de  $5 \text{ MHz}$ .

C.II.4.2. Quel est l'élément du montage le plus bruyant ? De combien de dB pourrait-on améliorer le RSB en supposant pouvoir réduire très fortement la contribution de cet élément ?

## D – Quatrième partie

### Etude de la transmission de données sur un réseau local informatique en étoile

Il s'agit dans cette partie d'étudier une application particulière, correspondant à la transmission de données vidéo sur un réseau local informatique en étoile, voir figure 13.

Cette partie est indépendante des précédentes, et se décompose en 3 questions principales relativement liées les unes aux autres:

D.I. Calcul de la puissance en réception

D.II. Bilan de la liaison et application à l'estimation du nombre  $N$  de terminaux connectés

D.III. Influence des phénomènes de dispersion sur les performances de la liaison

*Une unité centrale distribue des données à 5 Mbit/s à un certain nombre  $N$  de terminaux par l'intermédiaire du réseau fibré ci-dessous.*

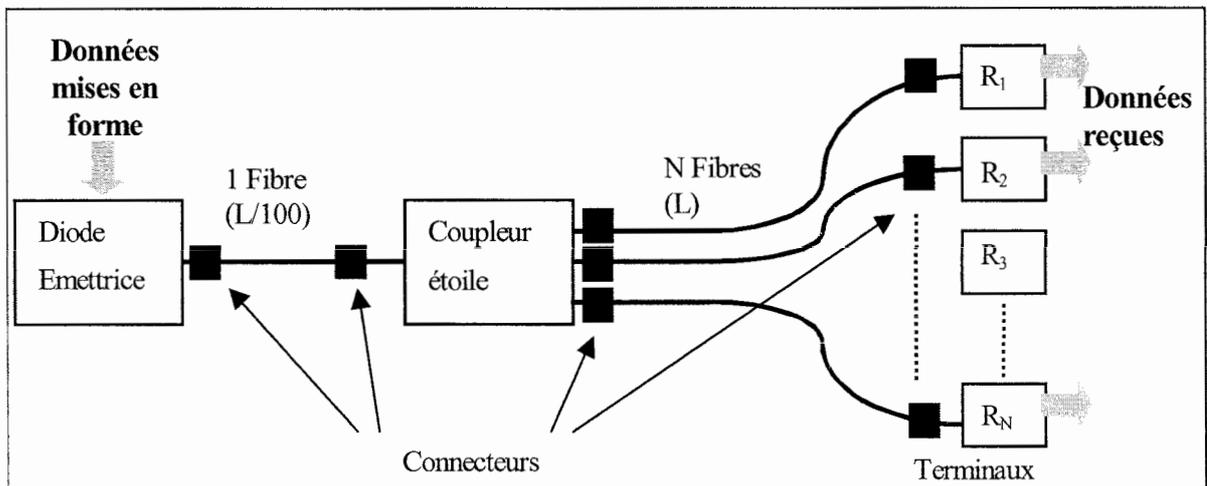


Figure 13. Application à la transmission de données à l'aide d'un réseau en étoile

Les caractéristiques générales de l'application sont les suivantes:

#### Emetteur:

- Diode électroluminescente (DEL) fonctionnant à  $\lambda_0 = 0,935 \mu\text{m}$ , et de largeur spectrale  $\Delta\lambda = 100 \text{ nm}$
- Puissance optique moyenne émise dans la fibre  $\phi_E$
- Bande passante de la DEL: 100 MHz

#### Fibres optiques:

- Fibres multimodes à saut d'indice
- Atténuation à  $\lambda_0$  donnée par  $\alpha = 2,2 \text{ dB/km}$
- Dispersion modale fixant une bande passante de 50 MHz.km
- Dispersion chromatique de  $100 \text{ ps.km}^{-1}.\text{nm}^{-1}$
- Longueur des tronçons de fibre en km, avec  $L$  entre le coupleur et chaque récepteur  $R_N$  et  $L/100$  entre la DEL et le coupleur. On prendra  $L = 1 \text{ km}$ .

**Récepteur:**

- Photodiode PIN de sensibilité  $S_{PIN} = 0,64 \text{ A/W}$ , de courant d'obscurité  $I_0$  négligeable
- Résistance de charge  $R_c = 16 \text{ k}\Omega$
- Préamplificateur de densité spectrale de puissance de bruit ramené en entrée, de valeur  $i_A^2 = 2 \cdot 10^{-24} \text{ A}^2/\text{Hz}$
- Bande passante du signal à transmettre  $B = 5 \text{ MHz}$

**Connecteurs et coupleur étoile:**

- Atténuation unitaire introduite par connecteur: 0,2 dB
- Nombre de voies en sortie du coupleur = N
- Pertes introduites par le coupleur:  $P_c = 10 \cdot \log(N) + 3 \text{ dB}$

**D.I. Calcul de la puissance en réception**

D.I.1. On donne l'expression du rapport signal à bruit  $RSB_1$  par :

$$RSB_1 = \frac{(S_{PIN} \Phi_R)^2}{2eS_{PIN} \Phi_R B + \frac{4kTB}{R_c} + i_A^2 \cdot B}, \text{ avec les notations correspondant aux caractéristiques de la}$$

liaison ci-dessus, soit en particulier B la bande passante en réception,  $\phi_R$  le flux reçu sur la photodiode,  $S_{PIN}$  la sensibilité de la photodiode, e la charge élémentaire, k la constante de Boltzman, T la température,  $R_c$  la résistance de charge, et  $i_A^2$  la densité spectrale de puissance de bruit du pré-amplificateur ramené en entrée.

Justifier rapidement les différents termes de cette expression.

D.I.2. Exprimer ensuite ce rapport dans l'hypothèse où les contributions au bruit issues de la photodiode sont négligeables devant celles de l'électronique de sortie (charge et préamplification), soit  $RSB_2$ .

D.I.3. Calculer la puissance optique moyenne  $\phi_R$  en réception (exprimée en mW ou dBm) pour obtenir un taux d'erreur binaire de  $10^{-9}$ , soit un RSB de 144 (ou encore 22 dB), dans les 2 cas précédents des questions D.I.1. et D.I.2. On notera  $\phi_{R1}$  pour  $RSB_1$  et  $\phi_{R2}$  pour  $RSB_2$ .

D.I.4. Comparer ces deux valeurs et conclure sur l'hypothèse précédente.

**D.II. Bilan de la liaison et estimation du nombre N de terminaux connectés**

D.II.1. Sachant que l'atténuation globale de cette liaison est de 50dB, calculer la puissance optique émise  $\phi_E$  dans la fibre optique en sortie de DEL (préciser quelle valeur de RSB vous choisissez pour le calcul).

D.II.2. En déduire le nombre N maximal de branches, en choisissant comme longueur unitaire  $L=1\text{km}$ , avec une pénalité de 1,6dB relative aux phénomènes de dispersion et une marge de sécurité de 3dB.

### **D.III. Etude des phénomènes de dispersion**

D.III.1. Calculer l'élargissement total d'impulsion  $\Delta T$  résultant des phénomènes de dispersion modale et chromatique, pour une longueur unitaire  $L = 1 \text{ km}$ .

D.III.2. Estimer alors la bande passante maximale  $B_{\text{max}}$  compatible avec cette fibre optique (on pourra par exemple faire l'hypothèse d'une transmission binaire simple de rapport cyclique  $\frac{1}{2}$ ).

D.III.3. Quel facteur viendra limiter en premier cette liaison si on doit multiplier le débit d'un facteur 2 pour une même configuration?

D.III.4. Quel facteur viendra limiter en premier cette liaison si on doit multiplier  $L$  par 5 (soit  $L = 5 \text{ km}$ ), en conservant la bande passante initiale de  $5 \text{ MHz}$ ?

Annexes du problème 2

ANNEXES du problème 2

Vous disposez dans ces annexes de quelques définitions et de données générales sur les composants utilisés.

**Unités de puissance :**

- P en dBm = 10. Log (P en mW)
- Exemples:

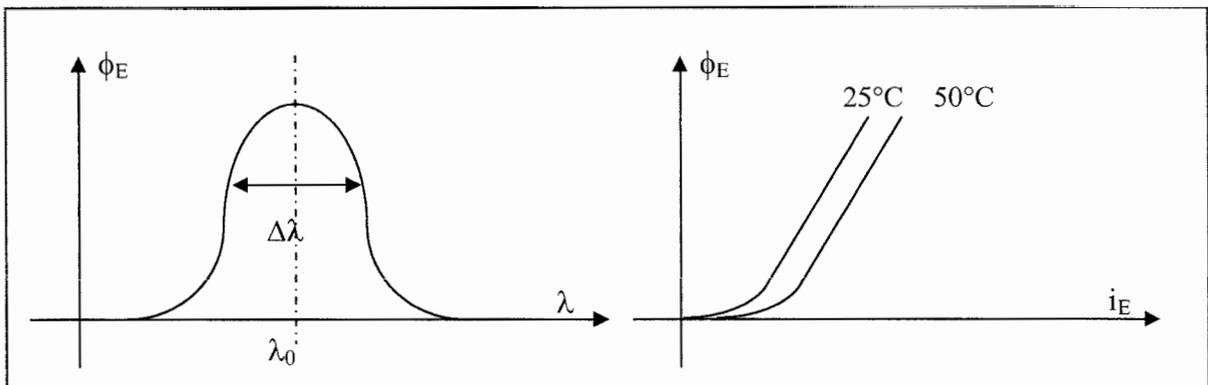
P (dBm)	0	30	-10
P (mW)	1	1000	0,1

**Diodes électroluminescentes (DEL) :**

- La longueur d'onde émise  $\lambda$  s'exprime par la relation  $\lambda(\mu\text{m}) = \frac{1,2398}{E_g(\text{eV})}$   
Elle est caractéristique du matériau semi conducteur utilisé ( $E_g$  = énergie du gap).

- Exemple de spectre d'émission, avec  $\phi_E$  flux émis :

La relation  $\phi_E$  fonction du courant  $i_E$  correspond à la **sensibilité de la diode**  $S_{DEL}(\lambda)$  généralement donnée en W/A.

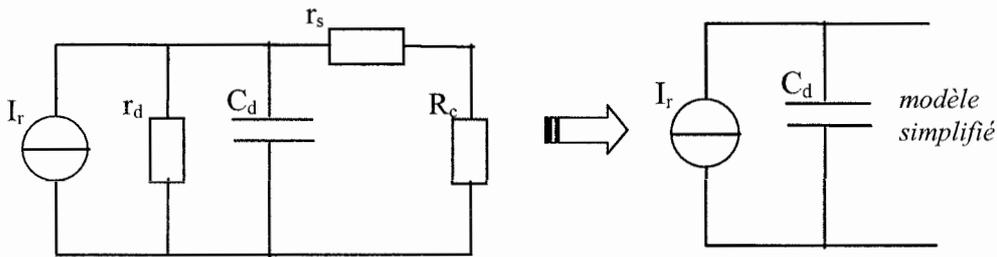


**Photodiodes PIN :**

- **Sensibilité spectrale** d'une photodiode PIN : il s'agit de la sensibilité en courant, soit l'accroissement du courant détecté par rapport à l'accroissement du flux incident, généralement exprimé en A/W.

Annexes du problème 2

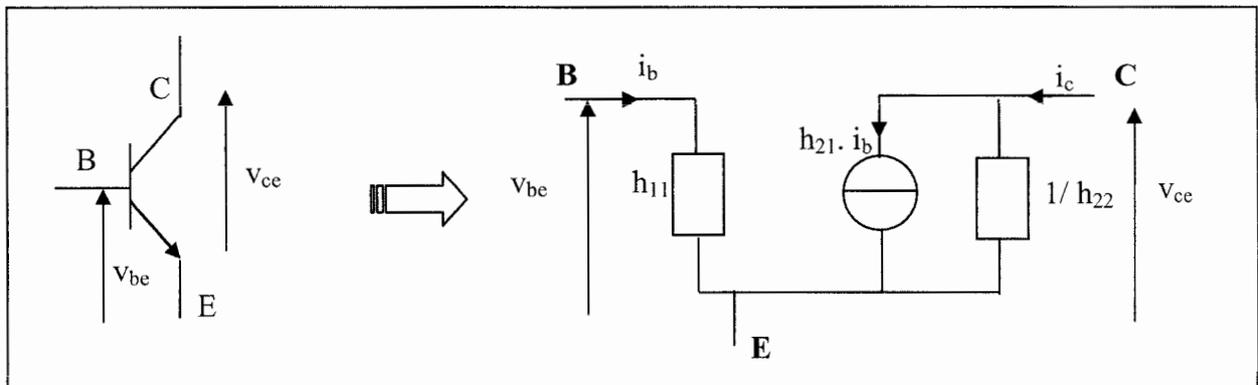
- Sensibilité à une longueur d'onde donnée:  $S_{PIN}(\lambda) = \frac{\Delta i}{\Delta \phi}$
- Sensibilité sur une bande spectrale  $\Delta \lambda$  donnée:  $S_{PIN}(\Delta \lambda) = \frac{\Delta i}{\int_{\Delta \lambda} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) d\lambda}$
- **Photocourant** généré  $I_p = S_{PIN} \cdot \phi_R$ , avec  $\phi_R$  le flux optique moyen reçu sur la surface sensible de la photodiode et  $S_{PIN}$  la sensibilité spectrale de la photodiode.
- **Courant d'obscurité**  $I_0$  = courant inverse résiduel en absence de flux lumineux
- **Schéma électrique équivalent**
  - courant inverse généré:  $I_r = I_p + I_0$ , avec  $I_p$  photocourant et  $I_0$  courant d'obscurité
  - résistance dynamique:  $r_d$
  - résistance ohmique:  $r_s$
  - capacité de jonction:  $C_d$
  - résistance de charge:  $R_c$



**Transistor NPN :**

- **Modèle simple basses fréquences petits signaux** du transistor NPN

Le transistor peut être représenté par ses **paramètres  $[h_{ij}]$**  selon le modèle suivant :



**Paramètres  $[h_{ij}]$ :**  $h_{11} = 30\text{mV} / I_{B0}$ ,  $h_{22} = 5 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ ,  $h_{21} = \beta = 150$ ,  $h_{12} = 0$ .

## Annexes du problème 2

---

### Rappels sur le bruit :

- **Différents types de bruit**

#### Bruit thermique dans une résistance R:

- lié à la vitesse des porteurs de charge dont l'énergie cinétique fluctue sous l'effet de la température
- on peut le modéliser par une source de tension de bruit thermique de densité spectrale de puissance  $v_r^2=4kTR$
- ou par une source de courant de bruit thermique de densité spectrale de puissance  $i_r^2=\frac{4kT}{R}$ , avec
  - k = constante de Boltzman =  $1,38.10^{-23}$  J/K,
  - T = température en K, usuellement T = 300K

#### Bruit de grenaille d'une jonction:

- lié à la fluctuation des courants des porteurs de charge dans une jonction
- modélisé par un courant de bruit de densité spectrale de puissance  $i^2=2.e.I$ , avec
  - e = charge électronique =  $1,6.10^{-19}$  C,
  - I = courant à l'origine du bruit

#### Unités :

Le bruit donné sous forme d'une densité spectrale de bruit s'exprimera soit en V<sup>2</sup>/Hz, soit en A<sup>2</sup>/Hz selon le modèle utilisé.

- **Rapport signal sur bruit**

Définition générale :  $RSB = \frac{\text{puissance du signal utile}}{\text{puissance totale du bruit}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Concours : \_\_\_\_\_

Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Intitulé de l'épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_

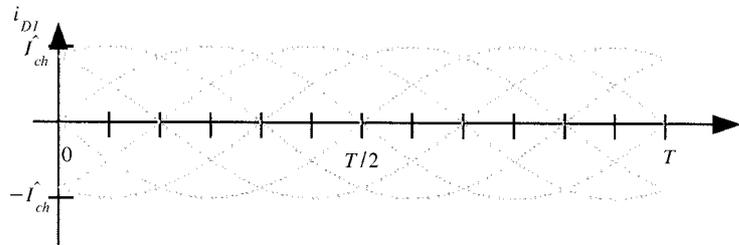
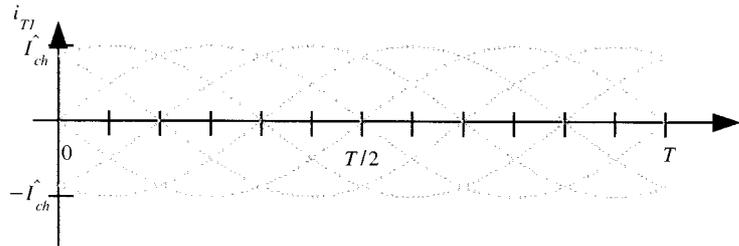
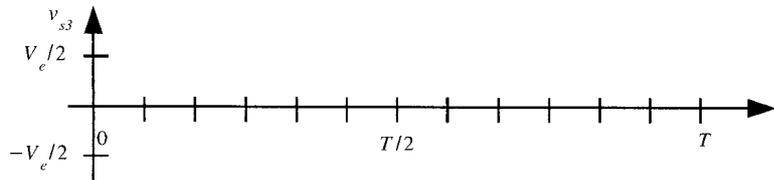
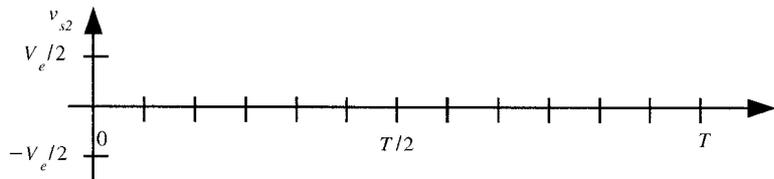
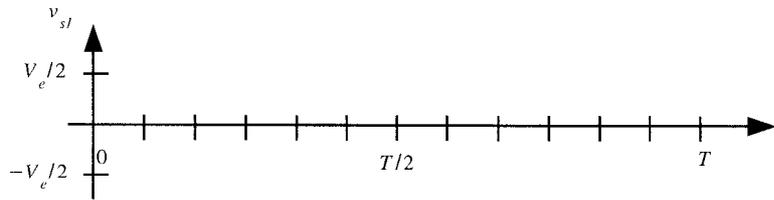
Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

AE2-30.3

Documents-réponse du problème 1

Document-réponse A1



(D)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Concours : \_\_\_\_\_

Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Intitulé de l'épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

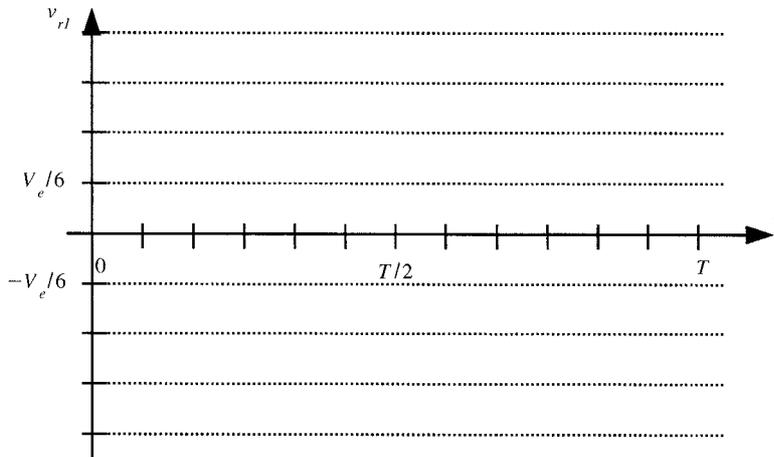
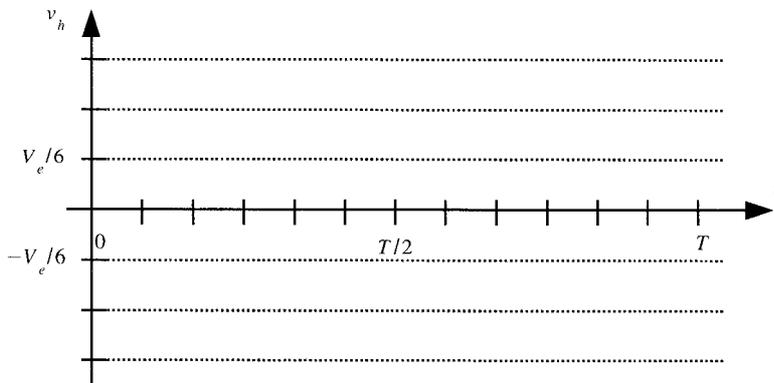
Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

AE2-30.3

Documents-réponse du problème 1

Document-réponse A2



NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Concours : \_\_\_\_\_

Spécialité/option : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Intitulé de l'épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_

*(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)*

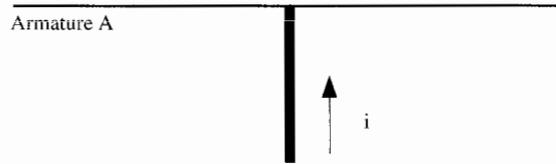
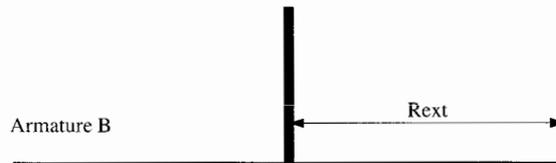
Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat

*(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)*

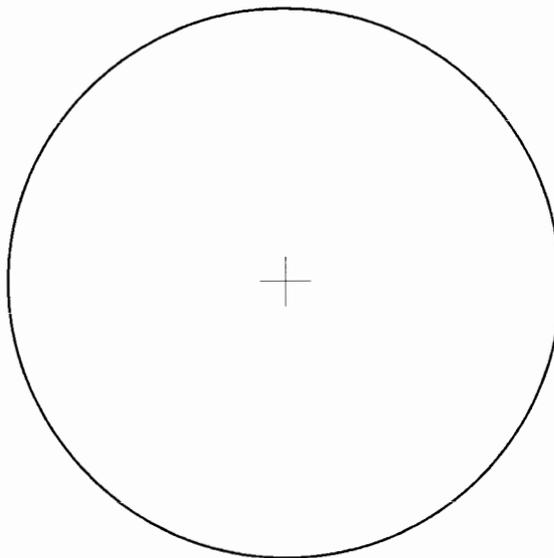
AE2-30.3

Documents-réponse du problème 1

Document-réponse B1



Vue de face



Vue de dessus