

SESSION DE 2008

**CONCOURS EXTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

Section : SCIENCES PHYSIQUES

Option : PHYSIQUE APPLIQUÉE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

**QUELQUES ASPECTS DES PHENOMENES DE TRANSPORT ET DES
PROCESSUS DISSIPATIFS ASSOCIES DANS LES CONDUCTEURS ET
LES SEMI-CONDUCTEURS.
COUPLAGES ENTRE CES DIFFERENTS PHENOMENES.**

Les différentes parties du problème sont assez largement indépendantes entre elles.

Toutes les unités devront être données dans le système international.

Données :

Charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314$ J.mol⁻¹.K⁻¹.

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹

Conductivité électrique du cuivre à 20°C : $\gamma = 6,0 \cdot 10^7$ S.m⁻¹.

Formules d'analyse vectorielle :

\vec{A} étant un champ de vecteur et V et U des champs scalaires :

$$\text{notation : } \overline{\text{grad}}(U) = \nabla U$$

$$\overline{\text{grad}}(UV) = U\overline{\text{grad}}(V) + V\overline{\text{grad}}(U)$$

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{A})) = \overline{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$$

$$\text{div}(V \vec{A}) = V \text{div}(\vec{A}) + \overline{\text{grad}}V \cdot \vec{A}$$

Théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} \, dV \quad \text{où S est une surface fermée délimitant le volume } \mathcal{V}$$

A. CONDUCTION ÉLECTRIQUE PURE

Pour rendre compte, entre autre, de la conductivité électrique dans les métaux, on utilise le **Modèle de Drude** (du nom du physicien allemand Paul Drude). Ce modèle est une adaptation effectuée en 1900 de la théorie cinétique des gaz aux électrons des métaux (découverts 3 ans plus tôt, en 1897 par J.J. Thomson). En considérant les électrons d'un métal comme des particules classiques ponctuelles confinées à l'intérieur du volume défini par l'ensemble des atomes de l'échantillon, on obtient un gaz qui est entraîné dans un mouvement d'ensemble (lequel se superpose aux mouvements individuels des particules) par des champs électriques et magnétiques et freiné dans ce mouvement par des collisions. Bien que se basant sur des hypothèses démenties depuis (description purement classique du mouvement des électrons), il permet de rendre compte, dans la plupart des cas de plusieurs propriétés des métaux.

A.1. Modèle microscopique classique de la conductivité électrique dans les métaux : Modèle de Drude

Il s'agit d'établir, de façon simple, la forme locale de la loi d'Ohm dans un conducteur métallique.

La démarche utilisée dans le modèle de Drude peut être adaptée à d'autres types de conducteurs.

Le métal est assimilé à un réseau cristallin d'ions positifs dans lequel les électrons de conduction (seuls porteurs de charge pris en compte), de charge individuelle $-e$, de masse m se déplacent librement.

Dans le conducteur en équilibre ces électrons ont des mouvements de directions équiprobables et leur vitesse moyenne est nulle. Sous l'action d'un champ électrique \vec{E} ils acquièrent la vitesse moyenne \vec{v} , dans le référentiel du laboratoire. L'agitation thermique des électrons et leurs collisions incessantes sur les ions du réseau et entre eux sont un frein au mouvement d'ensemble des porteurs. Ce phénomène est modélisé par une force $-\lambda \vec{v}$ appliquée à chaque électron, analogue à une force de frottement fluide.

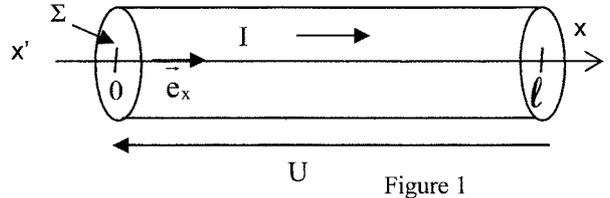
1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par \vec{v} . Mettre en évidence une constante de temps τ que l'on exprimera en fonction de λ et m .
2. Donner succinctement une interprétation physique de la dénomination « temps de collision » ou « temps de relaxation » utilisée pour τ .
3. On suppose le champ électrique stationnaire. Résoudre l'équation précédente en supposant la vitesse initiale moyenne de l'électron nulle.
4. Montrer que \vec{v} tend vers une limite \vec{u} que l'on exprimera en fonction de e , τ , m et \vec{E} .
5. Donner l'expression de la mobilité μ des porteurs de charge définie par $\vec{u} = \mu \vec{E}$. Définir la dimension de μ puis son unité.

Soit un milieu conducteur, uniquement soumis à un champ électrique stationnaire $\vec{E}(\vec{r})$, parcouru par des courants de densité $\vec{j}(\vec{r})$. On appelle γ la conductivité électrique et n désigne la densité d'électrons de conduction dans le métal.

6. Rappeler la relation liant le vecteur densité de courant \vec{j} à l'intensité du courant à travers une surface quelconque Σ . Quelle est l'unité de \vec{j} ?
7. Énoncer la forme locale de la loi d'Ohm. Préciser les unités des différentes grandeurs mises en jeu. Quelle est l'origine de cette loi ?
8. Relier, sans démonstration, le vecteur densité de courant \vec{j} dans le milieu à la vitesse d'ensemble des électrons calculée précédemment.
9. Montrer alors que le modèle précédent rend compte de la loi d'Ohm locale. Exprimer γ en fonction de n , e , τ et m .
10. Application numérique pour le cuivre à 20 °C :
masse volumique $\alpha = 9\,000 \text{ kg.m}^{-3}$; masse molaire : $M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$.
On suppose que le cuivre libère un électron par atome. Calculer τ ainsi que, pour un courant d'intensité 1 A parcourant un fil cylindrique de section $\Sigma = 1 \text{ mm}^2$, la norme u de la vitesse limite.
11. Que penser de la valeur de u ?
La vitesse u est-elle la vitesse exacte du porteur ?
12. Compatibilité éventuelle du modèle avec une théorie statistique classique.
Dans la théorie de Maxwell Boltzmann, la vitesse quadratique moyenne des électrons, u_m , est donnée par le théorème de l'équipartition de l'énergie. Exprimer u_m en fonction de T , k (constante de Boltzmann) et m . Puis calculer numériquement sa valeur pour le cuivre à 20°C.
13. En déduire une estimation du libre parcours moyen, distance moyenne parcourue par les électrons entre deux collisions, dans ce traitement classique. Commenter la valeur obtenue.
14. On cherche à vérifier la compatibilité éventuelle du modèle de Drude avec la statistique quantique de Fermi-Dirac. Dans ce modèle quantique la vitesse typique des électrons est $u_F \approx \sqrt{\frac{\mathcal{E}_F}{m}}$, les électrons de conduction ayant une énergie voisine de l'énergie de Fermi $\mathcal{E}_F \approx 10 \text{ eV}$.
En déduire le libre parcours moyen dans ce modèle. On utilisera la valeur classique de la durée moyenne τ entre deux collisions.
15. Peut-on attribuer le phénomène de conduction électrique aux collisions des électrons sur les ions du réseau comme le suppose le modèle de Drude ?
Donner une interprétation plus adaptée du processus de conduction.

A2. Notion de résistance électrique en régime stationnaire

16. On considère, toujours en régime stationnaire un tronçon cylindrique de longueur l et de section Σ d'un milieu ohmique de conductivité γ , parcouru par un courant de vecteur densité $\vec{j} = j(x)\vec{e}_x$. Montrer que l'intensité I du courant qui parcourt le tronçon est reliée à la tension U aux bornes de celui-ci par la relation $U = R I$, où R est une constante dont on donnera l'expression littérale.



17. Comment peut-on, à partir de cette forme cylindrique, adapter cette relation à un conducteur de forme quelconque ? Préciser dans ce cas la signification de U et I .

Résistance cylindrique

Le milieu conducteur ohmique considéré ici est limité par deux cylindres coaxiaux de rayons respectifs r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$) qui constituent deux électrodes portées aux potentiels V_1 et V_2 . La longueur mesurée suivant l'axe est égale à L .

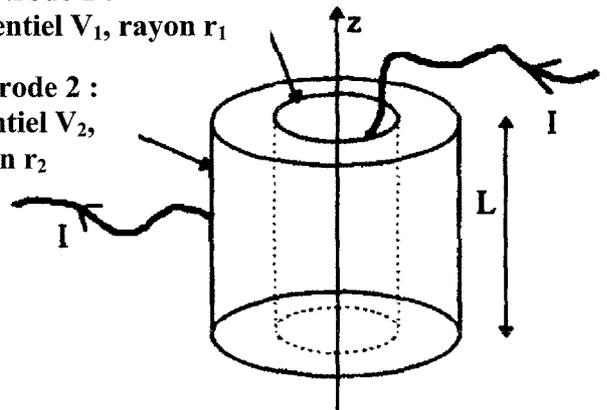
On néglige les effets de bord.

Le milieu est traversé par une intensité de courant I allant de 1 vers 2.

On désigne par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ les vecteurs unitaires des coordonnées cylindriques.

Electrode 1 :
Potentiel V_1 , rayon r_1

Electrode 2 :
Potentiel V_2 , rayon r_2



18. Justifier soigneusement le fait que le champ électrique soit radial et ne dépende que de r distance à l'axe.

19. Déterminer l'expression du champ électrique en fonction de I , r , L et γ (conductivité du milieu).

20. Calculer la différence de potentiel $V_1 - V_2$.

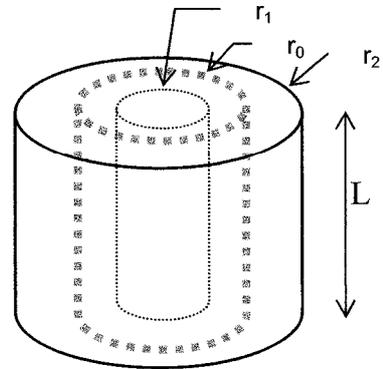
21. En déduire la résistance électrique R du milieu entre les deux cylindres.

Étude d'une pile Daniell

On applique les résultats précédents à un autre type de conducteur : les solutions électrolytiques présentes dans la pile Daniell.

Les électrodes en cuivre et zinc sont deux cylindres de révolution coaxiaux, de rayons respectifs r_1 et r_2 , dont on néglige l'épaisseur. Les bains contenant les solutions aqueuses 1 et 2 sont séparés par un cylindre poreux de rayon r_0 intermédiaire, coaxial aux précédents. La hauteur des solutions dans le récipient est L .

On admet que la géométrie du système impose aux lignes de champ d'être radiales.



22. Dans la solution 1 de sulfate de cuivre (II) de concentration molaire C_1 , les ions Cu^{2+} et SO_4^{2-} ont respectivement les mobilités μ_{1+} et μ_{1-} . Dans la solution 2 de sulfate de zinc (II) de concentration molaire C_2 , les ions Zn^{2+} et SO_4^{2-} ont respectivement les mobilités μ_{2+} et μ_{2-} .
Exprimer les conductivités γ_1 et γ_2 de chacune des solutions en fonction des données.
23. En supposant qu'on puisse négliger l'influence du cylindre poreux sur la conduction, montrer que l'ensemble des deux conducteurs est assimilable à un conducteur unique. De quel type d'association s'agit-il ?
24. Exprimer la résistance interne de la pile R en fonction de γ_1 , γ_2 , r_1 , r_2 , r_0 et L .
25. Application numérique : $r_1 = 0,8 \text{ cm}$, $r_2 = 4 \text{ cm}$; $r_0 = 2,5 \text{ cm}$; $L = 7 \text{ cm}$.
Concentrations molaires des solutions $C_1 = C_2 = 0,62 \text{ mol.l}^{-1}$;
mobilités en $10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}.\text{V}^{-1}$: $\mu_{1+} = 50$; $\mu_{2+} = 48$; $|\mu_{1-}| = |\mu_{2-}| = 80$.
Déterminer la valeur de R .
26. Sachant que la mesure donne pour une pile de ce type une résistance de quelques ohms, que pouvez-vous conclure du résultat précédent ?

A3. Conductivité en régime dépendant sinusoidalement du temps

Dans tous les conducteurs parcourus par des courants alternatifs on constate la décroissance de la densité de courant à mesure que l'on s'éloigne de la périphérie du conducteur. Il en résulte une augmentation de la résistance du conducteur d'où des pertes par effet joule plus importantes.

On considère un conducteur ohmique, métallique, homogène et isotrope, de conductivité électrique γ . On suppose que les propriétés électromagnétiques de ce conducteur sont celles du vide, caractérisées par les valeurs μ_0 et ϵ_0 de la perméabilité magnétique et de la permittivité électrique. Ce conducteur est parcouru par un vecteur densité de courant de conduction \vec{j} .

27. Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu de densité volumique de charge ρ .
28. Donner et interpréter les lois intégrales associées à ces équations en précisant, lorsque cela est nécessaire, les conditions de validité.
29. Montrer que l'équation de conservation de la charge est incluse dans les équations de Maxwell.
30. Dédire de la conservation de la charge l'équation différentielle vérifiée par ρ pour un conducteur ohmique.
31. Justifier que pour un bon conducteur on peut raisonnablement supposer qu'il n'y a pas de charge volumique : $\rho=0$.

On suppose maintenant que le milieu est soumis à un champ électromagnétique alternatif de pulsation ω . Le conducteur est localement non chargé.

On utilise les représentations complexes des grandeurs sinusoïdales.

Le champ électrique en un point $M(x,y,z)$ du conducteur est alors de la forme :

$\vec{E}(x,y,z,t) = \Re(\underline{\vec{E}})$ avec $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0(x,y,z) e^{-i\omega t}$ et il n'existe pas de champ statique, électrique ou magnétique.

32. Par une étude analogue à celle du paragraphe A1., montrer qu'on peut attribuer au milieu une conductivité complexe $\gamma(\omega)$. Calculer $\gamma(\omega)$ en fonction de la conductivité statique γ_0 , τ et ω .
Dans cette étude, on négligera l'action, sur les électrons de conduction, du champ magnétique \vec{B} associé à \vec{E} .
33. Compte tenu de la valeur de τ trouvée à la question 10, donner un ordre de grandeur du domaine de fréquences dans lequel on peut admettre que la loi d'Ohm locale en courant continu reste valable.
34. Ecrire les équations de Maxwell satisfaites par les grandeurs complexes $\underline{\vec{E}}$, $\underline{\vec{B}}$ et $\underline{\vec{j}}$.

35. Définir le vecteur densité de courant de déplacement \vec{j}_D et exprimer \vec{j}_D en fonction de \vec{E} .
36. Calculer le rapport des modules des vecteurs densité de courant : $\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|}$ en fonction de ϵ_0 , ω et γ .
37. Montrer que dans le domaine de fréquences déterminé à la question 33, on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction dans un bon conducteur comme par exemple le cuivre.
38. Quel nom donne-t-on à cette approximation basse fréquence ?
39. En envisageant une fréquence quelconque, déduire des équations de Maxwell de la question 34, l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $\vec{E}_0(x, y, z)$.
40. Comparer cette équation à celle qu'on obtient dans le vide, en absence de charges et courants et remarquer qu'elles sont analogues si on remplace, pour le conducteur, la permittivité du vide ϵ_0 par une permittivité complexe $\underline{\epsilon}(\omega)$. Donner l'expression de $\underline{\epsilon}(\omega)$.

Par analogie avec les solutions de type onde plane progressive dans le vide, on cherche pour le conducteur des solutions de la forme : $\vec{E}_0(x, y, z) = \underline{E}_0(z) \vec{e}_x$.

41. Qu'appelle-t-on une onde plane progressive monochromatique ? Qu'elle est la caractéristique supplémentaire de l'onde dont \vec{E}_0 a la forme ci-dessus et quelle est la direction de propagation ?
42. Donner la forme des solutions du type onde plane progressive monochromatique en fonction d'un nombre d'onde complexe \underline{k} .
43. Montrer que la relation liant \underline{k} et ω est : $\underline{k}^2 = \underline{\epsilon}(\omega)\mu_0 \omega^2$.

On se place dans le cadre de l'approximation des basses fréquences définie aux questions 33 et 37.

44. Montrer que la solution correspondant à une propagation dans le sens des z croissants est, pour le champ électrique, de la forme :

$$\vec{E} = E_m \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos(\beta z - \omega t) \vec{e}_x$$

Calculer β et δ en fonction de ω , μ_0 et γ_0 .

45. Interpréter ce résultat.
46. Justifier que le milieu est dispersif vis-à-vis des ondes électromagnétiques.
47. Donner l'expression du vecteur densité de courant \vec{j} et justifier l'appellation d'épaisseur de peau pour δ .

48. Le conducteur est encore du cuivre.

Calculer les valeurs de la profondeur δ de pénétration du champ électromagnétique pour les fréquences $\nu = 10^p$ Hz où p prendra les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, 6. Conclure.

49. Expliquer qualitativement quel est le lien entre l'effet de peau et les phénomènes d'induction. Expliquer alors l'évolution de δ en fonction de la conductivité du matériau pour une pulsation donnée.

50. Montrer que le champ magnétique \vec{B} associé au champ \vec{E} précédent dans le conducteur est de la forme : $\vec{B} = B_m \exp(-\frac{z}{\delta}) \cos(\beta z - \omega t + \varphi) \vec{e}_y$. Déterminer B_m et φ .

51. Calculer alors le vecteur de Poynting \vec{R} .

52. Définir la puissance rayonnée à l'instant t à travers une surface Σ .

53. Calculer la puissance moyenne (moyenne temporelle) rayonnée à travers la surface délimitant un volume du conducteur défini par : $0 < x < a$, $0 < y < b$ et $0 < z < \Delta z$ avec $\Delta z \gg \delta$.

54. Quelle est la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans ce même volume ?

55. Rappeler l'équation intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique (équation de Poynting).

Faire un bilan d'énergie pour le volume défini à la question 53.

A4. Effet joule et production d'entropie associée

Nous avons vu précédemment que la conduction dans les milieux autres que les conducteurs parfaits s'accompagne de phénomènes dissipatifs connus sous le nom d'effet Joule. Nous allons aborder dans cette partie l'aspect thermodynamique de ces phénomènes.

56. Qu'appelle-t-on un conducteur parfait ?

On se propose de calculer la production d'entropie liée à l'effet Joule en **régime stationnaire** dans un barreau conducteur cylindrique homogène et isotrope, d'axe Ox , de section Σ .

Il est parcouru par un courant électrique de vecteur densité de courant $\vec{j} = j(x) \vec{e}_x$ supposé uniforme sur une section droite du barreau (on suppose le problème unidimensionnel). γ désigne encore la conductivité électrique du milieu supposée uniforme et constante.

On note $\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$ le champ électrique dans le conducteur et $V(x)$ le potentiel électrostatique. Enfin, la température T est supposée uniforme au sein du barreau.

57. En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système des charges contenues dans la tranche de conducteur comprise entre les sections d'abscisses x et $x+dx$, déterminer le transfert thermique élémentaire reçu par le système pendant l'intervalle de temps dt .
58. En déduire, à l'aide du second principe, l'entropie créée σ par unité de temps et de volume (taux de production d'entropie) en fonction de \vec{j} , \vec{E} et T puis de γ , j et T .
59. Quelle est la dimension de σ ? En déduire son unité dans le système international.
60. Que peut-on dire du signe de σ ? Interpréter.
61. Le barreau conducteur, constitué de cuivre, est parcouru par un courant d'intensité $I = 100\text{mA}$; sa section vaut $\Sigma = 1\text{ mm}^2$. La température du barreau est $T = 293\text{K}$. Calculer numériquement σ .
62. Mettre σ sous la forme $\sigma = \vec{j} \cdot \vec{\phi}_e$ où $\vec{\phi}_e$ est la force thermodynamique de conduction électrique que l'on déterminera en fonction de la température T et de $\vec{\nabla}V = \overrightarrow{\text{grad}} V$.

B. CONDUCTION THERMIQUE PURE

La conduction thermique est née au début du XIX^e siècle sous l'impulsion du mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830). On croyait alors que la « chaleur » était constituée d'un fluide que l'on avait nommé le phlogistique. J. Fourier établit l'équation de la chaleur en considérant celle-ci comme intrinsèquement contenue dans tous les corps et susceptible de se déplacer d'un point à un autre. C'est d'ailleurs en étudiant cette équation que Fourier a introduit les séries qui portent son nom. Nous savons bien aujourd'hui que la chaleur, pas plus que le travail, ne peuvent se transporter mais l'habitude historique permet de comprendre pourquoi on parle encore de conduction de la chaleur et même de transport de chaleur.

Dans les solides la conduction thermique est due en partie aux électrons de conduction comme la conduction électrique étudiée précédemment.

B.1. Diffusion axiale : en l'absence de pertes latérales

On considère un matériau homogène de conductivité thermique λ , de masse volumique α et de capacité calorifique massique à pression constante c_p (λ , c_p , α sont supposés constants).

Il règne dans ce milieu un gradient de température, dirigé selon l'axe Ox (vecteur unitaire \vec{e}_x), de sorte que la température en un point d'abscisse x , à l'instant t est $T(x,t)$.

En l'absence de courant électrique, il existe dans ce milieu un vecteur densité de flux thermique lié au gradient de température par la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$.

On suppose que le milieu évolue à pression constante. Pour fixer les idées, nous supposons que la température décroît quand x augmente.

- 63. Quelle forme prend la loi de Fourier dans le cas traité ici ? Justifier le signe moins.
- 64. Exprimer la puissance thermique P_{th} qui traverse, dans le sens des x positifs, une surface plane d'aire Σ , perpendiculaire à Ox, en fonction de λ , Σ , et $\frac{\partial T}{\partial x}$.
- 65. On s'intéresse à une « tranche » du milieu comprise entre les plans x et x + dx, de section Σ . Exprimer la variation élémentaire d'enthalpie dH de cette tranche, considérée comme un système fermé, pendant un intervalle de temps [t, t+dt] en fonction de α , c_p , Σ , dx, dt et de $\frac{\partial T}{\partial t}$.
- 66. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la « tranche » précédente établir une relation liant les dérivées partielles de j_{th} et de T.
- 67. En déduire que la fonction T(x,t) vérifie l'équation différentielle :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \Gamma_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

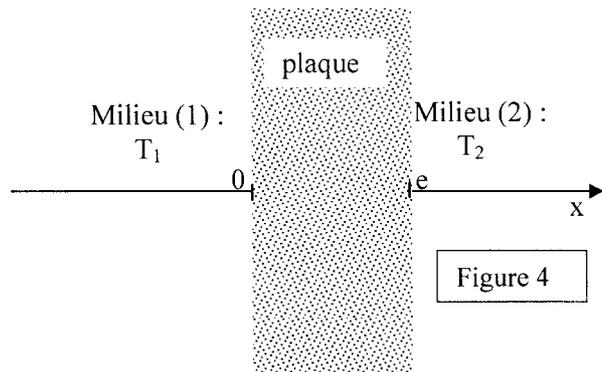
Déterminer Γ_p .

- 68. Que représente Γ_p ? Quelle est son unité dans le système SI ?
Quel nom donne-t-on à la quantité λ / Γ_p ?
- 69. L'équation différentielle (1) est-elle invariante lorsque l'on effectue le changement de variable $t \rightarrow -t$? Interpréter physiquement votre réponse.

Application : Traitement thermique de cartes électroniques

Conduction thermique dans une plaque

Une plaque plane de conductivité thermique λ , d'épaisseur e et normale à l'axe Ox, sépare deux milieux dont la température est uniforme et constante. La surface de la plaque est Σ . Le milieu 1, occupant la région $x < 0$ est à la température T_1 , alors que le milieu 2, remplissant la région $x > e$ est à la température T_2 .



Dans cette question, on se place en régime stationnaire.

- 70. Déterminer la température T(x) qui règne dans la plaque en fonction des données ci-dessus.
- 71. Calculer la puissance thermique $P_{1 \rightarrow 2}$ transférée depuis le milieu 1 vers le milieu 2, à travers la plaque.

72. Après avoir effectué une analogie précise avec l'électrocinétique, montrer que l'expression obtenue à la question précédente permet de définir une résistance thermique R_{th} , et l'exprimer en fonction de λ , e et Σ .
73. Après avoir défini la notion de résistances thermiques en série et en parallèle, démontrer les lois d'association de deux résistances thermiques en série, puis en parallèle.

Assemblage multicartes :

Etude d'un milieu feuilleté - Approximation du milieu continu.

Une des étapes de la fabrication des cartes supportant les circuits électroniques intégrés consiste à les enduire d'une résine époxy qui durcit à température élevée et sous forte pression. Pour cela, on rassemble les cartes enduites de résine en piles, chacune étant séparée des autres par une plaque métallique.

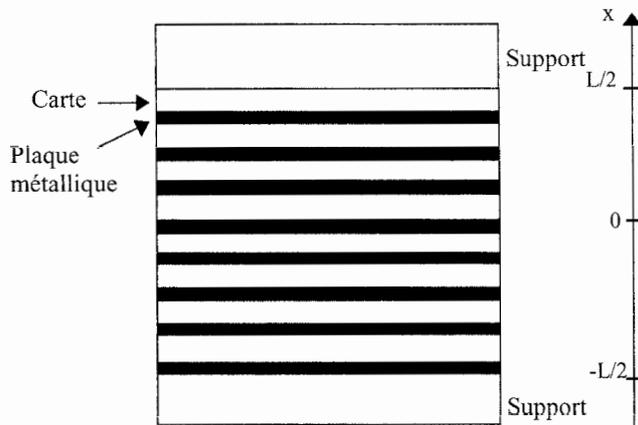


Figure 5

Toutes les cartes sont planes, ont la même épaisseur e_1 et une conductivité thermique λ_1 . Les plaques métalliques de séparation, planes elles aussi, ont une épaisseur e_2 et une conductivité thermique λ_2 . Les cartes et les plaques ont une aire Σ .

L'ensemble ainsi obtenu, constitué d'un grand nombre de couches, d'épaisseur totale L , est placé entre deux supports qui permettent à la fois de chauffer l'empilement et de soumettre la pile de cartes à la pression élevée nécessaire au durcissement de la résine (voir figure 5).

On admettra que la résine époxy ne joue aucun rôle dans les transferts et bilans thermiques.

Sauf indication contraire (partie B.2. ou 76.), on néglige tout transfert thermique se produisant par les faces latérales des plaques et des cartes.

De plus, on suppose que tous les contacts thermiques sont parfaits : la température est continue dans l'empilement.

Afin d'étudier de façon simplifiée les transferts thermiques, on cherche à représenter le système feuilleté décrit précédemment comme un milieu homogène. On veut alors déterminer les caractéristiques de ce milieu équivalent.

74. On considère que les transferts thermiques s'effectuent seulement selon la direction Ox (figure 5). Déterminer la résistance thermique R_e , d'une épaisseur e du matériau, de surface Σ , constituée de N empilements plaque-carte. En déduire que l'empilement est équivalent à une épaisseur e d'un matériau homogène de section Σ , dont on exprimera la conductivité thermique λ en fonction de λ_1 , λ_2 , e_1 et e_2 .
75. Vérifier la pertinence du résultat sur les 2 cas particuliers suivants : $\lambda_1 = \lambda_2$ et $e_1 \ll e_2$ (λ_1 et λ_2 étant du même ordre de grandeur).
76. Déterminer de même la conductivité thermique $\lambda_{//}$ du milieu homogène équivalent au milieu feuilleté si l'on considère un transfert thermique parallèle au plan des cartes considérées comme des rectangles de côtés a et b ($\Sigma = ab$) (figure 6).

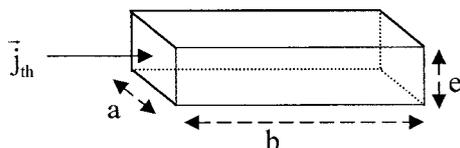


Figure 6

77. Vérifier la pertinence du résultat sur les 2 cas particuliers suivants : $\lambda_1 = \lambda_2$ et $e_1 \ll e_2$ (λ_1 et λ_2 étant du même ordre de grandeur).
78. Déterminer Γ_p (défini question 67) pour le milieu homogène équivalent en fonction des grandeurs caractéristiques des deux milieux : e_1 , α_1, c_{p1} , e_2 , α_2 et c_{p2} .
79. Application numérique :
- cartes : $\alpha_1 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_{p1} = 1500 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\lambda_1 = 0,3 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $e_1 = 2,5 \text{ mm}$
 - plaques métalliques : $\alpha_2 = 8000 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_{p2} = 480 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\lambda_2 = 12 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $e_2 = 2,5 \text{ mm}$
- Calculer λ , $\lambda_{//}$ et Γ_p .

Dans toute la suite, on envisage seulement le cas où le vecteur densité de flux thermique est parallèle à l'axe Ox .

B.2. Phénomènes conducto-convectifs : Influence des pertes latérales

Alors que l'empilement est à la température ambiante $T_a = 290\text{K}$, on porte brusquement, à $t = 0$, la température des deux supports à $T_0 = 460 \text{ K}$. Cette température est maintenue constante et uniforme dans les supports durant toute la durée de l'expérience.

Comme l'a montré la partie B.1., l'empilement des cartes et des plaques de séparation peut être considéré comme un milieu homogène de conductivité thermique λ et de produit Γ_p uniformes. Ce milieu occupe l'espace compris entre les plans $x = -L/2$ et $x = L/2$ sur une section Σ (figure 5).

On prend maintenant en compte les transferts thermiques entre les cartes et l'air ambiant par les faces latérales (transfert de type conducto-convectif).

Un élément de surface latérale dS à la température T fournit à l'extérieur une puissance thermique : $dP_{cc} = h(T - T_a) dS$ (loi de Newton), où h est un facteur constant.

80. Justifier la loi de Newton ci-dessus à partir de la loi de Fourier.
81. En comparant les valeurs des conductivités équivalentes λ et $\lambda_{//}$ (voir B.1.), justifier que l'on peut considérer que la température dans l'assemblage ne dépend que de x et t .
82. On rappelle que les cartes sont en fait des rectangles de côtés a et b ($\Sigma = ab$). En faisant un bilan énergétique sur une tranche comprise entre les plans x et $x + dx$, montrer que la température $T(x,t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - K^2(T - T_a) = \frac{\Gamma_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

où K est une constante que l'on exprimera en fonction de h , λ , a et b .

83. Trouver la dimension de K à partir de son expression.
84. On cherche une solution stationnaire de l'équation (2), que l'on note $T^\infty(x)$.
Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $T^\infty(x)$.
85. Résoudre cette équation différentielle, compte tenu des conditions aux limites imposées en $x = -L/2$ et $x = L/2$.

On exprimera le résultat en utilisant la fonction $\text{ch}(u) = \frac{\exp(u) + \exp(-u)}{2}$.

86. Déterminer la température minimale T_{\min} qui règne dans l'empilement, en régime permanent.
87. Représenter graphiquement $T^\infty(x)$.
88. Montrer que, si l'on veut que la température minimale soit supérieure à la température nécessaire au durcissement de la résine, T_d ($T_d = 440\text{K}$), il faut que le coefficient h soit plus petit qu'une valeur limite h_{\max} , que l'on déterminera.
89. Montrer que pour des plaques d'aire Σ fixée, le coefficient h_{\max} est lui-même maximum lorsque la plaque est carrée.
90. Calculer h_{\max} avec cette dernière hypothèse.
 $\lambda = 0,59 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $\Sigma = 0,02 \text{ m}^2$, $L = 5\text{cm}$.

Détermination expérimentale de λ

On considère ci-dessous une expérience destinée à la comparaison des conductivités thermiques de divers métaux.

Une tige cylindrique (Figure 7) de longueur ℓ , de rayon R , est constituée d'un métal de conductivité thermique λ .

Cette tige est encastree à l'une de ses extrémités dans un récipient contenant de l'eau portée à ébullition, de telle sorte que cette extrémité a sa température fixée à la valeur constante $T(x = 0) = T_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

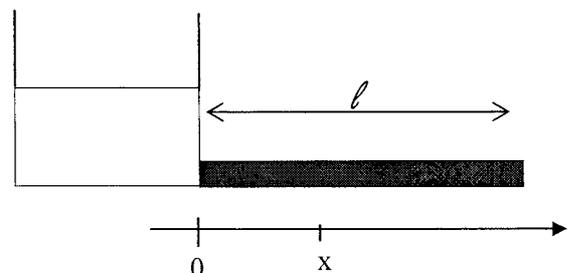


Figure 7

Le reste de la tige est en contact avec l'atmosphère de température constante $T_a = 20\text{ }^\circ\text{C}$.
On admet ici encore, que les pertes thermiques à la surface de la tige sont données par la loi de Newton : $dP_{cc} = h (T - T_a) dS$ (comme dans les questions précédentes de B2).

$\theta = T - T_a$ désigne l'excédent de température de cet élément par rapport à l'atmosphère avec laquelle il est en contact.

Le système décrit ci-dessus a atteint le régime permanent.

91. Donner l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\theta(x)$.
92. Écrire, pour une longueur ℓ quelconque de la tige, les conditions aux limites qui permettent de calculer les constantes d'intégration (le calcul des constantes n'est pas demandé).
93. On suppose la tige infiniment longue devant les autres distances mises en jeu. Montrer que la solution peut s'écrire : $\theta = \theta_0 e^{-x/\delta}$. Déterminer θ_0 et δ .
94. On compare, dans les conditions précédentes, le comportement de deux barres (1) et (2) de dimensions identiques constituées respectivement de cuivre et d'étain. Chaque barre est recouverte d'une fine couche de paraffine dont la température de fusion est $T_f = 60\text{ }^\circ\text{C}$.
Sur chacune des barres, on note que la fusion s'observe jusqu'aux abscisses respectives $x_1 = 15,6\text{ cm}$ et $x_2 = 6,4\text{ cm}$.
En admettant que le coefficient h garde la même valeur pour les deux barres et en supposant connue la valeur $\lambda_1 = 390\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ de la conductivité thermique du cuivre, déduire des observations précédentes la valeur de la conductivité thermique λ_2 de l'étain.

B.3. Conduction thermique et production d'entropie

On s'attache dans cette partie à mettre en évidence le caractère irréversible de la diffusion thermique dans le cas simple où il n'y a pas de pertes latérales.

Soit un barreau cylindrique homogène et isotrope, d'axe Ox , de section Σ , parcouru par un flux thermique parallèlement à son axe. La conductivité thermique λ du milieu est supposée constante et le régime stationnaire.

Le problème est unidimensionnel et on note $T(x)$ la température en un point du barreau d'abscisse x .

95. Comment faire expérimentalement pour que le problème soit bien unidimensionnel ?
96. Montrer que j_{th} est uniforme dans le barreau.
97. Calculer l'entropie d'échange reçue par la tranche comprise entre les sections d'abscisses x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$.

98. En déduire que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit : $\sigma = j_{th} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T} \right) = \vec{j}_{th} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right)$

99. Quel est le signe de σ ? Commenter.

100. En utilisant une analogie avec la question 62 déterminer la « force thermodynamique » de conduction thermique $\vec{\phi}_{th}$.

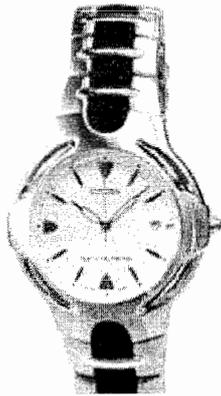
101. Le barreau, constitué de cuivre de conductivité thermique $\lambda = 390 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, a pour longueur $L = 5 \text{ cm}$.

Ses extrémités sont maintenues aux températures $T(0) = 293\text{K}$ et $T(L) = 273\text{K}$. Calculer numériquement σ au milieu du barreau et à ses extrémités.

C. COUPLAGE THERMOELECTRIQUE

Nous avons vu dans les parties A. et B. qu'un gradient de potentiel (V) dans un circuit fermé ou un gradient de température génère des phénomènes irréversibles. On constate expérimentalement d'autres effets dans les conducteurs traduisant un couplage entre la conduction électrique et la conduction thermique.

*En effet dans certaines circonstances expérimentales le passage d'un courant électrique peut donner lieu à un flux thermique (sans rapport avec l'effet Joule) et inversement, l'établissement d'un gradient de température peut provoquer l'apparition d'un courant électrique ou d'une différence de potentiel : ce sont des effets thermoélectriques. Ces effets sont à la base d'applications de **réfrigération** et de **génération d'électricité** : un matériau thermoélectrique va permettre de transformer directement de la chaleur en électricité, ou de générer du froid par l'application d'un courant électrique.*



Bien que mis en évidence au début du XIX^e les applications des effets thermoélectriques n'ont pu voir le jour qu'au XX^e grâce à l'augmentation des rendements des thermogénérateurs et sont maintenant de plus en plus nombreuses. Pour le grand public on peut par exemple trouver une montre, qui utilise le poignet comme source chaude et l'air ambiant comme source froide. Elle évite ainsi l'usage de piles.

Dans cette partie C, on ne s'intéressera qu'au régime stationnaire.

C.1. Théorie de la réponse linéaire d'Onsager

On exprime généralement le couplage entre différents phénomènes irréversibles à l'aide du concept de force thermodynamique déjà introduit dans les parties A et B.

À l'équilibre thermodynamique, les vecteurs densités de courant \vec{j} et \vec{j}_{th} sont nuls ; la température T et le potentiel V sont uniformes et constants dans le temps ; les forces thermodynamiques : $\vec{\varphi}_{th} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right)$ et $\vec{\varphi}_e = \frac{-\vec{\nabla}V}{T}$ sont donc nulles à l'équilibre. Pour qu'il y ait « transport de chaleur » ou de charges, il faut donc être hors équilibre : les forces thermodynamiques $\vec{\varphi}_{th}$ et $\vec{\varphi}_e$ ne sont alors plus nulles.

Dans la théorie de la réponse linéaire mise au point par le physicien norvégien Lars Onsager en 1931 (Prix Nobel de chimie en 1968), si l'on n'est pas trop loin de l'équilibre, les densités de courant \vec{j} et \vec{j}_{th} dépendent linéairement des forces thermodynamiques $\vec{\varphi}_{th}$ et $\vec{\varphi}_e$ selon les relations phénoménologiques:

$$\vec{j}_{th} = L_{th,th}\vec{\varphi}_{th} + L_{th,e}\vec{\varphi}_e \quad (3)$$

$$\vec{j} = L_{e,e}\vec{\varphi}_e + L_{e,th}\vec{\varphi}_{th} \quad (4)$$

avec la relation dite d'Onsager $L_{th,e} = L_{e,th}$.

On se propose d'abord de calculer les coefficients d'Onsager en fonction des données expérimentales dont on dispose sur le milieu étudié :

- sa conductivité thermique λ ($\lambda > 0$) ;
- sa conductivité électrique γ ($\gamma > 0$) ;
- son pouvoir thermoélectrique ε (ou coefficient Seebeck du matériau), fonction de T seulement ($\varepsilon > 0$ ou < 0 suivant le matériau).

ε est défini, à **courant électrique nul** (c'est-à-dire en circuit ouvert, $\vec{j} = \vec{0}$), par la relation :

$$\vec{\nabla}V = -\varepsilon\vec{\nabla}T \quad (5).$$

102. Citer et énoncer au moins une loi phénoménologique linéaire.

103. Justifier l'absence de terme constant dans les relations (3) et (4).

104. En vous plaçant dans le cas d'un champ de température uniforme, exprimer $L_{e,e}$ en fonction de γ et T .

105. En vous plaçant à courant électrique nul, donner une relation entre ε , $L_{e,th}$, $L_{e,e}$ et T .

106. Toujours à courant nul déterminer une relation liant ε , λ , $L_{th,th}$, $L_{th,e}$ et T .

107. En déduire, dans le cas général, l'expression de \vec{j} et \vec{j}_{th} en fonction de λ , ε , γ , T , $\vec{\nabla}T$ et $\vec{\nabla}V$.

108. Etablir la relation : $\vec{j}_{th} = -\lambda\vec{\nabla}T + \varepsilon T\vec{j}$ (6).

Commenter.

On supposera cette relation valable dans toute la suite.

109. Déterminer l'énergie totale reçue entre t et $t+dt$ par un volume \mathcal{V} de conducteur délimité par une surface fermée S en fonction de \vec{j} , \vec{j}_{th} et le champ électrique \vec{E} .

Pour cela, on tiendra compte simultanément des phénomènes de conduction thermique et électrique.

110. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski déduire de la relation précédente la puissance, p , reçue par l'unité de volume de conducteur, toujours en fonction de \vec{j} , \vec{j}_{th} et \vec{E} et de leurs dérivées.

111. Montrer que cette puissance peut s'écrire sous la forme :

$$p = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \frac{j^2}{\gamma} - T \frac{d\epsilon}{dT} \vec{j} \cdot \vec{\nabla} T. \quad (7)$$

112. Donner la signification physique des deux premiers termes.

Le troisième est connu sous le nom d'effet Thomson. Le couplage entre la conduction électrique et la conduction thermique mis en évidence dans ce terme apparaît au sein d'un matériau homogène contrairement à l'effet Seebeck (ou Peltier) que nous étudions dans la suite du problème et qui apparaît à la jonction entre deux matériaux différents.

113. Lorsqu'un milieu est simultanément le siège de phénomènes de conduction électrique et de conduction thermique, on admet que le taux de création d'entropie s'écrit : $\sigma = \vec{j} \cdot \vec{\Phi}_e + \vec{j}_{th} \cdot \vec{\Phi}_{th}$. (8)

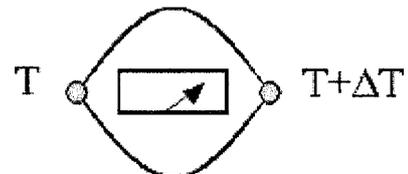
Exprimer σ en fonction de λ , γ , T , \vec{j} et $\vec{\nabla} T$.

114. Conclure sur le caractère réversible ou non de la conduction thermique, de l'effet Joule et de l'effet Thomson.

C2. Effet Seebeck : thermocouple, calopile

Le premier effet thermoélectrique a été découvert par le physicien et médecin allemand Thomas Johann Seebeck en 1821. Celui-ci remarqua qu'une aiguille métallique est déviée lorsqu'elle est placée entre deux conducteurs de natures différentes liés par des jonctions à leurs extrémités et soumis à un gradient thermique.

Mais ce n'est que plus tard que fut comprise l'origine électrique du phénomène : une différence de potentiel apparaît à la jonction de deux matériaux soumis à une différence de température.



L'utilisation la plus connue de l'effet Seebeck est la mesure de température à l'aide d'un thermocouple, mais cet effet est également à la base de la génération d'électricité par effet thermoélectrique.

On considère le montage de la figure 8.

La portion J_1J_2 est constituée d'un métal A de coefficient Seebeck ϵ_A , les portions J_1N et J_2M d'un métal B de coefficient Seebeck ϵ_B .

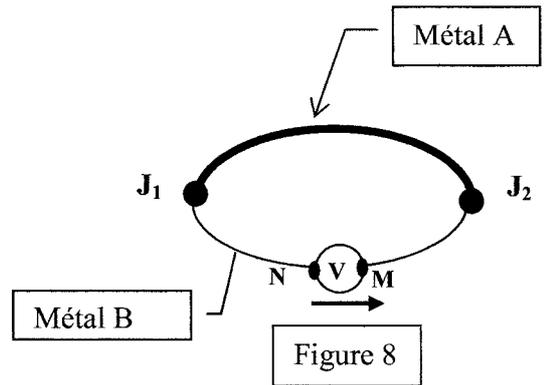
Les coefficients Seebeck des métaux sont positifs et on les supposera indépendants de la température.

On maintient la soudure en J_1 à la température T_1 , et la soudure en J_2 à la température T_2 .

Entre M et N, qui sont à la même température T_0 , est branché un voltmètre de très grande impédance (aucun courant ne circule dans les conducteurs).

On constate que ce voltmètre détecte une tension non nulle (effet Seebeck).

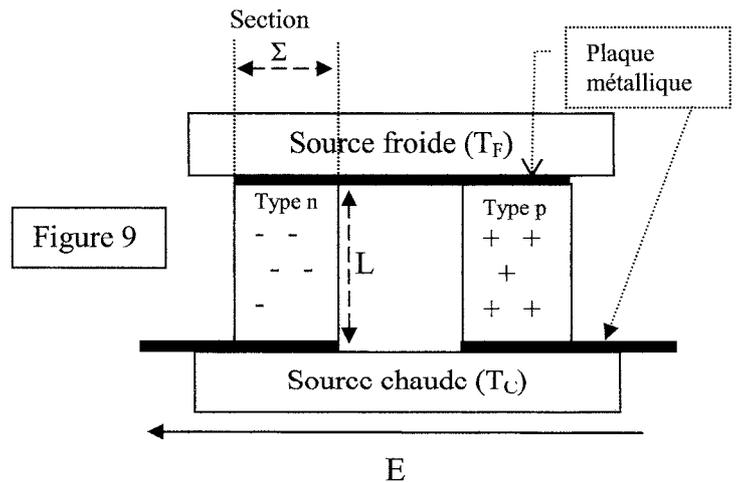
Dans toute la suite on se place en régime stationnaire.



115. Calculer la tension $V_{MN} = V_M - V_N$ mesurée par le voltmètre en fonction des températures des soudures et du coefficient Seebeck de la jonction $\epsilon_{AB} = \epsilon_A - \epsilon_B$.

On modélise un module thermoélectrique de la façon suivante.

La plaque supérieure est un métal en contact avec la source froide, sa température est T_F ; chacune des deux plaques métalliques inférieures est en contact avec la source chaude et à la température T_C .



Les deux portions "n" et "p" sont des semis conducteurs. On utilise ce type de matériau plutôt que des métaux car leurs coefficients Seebeck sont 10 à 100 fois plus importants. On les modélise ici comme des milieux conducteurs de conductivités thermiques respectives λ_n et λ_p , de coefficients Seebeck respectifs ϵ_n et ϵ_p , de conductivités électriques γ_n et γ_p , de même section Σ constante et de même hauteur L .

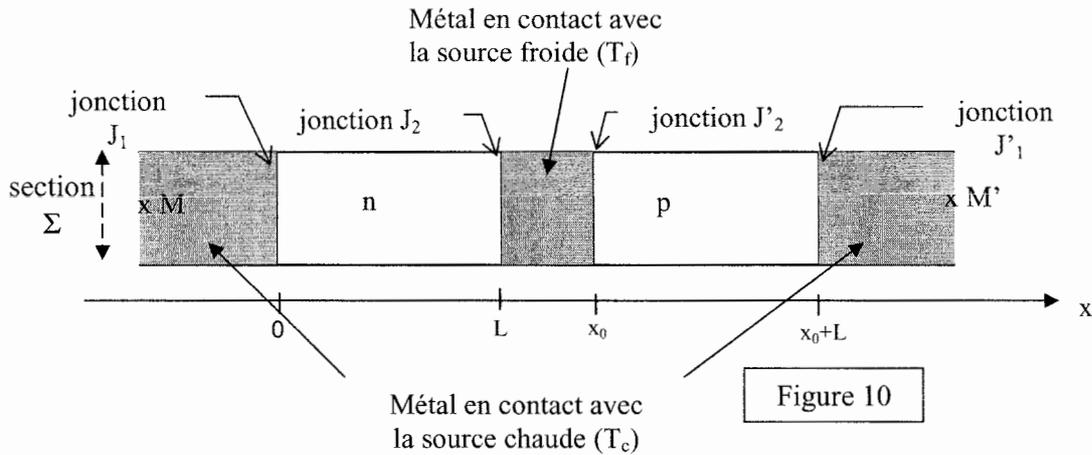
Les plaques métalliques sont de résistance électrique négligeable et de coefficient Seebeck ϵ_M .

Toutes ces grandeurs (λ_i , ϵ_i , γ_i) sont supposées constantes et en particulier indépendantes de la température dans le domaine des températures présentes dans la structure.

Les parois latérales de ces portions semi-conductrices sont calorifugées. La neutralité électrique est à tout instant et en tout point satisfaite dans ces barreaux.

L'ensemble de la structure fonctionne en régime stationnaire.

On peut utiliser pour cette structure la représentation unidimensionnelle ci-dessous.



La seule variable d'espace pouvant intervenir dans la valeur d'une grandeur caractéristique de cette structure est ainsi l'abscisse x .

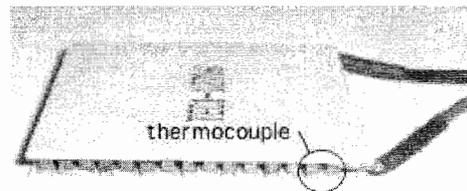
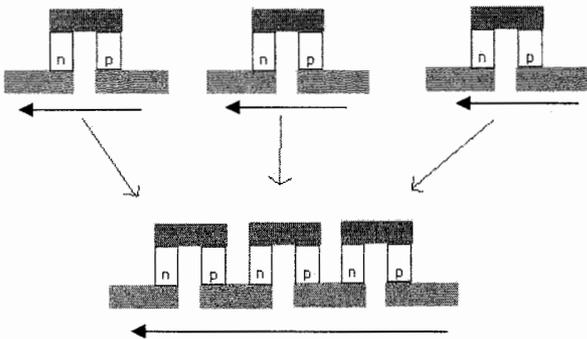
\vec{e}_x désigne le vecteur unitaire de cette direction privilégiée.

116. Déterminer la fém thermoélectrique ($E = V_M - V_{M'}$ en circuit ouvert) (Figures 9 et 10) en fonction de ϵ_{pn} (coefficient Seebeck de la jonction, $\epsilon_{pn} = \epsilon_p - \epsilon_n > 0$) et $\Delta T = T_c - T_f$.

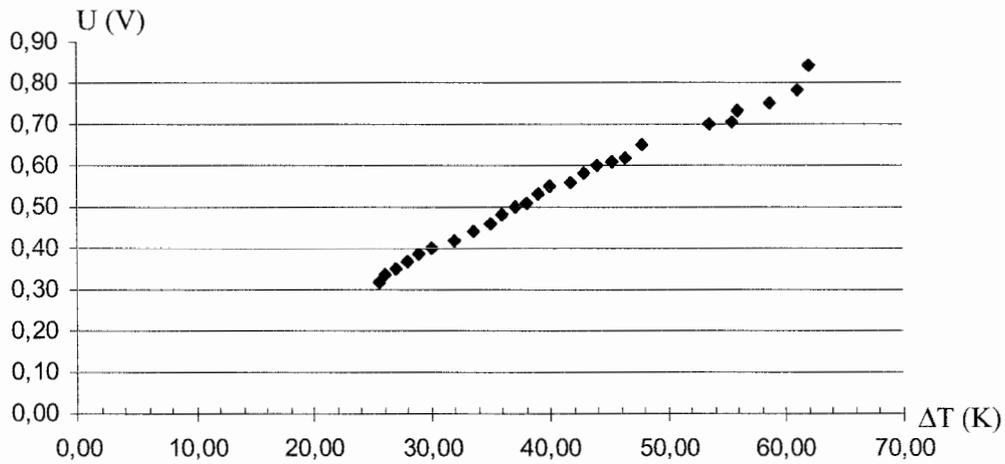
117. Dans quel sens circulera le courant à l'intérieur du thermogénérateur ?

Vérification expérimentale de l'effet Seebeck

L'expérience réalisée consiste à créer une différence de température entre 64 thermocouples reliés en série et observer la différence de potentiel totale aux bornes de l'association.



La source chaude est un petit thermostat, la source froide est un b cher avec un mélange eau-glaçon afin de maintenir une température stable de quelques degrés. On mesure la température du thermostat avec un thermomètre précis et on vérifie que la température de la source froide reste stable. On note alors la différence de température mesurée ΔT et la différence de potentiel U aux bornes du module thermoélectrique complet   l'aide d'un voltmètre numérique.



118. Montrer que les résultats expérimentaux ci-dessus sont conformes à la question 116.

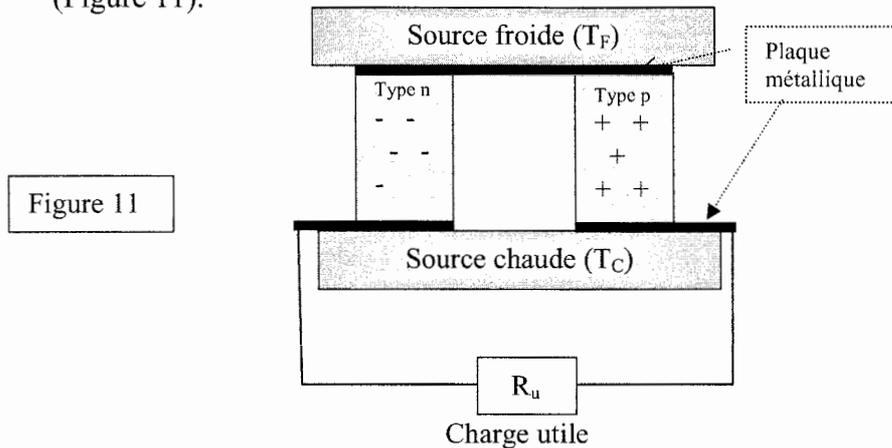
Discuter les écarts éventuels. Déterminer le coefficient Seebeck ϵ_{pn} de la jonction étudiée.

Rendement d'une calopile

119. Déterminer la résistance électrique équivalente R d'un module thermoélectrique (Figure 10).

120. Dédire le modèle de Thévenin équivalent du thermogénérateur.

121. On branche le module sur une utilisation purement résistive de résistance R_u (Figure 11).



Déterminer l'intensité I du courant qui circule dans le circuit en fonction de $\epsilon = \epsilon_{pn}$, $\Delta T = T_c - T_f$, R et R_u .

122. En déduire la puissance électrique P_c fournie à l'utilisation.

123. En admettant que le problème est unidirectionnel, montrer que, dans le semi-conducteur n et en régime stationnaire, $T(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\lambda_n \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\gamma_n \Sigma^2}$$

où I est le courant qui circule dans le semi-conducteur de section Σ .

Pour cela on pourra utiliser la question 111 en l'absence d'accumulation d'énergie ($p = 0$).

124. En déduire le gradient de température au voisinage de la source chaude dans le semi-conducteur de type n ($\frac{dT}{dx}(x = 0^+)$).

125. Le métal en contact avec la source chaude est de température uniforme T_c . Rappeler l'expression du vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_{th,M}$ à l'intérieur de ce métal en fonction de \vec{j} , T_c et ϵ_M .

126. Donner de même l'expression de $\vec{j}_{th,n}$ à l'intérieur du barreau n, au voisinage immédiat de la jonction J_1 avec le métal précédent.

127. En effectuant un bilan d'énergie sur une tranche infiniment fine englobant la jonction entre le barreau n et le métal en contact avec la source chaude en déduire la puissance thermique $P_{M,n}$ reçue du milieu extérieur au niveau de cette jonction, en fonction du courant I circulant dans le barreau (sens de circulation du courant établi question 117), de ϵ_M , ϵ_n , λ_n , T_c , Σ et $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{0^+}$.

Pour cela on identifiera tous les systèmes avec lesquels la tranche échange de l'énergie et on écrira qu'en régime stationnaire la puissance totale qu'elle reçoit est nulle.

$P_{M,n}$ désigne la puissance thermique extraite de la source chaude à travers le semi-conducteur n.

128. Exprimer $P_{M,n}$ en fonction de I , ϵ_M , ϵ_n , λ_n , γ_n , Σ , L , T_c et ΔT .

129. Déterminer de même la puissance thermique $P_{M,p}$ extraite de la source chaude à travers le semi-conducteur de type p en fonction de I , ϵ_M , ϵ_p , λ_p , T_c , Σ et le gradient de température au voisinage de la source chaude dans le semi-conducteur de type p $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{(x_0+L)^-}$.

130. Exprimer, si possible sans calcul, $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{(x_0+L)^-}$.

131. En déduire une nouvelle expression de $P_{M,p}$.

132. En déduire que la puissance thermique P_{Qc} fournie par la source chaude est de la forme : $P_{Qc} = G\Delta T + \epsilon I T_c - \frac{1}{2} R I^2$. Déterminer G. Que représente la grandeur G ?

133. Quel est le phénomène physique à l'origine de chaque terme de P_{Qc} ?

134. Si P_c est la puissance électrique fournie par la calopile déterminer le rendement η de ce thermogénérateur en fonction de P_c et P_{Qc} .

135. Montrer que le rendement peut être mis sous la forme :

$$\eta = \frac{\epsilon^2 \Delta T R_u}{R \epsilon^2 T_M + R_u \epsilon^2 T_c + G(R + R_u)^2} \text{ où } T_M = \frac{T_c + T_f}{2} .$$

136. Déterminer R_u en fonction de R, ϵ , G et T_M de telle sorte que le rendement soit maximal. Puis en fonction de R, T_M et $Z = \frac{\epsilon^2}{R G}$.

On pourra poser $m = \sqrt{1 + Z T_M}$

137. Montrer que le rendement maximum peut se mettre sous la forme :

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_c} f(Z, T_M) .$$

La fonction $f(Z, T_M)$ sera exprimée uniquement en fonction de $Z T_M$ et $\frac{T_f}{T_c}$ ou encore

en fonction de m et $\frac{T_f}{T_c}$.

138. Que traduit le terme $f(Z, T_M)$?

Le produit $Z T_M$ est appelé facteur de mérite. Plus Z est élevé, plus $f(Z, T_M)$ tend vers 1. Ainsi Z permet de classer l'aptitude des matériaux à convertir un flux de chaleur en électricité.

139. Quel doit-être le compromis à faire dans le choix du thermoélément ?

140. A l'aide du graphe de la figure 12, $Z T_M$ en fonction de T, appelée figure de mérite, déterminer le meilleur choix à faire pour les matériaux du thermoélément si l'on veut utiliser celui-ci au voisinage des températures usuelles.

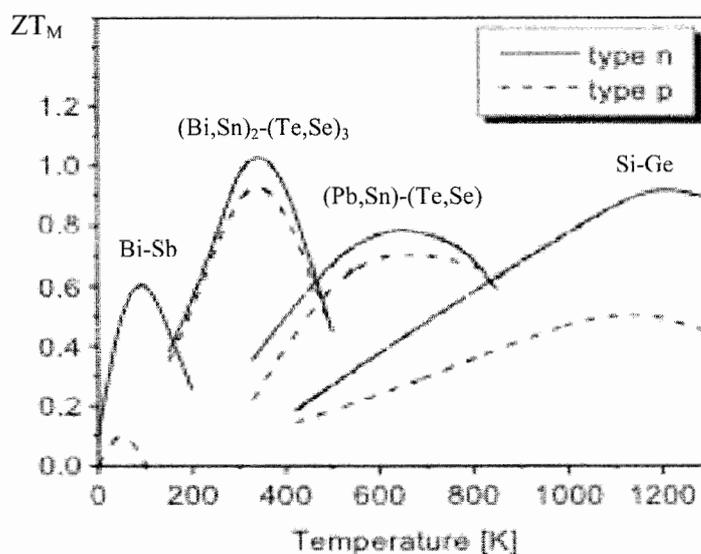


Figure 12

L'effet que nous venons d'étudier est le principe de base de nombreuses applications présentes et futures.

Par exemple, une autre application en développement est l'adaptation de cellules thermoélectriques sur les circuits d'échappements d'automobiles. Le courant généré est suffisant pour alimenter le circuit électrique de la voiture en se passant d'alternateur et de ses inconvénients (usure mécanique ...).

La thermo-génération est également indispensable dans certains domaines de pointe comme l'espace. Les générateurs RTG (Radioisotope Thermoelectric Generator) fonctionnent grâce à un matériau radioactif qui constitue la source chaude et l'espace qui constitue la source froide. C'est ce genre de technologie qui équipe par exemple la sonde spatiale Cassini en électricité.

On pourrait citer encore de nombreux autres exemples mais la rentabilité de ces dispositifs est liée principalement à un facteur de mérite élevé ($ZT_M > 2$) soit en mettant en oeuvre de nouveaux matériaux soit à l'aide de structure de basse dimensionnalité.