

SESSION DE 2008

**CONCOURS EXTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS**

Section : SCIENCES PHYSIQUES

Option : CHIMIE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

Ce sujet propose l'étude de quelques aspects de la physique du globe terrestre. Son traitement ne requiert aucune connaissance préalable qui serait en dehors du programme de physique de l'agrégation de sciences physiques, option chimie. Le vocabulaire spécifique est défini progressivement dans le sujet, en fonction des besoins.

La partie A propose l'étude du champ de gravitation, dans le cadre de plusieurs modèles de la Terre.

La partie B aborde l'étude de la répartition de température dans la lithosphère (constituée de la croûte terrestre et de la partie superficielle du manteau supérieur).

Dans la partie C, le sujet montre, par une démarche analogue à celle de l'optique géométrique, comment l'étude des temps de propagation des ondes sismiques permet de « sonder » l'intérieur de la Terre.

Enfin, la partie D étudie le principe de fonctionnement de certains sismomètres, ainsi que leur optimisation.

Valeurs numériques :

- Constante d'attraction universelle $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
- Masse de la Terre $M_T = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- Rayon terrestre moyen $R_T = 6371 \text{ km}$
- Permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Formulaire :

- Volume V d'une boule de rayon R : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$
- Expression du gradient dans la base sphérique :
$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$
- Expression de la divergence dans la base sphérique :
$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (E_\varphi)$$
- Théorème de Green Ostrogradski :
$$\forall (S) \text{ fermée, } \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_{V_{int}} \text{div} \vec{E} d\tau$$

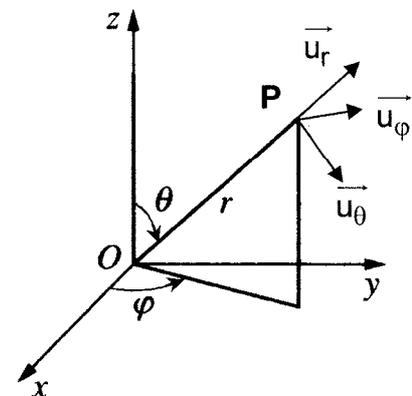


Figure 1 : coordonnées sphériques

A. ÉTUDE ET CRITIQUE DE DEUX MODÈLES SIMPLES

I. Rappels : électrostatique et gravitation universelle

1.1 Champ et potentiel électrostatiques

1.1.1. Rappeler l'expression de la force électrostatique subie par une charge ponctuelle q placée en un point P où le champ électrostatique a pour valeur $\vec{E}(P)$.

1.1.2. Une charge ponctuelle Q est placée en un point O distinct du point P (voir figure 2).

1.1.2.a. Rappeler l'expression de la force électrostatique subie par la charge ponctuelle q placée en P, du fait de la présence en O de la charge ponctuelle Q (postulat de Coulomb). On note ϵ_0 la permittivité du vide, \vec{u}_r le vecteur unitaire pointant de O vers P et r la distance OP.

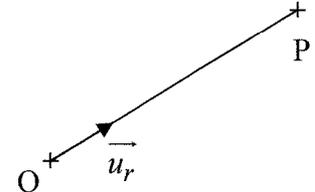


Figure 2

1.1.2.b. En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(P)$ créé en P par la charge ponctuelle Q placée en O.

1.1.3. Rappeler précisément, mais sans démonstration, l'énoncé du théorème de Gauss (formulation intégrale) relatif au champ électrostatique créé par une distribution permanente de charge quelconque.

1.1.4. Donner, sans démonstration, la formulation locale associée (relative à la divergence du champ électrostatique).

1.1.5. Retrouver, par le calcul, la formulation intégrale mentionnée au 1.1.3 à partir de la formulation locale mentionnée au 1.1.4.

On considère de nouveau une charge ponctuelle Q placée en O.

1.1.6 En utilisant avec soin les symétries du problème et par application du théorème de Gauss à une surface que l'on précisera, retrouver le résultat de la question 1.1.2.b.

1.1.7. En utilisant les coordonnées sphériques, montrer que le potentiel électrostatique $V(P)$ créé au point P de l'espace par cette charge ponctuelle Q placée en O ne dépend que de la distance $r = OP$, et déterminer son expression en fonction de Q , ϵ_0 et r , en supposant V nul à l'infini.

1.1.8. Quel est, dans ce cas précis, la nature :

1.1.8.a. des lignes de champ ?

1.1.8.b. des surfaces équipotentielles ?

1.1.9.

1.1.9.a. Que peut-on dire de la disposition relative des lignes de champ et des surfaces équipotentielles, dans ce cas précis (charge ponctuelle Q placée en O) ?

1.1.9.b. Etablir la généralité de cette propriété, en électrostatique.

1.1.10.

1.1.10.a. Rappeler la forme de l'équation de Maxwell-Faraday, dans le cas d'un régime non permanent en électromagnétisme.

1.1.10.b. A-t-on toujours $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, dans ce cas ? Justifier.

1.1.10.b. Etablir le lien entre cette équation de Maxwell-Faraday et un phénomène physique riche en applications.

1.2 Champ et potentiel gravitationnels

1.2.1 Rappeler l'expression de la force gravitationnelle subie par une masse ponctuelle m placée en un point P où le champ gravitationnel a pour valeur $\vec{\mathcal{G}}(P)$.

On note, dans toute la suite, G la constante (positive) d'attraction universelle, dont la valeur numérique est fournie dans le préliminaire.

1.2.2. Une masse ponctuelle M est placée au point O (distinct du point P).

1.2.2.a. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle subie par la masse ponctuelle m placée en P, du fait de la présence en O de la masse ponctuelle M . Faire le schéma précisant les notations utilisées.

1.2.2.b. En déduire l'expression du champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}(P)$ créé en P par la masse ponctuelle M placée en O.

1.2.3 Reproduire sur la copie le tableau ci-contre (présentant les grandeurs analogues dans l'étude comparée de l'électrostatique et de la gravitation), et le compléter en s'appuyant, notamment, sur certaines des réponses précédentes.

Electrostatique	Gravitation
Charge q	Masse m
Champ \vec{E}	
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	
Potentiel Electrostatique $V(P)$	Potentiel gravitationnel $V_g(P)$
$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$	

1.2.4 En exploitant soigneusement cette analogie, retrouver, à partir du résultat de la question 1.1.3, l'énoncé du théorème de Gauss relatif au champ gravitationnel créé par une distribution de masse quelconque.

1.2.5 Montrer que la connaissance de la valeur, en tout point de la surface du globe terrestre, du champ de gravitation créé par la Terre permet d'accéder à sa masse totale M_T .

1.2.6 On assimile, dans les questions 1.2.6 et 1.2.7, la répartition de masse dans la Terre à une répartition volumique à symétrie sphérique, de masse totale M_T . On pose $\mathcal{G}_r = \vec{\mathcal{G}}(P) \cdot \vec{u}_r$.

1.2.6.a. Déterminer le champ de gravitation créé par la Terre en tout point P situé à l'extérieur de la Terre en fonction de M_T , G , et $r = OP$.

1.2.6.b. Dans le référentiel géocentrique (ici assimilé à un référentiel galiléen), la Terre, de rayon $R_T = 6371$ km, est animée d'un mouvement de rotation supposé uniforme autour de l'axe polaire, la période de rotation (jour sidéral) valant $T_S = 86164$ s.

En déduire, en les justifiant, les caractéristiques (plan et nature, distance r_{gs} puis altitude h_{gs}) de la trajectoire des satellites géostationnaires.

1.2.6.c. Calculer numériquement la valeur de h_{gs} .

1.2.7.

1.2.7.a. Déduire du résultat de la question 1.2.6.a l'expression approchée, au voisinage du sol, du potentiel gravitationnel $V_g(r)$: $V_g(r) \approx V_g(R_T) + \frac{GM_T}{R_T^2}(r - R_T)$.

1.2.7.b. Expliquer pourquoi cette relation reste valable lorsque le point P voisin du sol est « sous terre ».

II. Aplatissement de la surface de la Terre du fait de sa rotation propre

On assimile ici la Terre à un fluide parfait. Dans le référentiel géocentrique (ici assimilé à un référentiel galiléen), la Terre est animée d'un mouvement de rotation supposé uniforme autour de l'axe polaire Oz, la période de rotation (jour sidéral) valant $T_S = 86164$ s. Chaque particule fluide de la Terre, de masse dm , décrit donc, dans le référentiel géocentrique, un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_S .

L'origine est choisie au centre de la Terre, qui présente une symétrie de révolution autour de l'axe polaire Oz (mais qui n'est plus supposée sphérique).

2.1 Exprimer, en fonction de ses deux premières coordonnées sphériques r et θ , et de ω_S , la norme du vecteur accélération associé au mouvement de la particule fluide.

2.2 Donner les composantes de ce vecteur accélération dans la base sphérique.

2.3 Montrer que ce vecteur accélération est proportionnel au gradient de la quantité $r^2 \sin^2 \theta$.

On rappelle que, si l'on note $d\tau$ le volume occupé par la particule fluide, la résultante des forces de pression exercées sur la particule fluide par le reste du fluide est donnée par la relation : $d\vec{F}_P = -\overrightarrow{\text{grad}} P_1 d\tau$, la notation P_1 désignant la pression.

2.4 Ecrire l'équation vectorielle traduisant la relation fondamentale de la dynamique appliquée, dans le référentiel géocentrique, à la particule fluide soumise aux forces de pression et de gravitation ; on notera $\vec{G}(P)$ le champ de gravitation au point P où est située à l'instant t la particule fluide, de masse dm .

On considère que la surface de la Terre est une surface isobare.

2.5 En déduire qu'à la surface de la Terre, la quantité $V_g - [(\omega_S^2 r^2 \sin^2 \theta)/2]$ est constante, la notation V_g désignant toujours le potentiel gravitationnel.

- 2.6. En retenant pour V_g la valeur obtenue à la question 1.2.7, déterminer l'écart relatif $(R_E - R_P)/R_E$, R_P et R_E étant respectivement les rayons polaire et équatorial de la Terre; on supposera que R_E est égal à $R_T = 6371$ km et exprimera cet écart relatif en fonction de G , M_T , $R_E = R_T$ et de T_S , durée du jour sidéral.
- 2.7. 2.7.a. Calculer numériquement cet écart relatif; on rappelle que $T_S = 86164$ s.
- 2.7.b. L'hypothèse « R_E proche de R_P », nécessaire pour utiliser le résultat de la question 1.2.7, est-elle vérifiée ?
- 2.8. En fait, l'aplatissement relatif $(R_E - R_P)/R_E$ vaut sensiblement $\varepsilon = \frac{1}{298}$.
- Commenter et expliquer, sans calcul, la raison de la différence entre cette valeur et celle obtenue à la question 2.7.a.

III. Modèle uniforme et modèle à deux enveloppes

Du fait de l'aplatissement étudié au II, le potentiel gravitationnel de la Terre à grande distance a pour expression : $V_g = \frac{GM_T}{r} \left[-1 + \frac{\varepsilon K}{2} \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$, $\varepsilon = \frac{1}{298}$ étant toujours l'aplatissement relatif, avec $K = \frac{C}{M_T R_T^2}$, C étant le moment d'inertie diamétral qu'aurait la Terre, de masse M_T et rayon $R_T = 6371$ km, sans sa rotation propre (donc sans le phénomène d'aplatissement).

On donne la valeur du moment d'inertie diamétral d'une boule pleine, de rayon R et masse volumique uniforme ρ : $C = \frac{8\pi}{15} \rho R^5$.

- 3.1. Vérifier la cohérence, sur le plan dimensionnel, entre cette relation et l'expression, donnée ci-dessus dans l'introduction de cette partie III, de V_g en fonction de r et de θ .
- 3.2. On assimile, dans une première approche, la Terre en l'absence de rotation propre à une boule pleine, homogène, de masse volumique uniforme. Dans le cadre de ce modèle, quelle devrait être la valeur de la constante $K = \frac{C}{M_T R_T^2}$?

L'étude expérimentale du champ de gravitation à grande distance (qui permet de caractériser le potentiel gravitationnel) montre que, dans la pratique, $K = 0,331$.

En s'appuyant sur ce résultat, on souhaite élaborer un modèle - encore très simple - de la Terre à deux enveloppes de densités ρ_N et ρ_M différentes : le noyau (boule pleine, de rayon R_N) et le manteau (boule creuse, de rayons interne R_N et externe R_M), comme l'indique la figure 3, page suivante.

La valeur de R_M , mesurée à partir de 205 avant J.-C. (Eratosthène), est actuellement estimée à : $R_M = R_T = 6371$ km. Dès 1912, les travaux menés sur les rais sismiques (l'étude de ces rais est abordée dans la partie C) permirent à Gutenberg de trouver la valeur de R_N ; la valeur actuellement retenue est : $R_N = 3470$ km. Puisqu'on connaît, par ailleurs, la masse de la Terre, les deux inconnues de notre modèle sont donc les valeurs de ρ_N et de ρ_M .

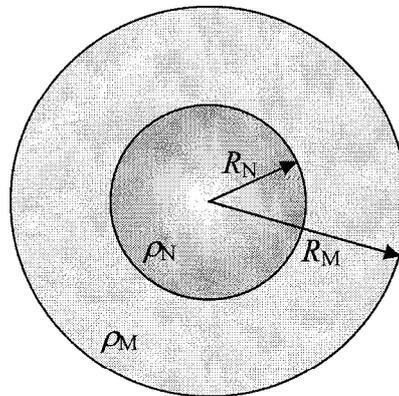


Figure 3 : modèle de la Terre à deux enveloppes

On précise que le moment d'inertie est, au même titre que la masse, une grandeur extensive (donc additive).

3.3. Ecrire le système linéaire de deux équations littérales vérifiées par les deux inconnues ρ_N et ρ_M , et dans lesquelles interviennent les grandeurs connues K , M_T , R_N et R_M . La résolution de ce système donne : $\rho_N = 12,3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_M = 4,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

3.4. On donne ci-dessous, figure 4, l'évolution réelle de la densité avec la profondeur ; commenter les résultats donnés à la question 3.3.

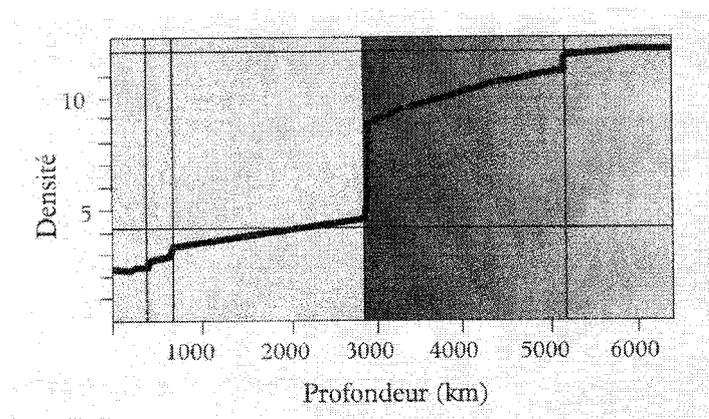


Figure 4

QUELQUES INDICATIONS QU'IL N'EST PAS NECESSAIRE D'UTILISER POUR TRAITER LA SUITE (PARTIES B, C et D)

Généralement, on utilise pour la Terre un modèle à symétrie sphérique, l'aplatissement dû à la rotation étant très faible.

Le modèle à deux couches que nous venons de présenter est très simplifié : la masse volumique d'une enveloppe homogène d'un point de vue chimique et minéralogique varie avec la profondeur, sous l'effet de la pression.

Par ailleurs, des études sismologiques ont montré que le noyau est constitué d'une partie externe liquide et d'une partie interne solide, nommée graine (d'un rayon de 1220 km), et que le manteau comprend également deux parties légèrement différentes, le manteau supérieur et le manteau inférieur.

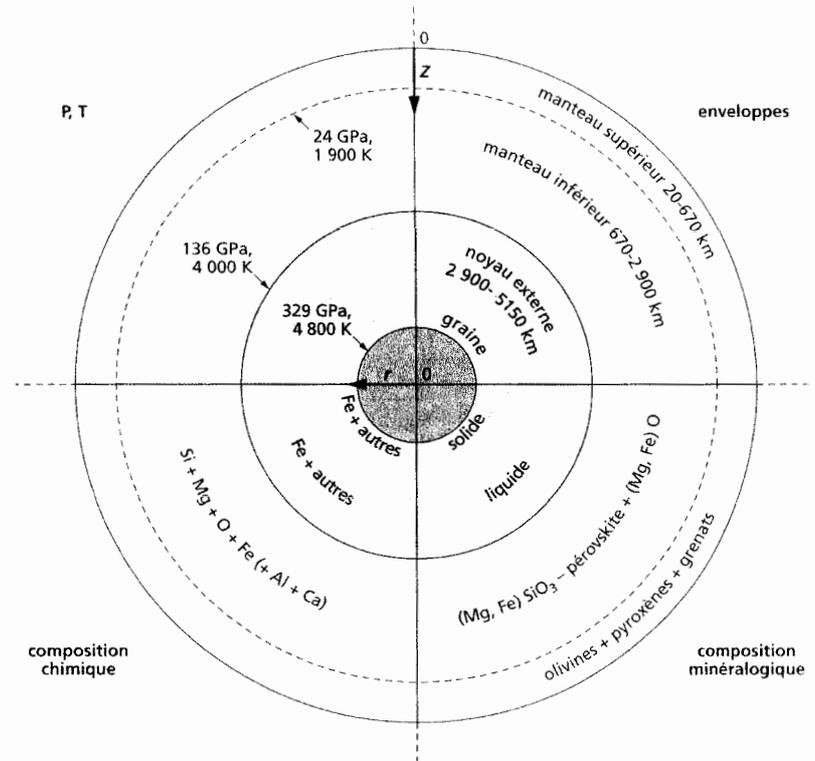


Figure 5 (les dimensions indiquées sont des profondeurs, et non des rayons)

La croûte, ou écorce terrestre, qui repose sur le manteau supérieur, ne peut être représentée à l'échelle de la figure 5 (son épaisseur moyenne est de l'ordre de 10 km).

La graine est constituée par sédimentation progressive du noyau externe ; c'est la pression très élevée qui la maintient dans un état solide malgré une température supérieure à 5300 K (au centre).

Le modèle sismologique ainsi obtenu est nommé **PREM** (Preliminary Reference Earth Model, 1981).

VOIR PARTIE B PAGE(S) SUIVANTE(S)

B. TEMPÉRATURE DANS LA LITHOSPHERE

La lithosphère (littéralement « sphère de pierre »), partie superficielle et solide de la Terre est constituée de la croûte terrestre et de la partie superficielle du manteau supérieur, de compositions chimiques différentes. La limite inférieure de la lithosphère (i.e. la limite entre la partie rigide du manteau et la partie ductile du manteau) se trouve à l'isotherme où l'olivine (minéral dominant dans le manteau) atteint son point de fusion, aux alentours de 1570 K.

On se propose ici de déterminer, dans une région continentale, l'épaisseur de la lithosphère, dont l'ordre de grandeur est très faible devant le rayon terrestre. On se place en régime permanent, et la température dans la lithosphère est supposée fonction de la seule variable cartésienne z (qui désigne ici la profondeur) : $T = T(z)$; les surfaces isothermes sont donc des plans orthogonaux à Oz.

La production de chaleur due à la radioactivité - par désintégration d'isotopes de l'uranium, du thorium et du potassium - et le transport conductif y sont les processus thermiques dominants.

La puissance **volumique**, notée ici A , produite par la radioactivité, diminue en profondeur (les roches de la croûte étant plus riches en éléments radiogéniques) . On la décrit par la loi : $A(z) = A_0 \exp(-z/d)$, avec $A_0 = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ W.m}^{-3}$ et $d = 10 \text{ km}$.

On note λ la conductivité thermique, et $\vec{j}(M)$ le vecteur flux surfacique thermique, avec $\vec{j}(M) = j(z)\vec{u}_z$; des relevés de température montrent que , dans la région étudiée, en $z = 0^+$, $\frac{dT}{dz} = +29 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$; enfin, on donne $\lambda = 2,5 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$.

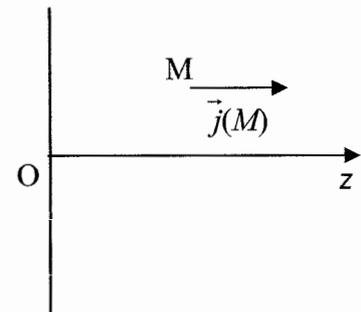


Figure 6

- 1.1. 1.1.1. Rappeler la relation (loi de Fourier) entre $\vec{j}(M)$, la conductivité thermique λ et $\overrightarrow{\text{grad}}T$.
 - 1.1.2. En justifier physiquement le signe.
- 1.2. 1.2.1. Dédire de la définition du vecteur flux surfacique thermique la dimension de ses composantes (ou leur unité dans le système international).
 - 1.2.2. Vérifier la cohérence des unités de la relation donnée à la question 1.1.1 .
- 1.3. Donner l'expression littérale, puis la valeur numérique de $j(z = 0^+)$, notée dans la suite j_0 .

- 2.1. En effectuant un bilan thermique sur la matière contenue dans un tronçon cylindrique de longueur de génératrices dz , de section droite s , établir une équation différentielle liant les fonctions $j(z)$ et $A(z)$. On rappelle que le régime est supposé permanent dans la lithosphère.
- 2.2 En intégrant cette équation différentielle, déterminer $j(z)$ en fonction de z , et des constantes A_0 , d et j_0 .
- 2.3 Que peut-on dire de $j(z)$ pour les valeurs de z très supérieures à $d = 10$ km ?
- 2.4 2.4.a. Représenter le graphe de $j(z)$, en précisant les valeurs numériques extrêmes.
2.4.b. Que peut-on dire, pour tout z , du signe de $j(z)$? En déduire celui de $\frac{dT}{dz}$.
- 3.1 En déduire l'expression littérale de la répartition de température $T(z)$, en fonction de z , des constantes A_0 , d , j_0 , λ et de $T_0 = T(z=0^+)$.
- 3.2 3.2.a. On suppose que $T(z=0^+) = T_0 = 285$ K. Calculer la valeur numérique de $T(z)$ lorsque $z = 100$ km.
3.2.b. Calculer numériquement la valeur de $T(z)$ lorsque $z = 50$ km.
3.2.c. Comparer les valeurs trouvées dans les questions 3.2.a et 3.2.b à la température de fusion de l'olivine, égale à 1570 K.
4. Déduire des résultats des questions 2.4 à 3.2 la valeur numérique de l'épaisseur de la lithosphère dans cette région continentale, ici égale à la valeur de z , notée z_{lim} , pour laquelle la température de fusion de l'olivine est atteinte.
5. Pour z supérieure à cette valeur z_{lim} , quel nouveau processus thermique devrait-on prendre en compte ? Justifier sans calcul.

VOIR PARTIE C PAGE(S) SUIVANTE(S)

C. LA SISMOLOGIE

Cette discipline s'attache à l'étude des ondes sismiques issues des séismes naturels ou de très fortes explosions. Dans toute cette partie C, les périodes considérées sont de l'ordre de 0,1 seconde à quelques secondes.

L'objectif de la sismologie est double :

- La caractérisation de la source sismique (position du foyer, mécanisme à la source, énergie, prévision), d'une part ;
- la détermination de la structure du globe par l'étude expérimentale de la propagation des ondes issus des séismes, d'autre part.

A la suite d'un séisme, différentes ondes se propagent à partir du foyer. On distingue les ondes P (de l'adjectif latin « primus », premier) de compression, longitudinales, et les ondes S (de l'adjectif latin « secundus », second) de cisaillement, transversales (voir figure 7). Toutes deux se propagent en volume dans la lithosphère (introduite dans la partie B), celles de plus grande vitesse de propagation étant les ondes P.

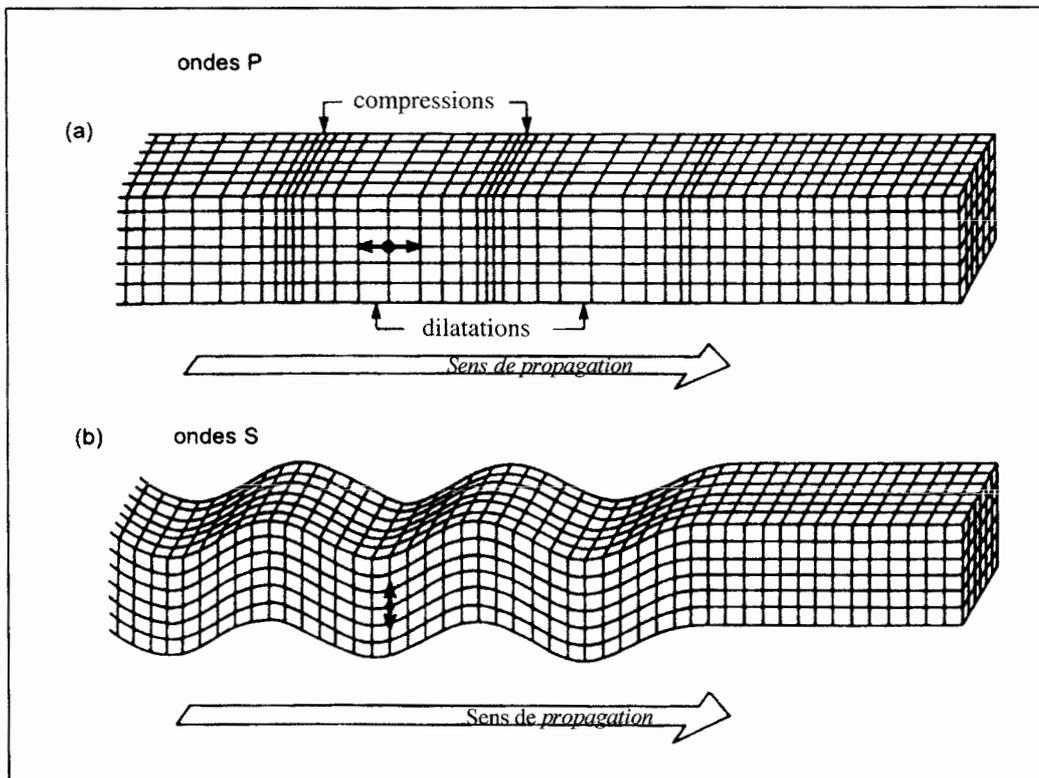


Figure 7

Lorsqu'elles atteignent la surface terrestre, elles engendrent des ondes de surface (de propagation plus lente que les ondes de volume P et S), que nous n'étudierons pas ici.

On supposera, de plus, que les ondes P et S ont un comportement analogue à celui des ondes lumineuses : leur propagation est, en particulier, rectiligne dans un milieu homogène. On nomme rais sismiques l'équivalent, en sismique, des rayons lumineux en optique.

I. Positionnement et datation d'un séisme par la méthode dite des S-P

Dans cette question, on cherche à positionner et à dater un séisme qui vient d'avoir lieu à faible profondeur ; on considère que, dans ces conditions, les ondes sismiques se propagent du foyer du séisme jusqu'aux capteurs (sismographes) de façon rectiligne, avec des vitesses de propagation uniformes - et supposées connues - v_P pour les ondes P, et v_S pour les ondes S ; on rappelle que v_P est supérieure à v_S .

On assimile localement la surface terrestre à une portion du plan xOy , l'axe Oz étant vertical ascendant.

Un premier sismographe perçoit les premières ondes P à un instant noté t_{P1} et les premières ondes S à un instant noté t_{S1} .

- 1.1 Montrer que la connaissance de ces deux instants permet de déterminer la date, notée t_0 , du début du séisme et la distance, notée Δ_1 , entre le foyer du séisme et ce premier sismographe.

- 1.2 De la même façon, on peut déterminer les distances, notées Δ_2 et Δ_3 , entre le foyer du séisme et deux autres sismographes. Les trois sismographes sont placés sur le sol en trois points A, B et C non alignés. On choisit l'origine O en A, et l'axe Ox selon AB. On note $(b,0,0)$ les coordonnées cartésiennes du point B, et $(c,d,0)$ celles du point C, celles du point A étant évidemment nulles. On pourra supposer que les trois valeurs b , c et d sont positives.
 - 1.2.1 Montrer que la connaissance de Δ_1 et Δ_2 permet d'affirmer que le foyer du séisme est situé sur une courbe plane. Préciser l'axe de cette courbe, et la position de son centre en fonction de b , Δ_1 et Δ_2 .
 - 1.2.2 Montrer sans calcul que la connaissance de b , c , d , Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 permet de positionner le foyer du séisme, situé sous la surface terrestre.

Dans la suite, on ne considérera que les ondes P, dont on notera simplement v la vitesse de propagation, par souci d'allègement.

II. Réflexion et réfraction des ondes sismiques

Les ondes sismiques vérifient également les lois de Descartes concernant la réflexion et la réfraction. On **assimile la séparation "croûte terrestre - manteau" à un dioptre plan**. Dans la croûte terrestre la vitesse de propagation des ondes est notée v_C , dans le manteau elle est notée v_m , et on suppose que v_m est supérieure à v_C . On introduit, pour chaque milieu, l'indice sismique, qui joue un rôle équivalent à celui de l'indice optique. On note $n_C = c_0/v_C$ l'indice sismique de la croûte terrestre, et $n_m = c_0/v_m$ l'indice sismique du manteau, c_0 étant une vitesse de référence.

- 2.1 Donner les lois équivalentes aux lois de Descartes relatives à la réflexion. Faire un schéma explicite. On notera i_C l'angle d'incidence sur le dioptre croûte-manteau.

2.2 Donner les lois équivalentes aux lois de Descartes relatives à la réfraction. Faire un schéma explicite. On notera i_m l'angle de réfraction.

2.3 2.3.1. Un rai sismique incident provenant de la croûte terrestre arrive au dioptre croûte-manteau sous l'angle d'incidence i_c positif. Montrer qu'il existe une valeur limite, notée i_o , de l'angle i_c au delà de laquelle la réfraction n'est plus possible.

2.3.2. Exprimer i_o en fonction de v_c et de v_m .

Lorsqu'un séisme a lieu en un point E (qu'on suppose en surface, pour simplifier l'étude), le sismographe placé en S enregistre, pour le seul type d'onde considéré (ondes P), 2 ou 3 signaux (voir Figure 8, ci-dessous) : une onde directe, une onde réfléchie et, dans certaines conditions étudiées dans la suite, une onde nommée "conique", qu'on peut décrire ainsi : le rai incident frappant le dioptre avec l'angle limite i_o donne un émergent qui rase, à la vitesse v_m , la surface de séparation dans le manteau ; cet émergent rasant émet dans la croûte des rais émissaires, sous l'angle d'émergence i_o , qui se propagent à la vitesse v_c .

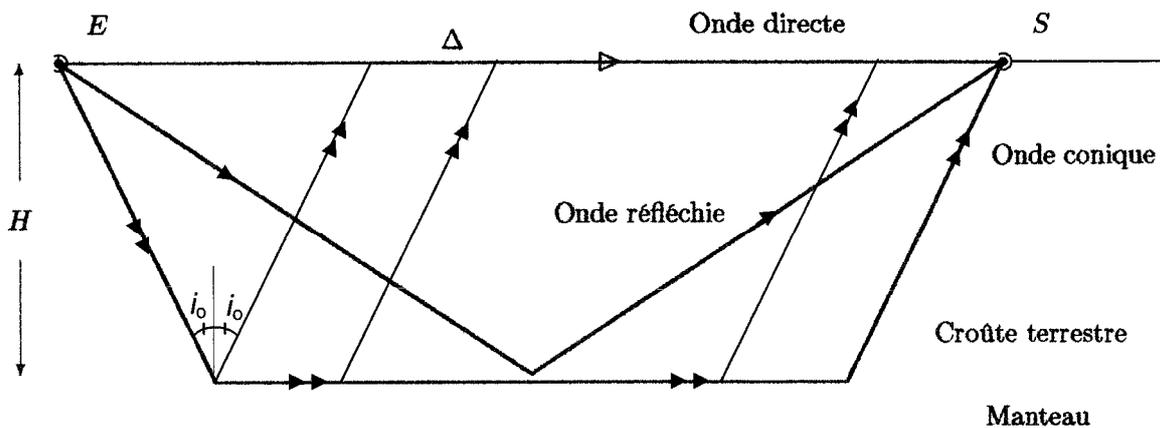


Figure 8 : Schéma représentant les trajets des ondes directe, réfléchie et conique
E : foyer du séisme, *S* : sismographe récepteur, *H* : épaisseur de la croûte

Sur cette figure 8, ont été représentés :

- le rai ES correspondant à l'onde directe, rai repéré par une flèche unique : \longrightarrow ;
- le couple rai incident-rai réfléchi passant par S, repérés par des flèches uniques : \longrightarrow ;
- le rai incident d'incidence i_o , le réfracté associé, et 4 rais correspondant à l'onde conique (y compris celui passant par le point S où est placé le sismographe), repérés par des flèches doubles : \longrightarrow .

On note Δ la distance entre E et S, nommée distance épacentrale.

H est l'épaisseur de la croûte terrestre.

2.4. 2.4.1. Déterminer, en fonction de H et de l'angle limite i_0 introduit à la question 2.3, la valeur minimale, notée Δ_m , de la distance épacentrale pour que le sismographe placé en S puisse détecter l'onde conique.

2.4.2. Déterminer les temps de parcours, notés respectivement t_D et t_R , des deux ondes directe et réfléchie en fonction de H , Δ , et v_C .

2.4.3. Dans le cas où $\Delta > \Delta_m$, déterminer le temps de parcours, noté t_C , de l'onde conique en fonction de H , Δ , v_C , v_m et i_0 , puis, en utilisant un des résultats de la question 2.3, uniquement en fonction de H , Δ , v_C , et v_m .

2.4.4. Tracer sur une même figure l'allure des graphes de t_D , t_R et t_C en fonction de Δ . On précisera les coefficients directeurs (ou pentes) des graphes de t_D et t_C , et la valeur limite, quand $\Delta \gg H$, de la pente du graphe de $t_R(\Delta)$.

2.4.5. On note Δ_1 la valeur, supérieure à Δ_m , de la distance Δ à partir de laquelle l'onde la plus rapide n'est plus l'onde directe. Déterminer l'expression de Δ_1 en fonction de H , et du quotient $\frac{v_C}{v_m}$.

2.4.6. Etablir, dans le cas où $\Delta < \Delta_m$, la relation entre la profondeur de la croûte terrestre H et la durée τ qui sépare les arrivées en S d'une onde directe et d'une onde réfléchie.

2.4.7. Une mesure effectuée dans les Alpes donne une valeur de $\tau = 3,91$ s, pour une distance épacentrale $\Delta = 105$ km. En déduire la valeur numérique de la profondeur H , sachant que la vitesse sismique dans la croûte terrestre est, dans la région, de l'ordre de $6,2 \text{ km.s}^{-1}$.

Les géophysiciens obtiennent de nombreux renseignements sur la constitution du globe terrestre, en provoquant des explosions détectées par un réseau de stations sismiques. Ainsi, il est possible de relever le temps du parcours le plus rapide (qui correspond aux premières vibrations du sismographe) en fonction de la distance épacentrale Δ . Le graphe obtenu, dans une deuxième région du globe, est représenté figure 9, ci-après.

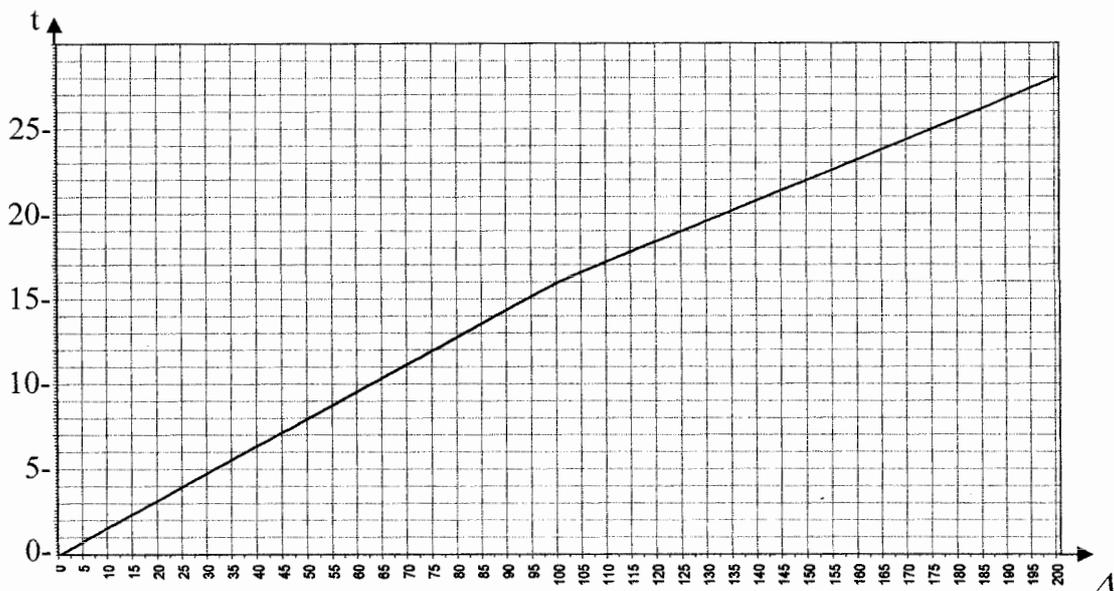


Figure 9 : temps de détection t en fonction de Δ .
Unités : en abscisses, Δ en km ; en ordonnées, t en s

2.4.8. Comment interpréter cette courbe par rapport aux graphes obtenus à la question 2.4.4 : quelles ondes sont ainsi détectées ?

2.4.9. Evaluer numériquement, à partir de la figure 9, la valeur de Δ_1 définie à la question 2.4.5 .

2.4.10. En exploitant les coefficients directeurs (ou pentes) des deux portions du graphe de cette figure 9, évaluer numériquement v_C et v_m .

2.4.11. Déduire des résultats précédents la valeur numérique de l'épaisseur H de la croûte.

2.5 On étudie dans cette question l'effet, sur le temps de perception de l'onde conique par la station sismique, d'une faible inclinaison d'un angle noté θ (de l'ordre de quelques degrés) du dioptre croûte-manteau par rapport à la surface terrestre (voir la figure 10, ci-dessous).

On note respectivement H_E et H_S les distances de E et de S au dioptre.

i_0 désigne encore la valeur limite de l'angle de l'angle i_C au-delà de laquelle la réfraction n'est plus possible. i_0 est supposé supérieur à θ , et n'est pas faible.

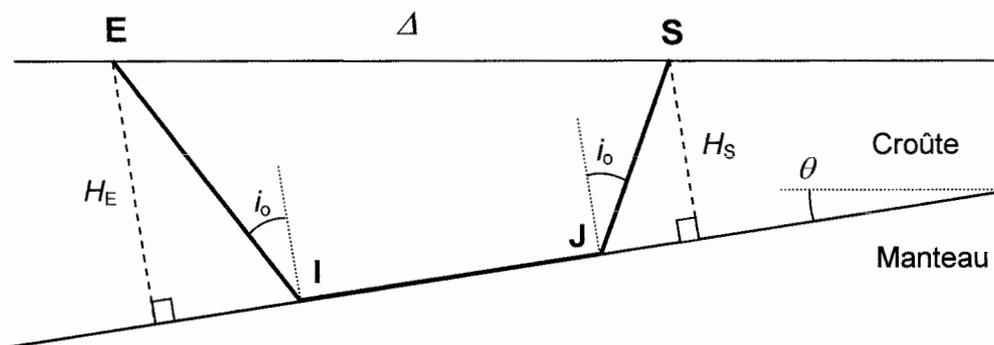


Figure 10 : onde conique dans le cas d'un dioptre croûte-manteau incliné

2.5.1. Exprimer la distance IJ en fonction de $\Delta=ES$, θ , H_E , H_S , et de l'angle i_0 . Exprimer également $(H_E - H_S)$ en fonction de Δ et θ .

2.5.2. En déduire, en utilisant un des résultats de la question 2.3, la relation donnant t_C , temps de parcours de l'onde conique, en fonction de Δ , H_E , v_C , i_0 et θ :

$$t_C = \frac{2H_E \cos(i_0) + \Delta \sin(i_0 - \theta)}{v_C}$$

2.5.3. La vitesse v_C est supposée connue. Pour une position donnée de l'épicentre E du séisme, on effectue le relevé expérimental de t_C , temps de parcours de l'onde conique émise vers l'amont (comme indiqué figure 10), en fonction de la distance épacentrale Δ . Quel est, d'après ce qui précède, le coefficient directeur (ou pente) du graphe correspondant ?

Ce relevé ne suffit donc pas à déterminer les valeurs de i_0 et de θ .

2.5.4. Avec la même position de E, quelle serait l'expression de t_C en fonction de la distance $\Delta = ES$, dans le cas où la station sismique S serait placée en **aval** de E ?

2.5.5. Montrer que la connaissance des pentes, notées p'_{am} et p'_{av} , des graphes de $t_C(\Delta)$ dans les deux cas amont et aval permet d'obtenir les valeurs de i_0 et de θ , sachant que $(i_0 - \theta)$ et $(i_0 + \theta)$ sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

2.5.6. L'angle θ étant petit (contrairement à i_0), on limite l'analyse à l'ordre un (inclus) en θ .

2.5.6.a. Etablir l'expression de v_m , vitesse des ondes dans le manteau, en fonction des pentes p'_{am} et p'_{av} .

2.5.6.b. Montrer précisément que, v_C étant connue, la détermination des deux pentes p'_{am} et p'_{av} , et de l'ordonnée à l'origine (en $\Delta = 0$) du prolongement d'un des graphes de $t_C(\Delta)$, permet d'obtenir également la valeur de H_E .

III. Etablissement de la loi $v(Z)$ en profondeur

L'étude de la propagation des ondes sismiques dans la partie lithosphérique du manteau permet d'obtenir de précieux renseignements.

On assimile encore la surface terrestre à une portion du plan XOY, l'axe OZ étant **vertical descendant** (voir la Figure 11, ci-dessous).

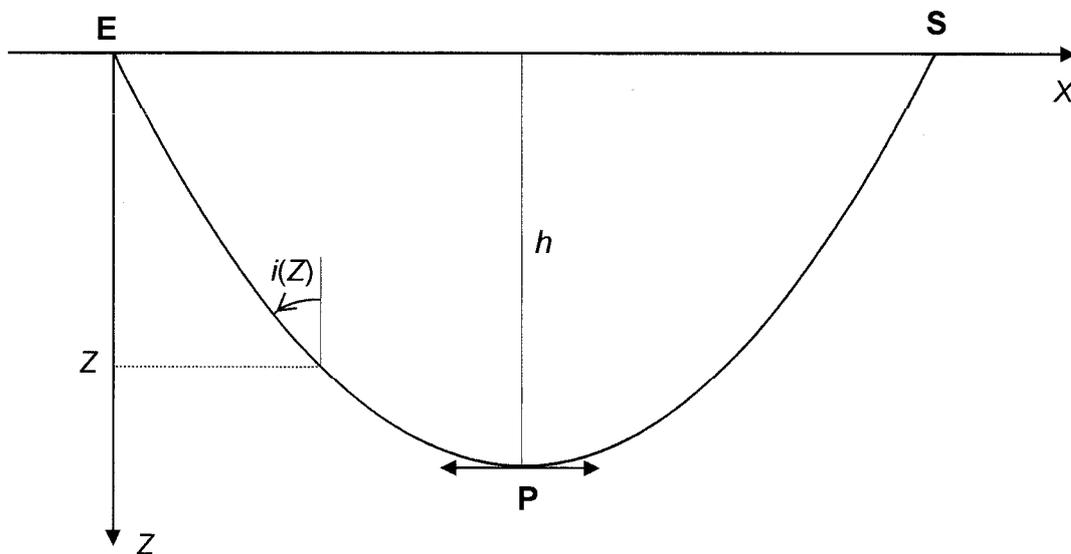


Figure 11

On considère qu'à l'échelle de l'étude (profondeur de l'ordre de plusieurs dizaines de kilomètres), on peut faire abstraction de l'épaisseur de l'écorce terrestre ; on suppose que la

vitesse des ondes sismiques est, pour toute direction de propagation, une **fonction $v(Z)$ continue et croissante** - que l'on cherche à caractériser - de la profondeur notée Z .

On note Δ la distance épacentrale : $\Delta = ES$. On étudie les rais situés dans le plan EXZ . S est placé sur l'axe EX .

3.1. En assimilant la partie étudiée du manteau à un empilement de différentes strates telles que $v'' > v' > v$, montrer que la valeur absolue de la quantité $\frac{\sin i(Z)}{v(Z)}$ est constante, pour un rai donné. On nomme paramètre du rai et note p cette valeur absolue, qui est fonction du rai considéré.

Chaque rai étudié ici possède un « point bas » noté P (voir figure 11, page précédente), de profondeur notée h (et dont la valeur est fonction du rai considéré).

3.2. Etablir une relation entre le paramètre p d'un rai et la vitesse de propagation des ondes au niveau de son point bas.

3.3. 3.3.1. Chaque rai présente une symétrie par rapport à une droite ; laquelle ?

3.3.2. Donner, précisément mais sans calcul, la raison de cette propriété.

On considère deux rais issus de E , infiniment voisins, coupant le sol en deux points M et M' (voir la figure 12, ci-dessous).

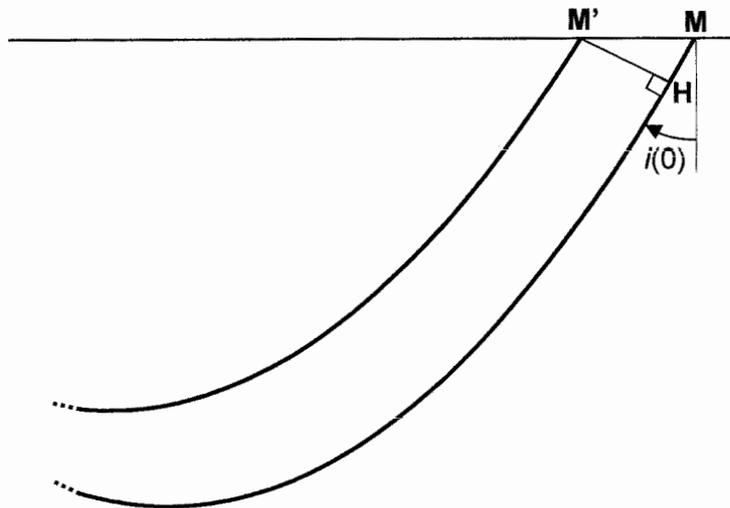


Figure 12

On note Δ la distance épacentrale du point M , et $(\Delta - d\Delta)$ celle du point M' ; $d\Delta$ est un infiniment petit.

On **admet** que le point M' et le point H , projeté orthogonal de M' sur le rai passant par M , perçoivent simultanément l'onde sismique émise par E .

On note dt le temps (très court) entre les perceptions de l'onde en M' et en M , et $i(0)$ l'angle d'incidence, en $Z = 0$, du rai coupant le sol en M .

La portion de rai entre H et M peut ici être assimilée à sa tangente en M .

3.4. Etablir le lien entre la « vitesse apparente au sol » $v_a = \frac{d\Delta}{dt}$ et le paramètre p du rai passant par le point M .

On **admet** la formule de Herglotz-Wiechert :
$$h(\Delta) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta'=0}^{\Delta'=\Delta} \text{Argch} \left(\frac{v_a(\Delta)}{v_a(\Delta')} \right) d\Delta'.$$

On suppose connu le graphe, obtenu expérimentalement, de la fonction $t(\Delta)$ qui relie le temps de propagation de l'onde (de E à S) à la distance épacentrale $\Delta = ES$.

3.5. Montrer, sans calcul, qu'il est alors possible d'en déduire des points du graphe de la vitesse de propagation en fonction de la profondeur.

VOIR LA PARTIE D PAGE(S) SUIVANTE(S)

D. ETUDE DE SISMOMÈTRES

0. Question préalable

Si, dans l'étude d'un sismomètre, le référentiel géocentrique est assimilé à un référentiel galiléen avant le séisme, peut-il encore être considéré comme tel pendant le séisme ? Justifier votre réponse.

Dans toute cette partie D, on considère que le référentiel d'étude, noté R , est galiléen et que $g = \|\vec{g}\|$ est uniforme. Localement le sol est mis en mouvement par rapport à R sous l'effet des secousses sismiques que l'on souhaite étudier. Ces secousses ont, en général, trois composantes : une verticale et deux horizontales. On s'intéresse uniquement dans ce problème aux secousses verticales ; on considère donc que **le sol est animé par rapport à R d'un mouvement de translation rectiligne, verticale et non uniforme.**

I. Un premier modèle de sismomètre vertical

Le sismomètre proposé est constitué d'un point matériel M de masse m , relié à un point A d'un châssis lui-même solidaire du sol en vibration dans R . La liaison de M au châssis est modélisée par un ressort de longueur $L(t)$ à l'instant t , de longueur au repos L_0 , et de constante de raideur k , associé à un amortisseur exerçant sur le point matériel une force égale à : $\vec{F}_v = -h\dot{L}\vec{u}_z$, où \dot{L} désigne la dérivée temporelle de $L(t)$, et \vec{u}_z est le vecteur unitaire vertical descendant.

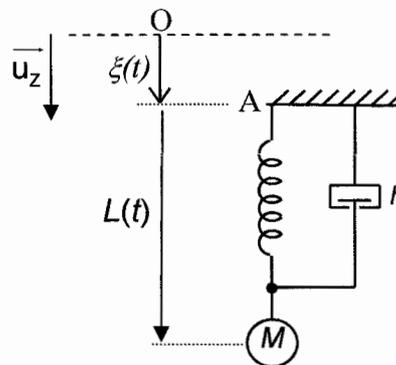


Figure 13 : Modèle de sismomètre vertical

On note O un point fixe dans le référentiel galiléen R . Le mouvement du sol par rapport au référentiel galiléen R est représenté par $\xi(t)$ et le mouvement de M par rapport au châssis, donc par rapport au sol, est représenté par $L(t)$. On note L_1 la longueur du ressort à l'équilibre en l'absence de tremblement de terre (donc lorsque ξ est constamment nul).

1.1 Déterminer L_1 en fonction de m , g , k et L_0 .

Dans toute la suite de cette question 1, on pose $z(t) = L(t) - L_1$, et on suppose qu'un système d'acquisition permet d'enregistrer directement $z(t)$.

1.2 Exprimer le vecteur accélération du point M dans \mathbf{R} en fonction de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ et \vec{u}_z .

1.3 En présence d'une onde sismique, le point A est animé d'un mouvement qu'on modélise ici par $\xi(t) = a \cos(\omega t)$. En traduisant les lois de la mécanique dans le référentiel \mathbf{R} , montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega^2 a \cos(\omega t)$$

1.4 1.4.1. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction de m , k et h .

1.4.2. Calculer ω_0 et le facteur de qualité Q sachant que : $m = 10 \text{ kg}$, $k = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$ et $h = 2,1 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1} \cdot \text{s}$.

La réponse $z(t)$ du sismographe à l'excitation $\xi(t) = a \cos(\omega t)$ est égale à la somme d'un terme transitoire $z_{RT}(t)$, et d'un terme correspondant au régime permanent sinusoïdal (ou sinusoïdal forcé), noté $z_{RPS}(t)$.

1.5 1.5.1. Déterminer la valeur Q_C du facteur de qualité Q pour laquelle le régime transitoire est apériodique critique.

1.5.2. Quelle est alors, pour cette valeur Q_C de Q, la forme générale du terme transitoire $z_{RT}(t)$?

1.6. On se place dans le cas où $\xi(t) = 0$ (absence de tremblement de terre, ou étude de la relaxation après passage du séisme). A l'instant $t = 0$, $z = z_0 > 0$, et $\dot{z} = 0$.

1.6.1. Calculer, à valeur fixée de ω_0 , les valeurs du quotient $\frac{z(t)}{z_0}$ à l'instant

$t = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ dans les deux cas suivants : $Q = 0,5$; $Q = 10$.

1.6.2. Quel ordre de grandeur doit-on choisir pour le facteur de qualité, afin d'avoir une relaxation rapide ?

Dans la suite, on s'intéresse au régime permanent sinusoïdal, pour lequel la solution est de la forme $z(t) = b \cos(\omega t + \varphi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée $\underline{z}(t) = b \exp[j(\omega t + \varphi)]$, avec $j^2 = -1$.

1.7. 1.7.1. Établir l'expression du rapport b/a et du déphasage φ en fonction du rapport

$x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et du facteur de qualité Q.

1.7.2. La figure 14 ci-contre donne l'allure du graphe de b/a en fonction de ω pour différentes valeurs de Q . Vérifier la cohérence de ce graphe avec l'expression établie de b/a obtenue à la question 1.7.1 en examinant les cas limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.

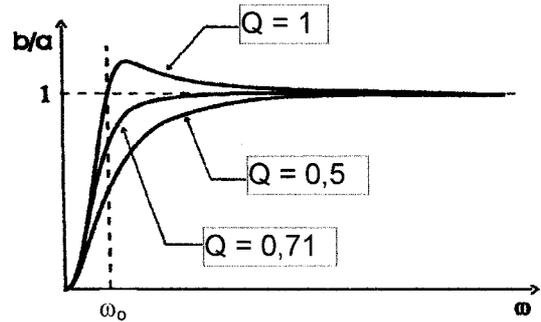


Figure 14

1.8. On pose $Y = \frac{b^2}{a^2}$. En exprimant Y en

fonction de $x' = \frac{1}{x} = \frac{\omega_0}{\omega}$, montrer qu'il ne

peut pas y avoir résonance en élongation si Q est inférieur à une valeur limite Q_{lim} que l'on déterminera.

L'utilisateur souhaite obtenir, en régime permanent sinusoïdal, une loi $z(t)$ dont l'amplitude soit, dans la mesure du possible, égale à l'amplitude du mouvement du sol.

1.9. Comment doit-il choisir la pulsation propre ω_0 par rapport à l'ordre de grandeur ω de la pulsation imposée par le séisme ?

1.10. 1.10.1. En utilisant la figure 14, expliquer quel est l'intérêt de choisir une valeur de Q proche de la valeur Q_{lim} trouvée à la question 1.8.

1.10.2. Ce choix de Q vous paraît-il compatible avec une rapidité convenable de la relaxation (i.e. avec une disparition rapide du transitoire) ?

1.11. Avec ces choix de ω_0 (question 1.9) et de Q (question 1.10), quel est le lien entre $z(t)$ et $\xi(t)$ en régime permanent sinusoïdal ?

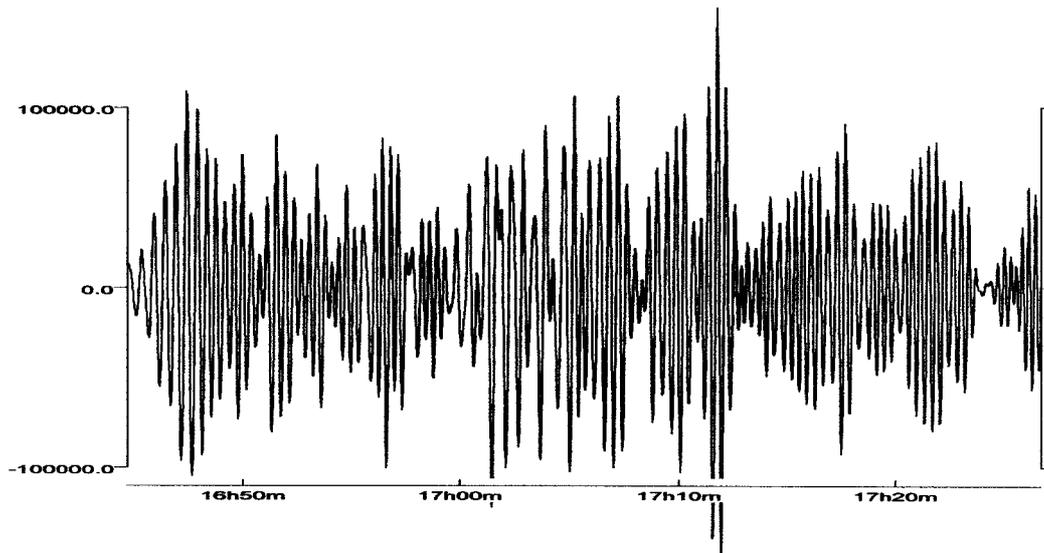


Figure 15 : extrait d'un sismogramme enregistré à Nice le 3 Mai 2006 ; séisme dans la région des îles Tonga

Dans le cas où le sismographe détecte un séisme lointain, les fréquences sismiques perçues sont de l'ordre de 0,1 Hz (voir la figure 15, page précédente).

1.12. 1.12.1. Quelle contrainte entre k et m est imposée, de ce fait, d'après le résultat de la question 1.9 ?

1.12.2. Que peut-on dire, dans ces conditions, de l'ordre de grandeur de l'allongement du ressort à l'équilibre (trouvé à la question D.1.1) ? Commenter ce résultat.

II. Exemple pratique de sismomètre à longue période

Le problème constaté ci-dessus a été résolu par l'invention de sismomètres travaillant « en rotation », comme le "sismomètre de LACOSTE", dont le principe est représenté sur la Figure 16 ci-dessous. On le modélise ici par un point matériel M de masse m , situé à l'extrémité d'une tige de masse supposée négligeable, pouvant tourner, par rapport au châssis, sans frottement autour d'un axe horizontal Ax (liaison pivot idéale) ; cet axe Ax , fixe par rapport au châssis, est orthogonal au plan de la figure 16.

Dans toute la suite, on admet que, dans ces conditions, l'action de la tige sur M se réduit à une force colinéaire à la tige.

Un ressort de constante de raideur k , de longueur au repos supposée nulle, est tendu entre un point B du châssis, situé au-dessus de A et sur la même verticale, et le point M .

Les mouvements du point M ont lieu dans le plan vertical de la figure 16 ci-dessous, plan qui passe par les points A et B .

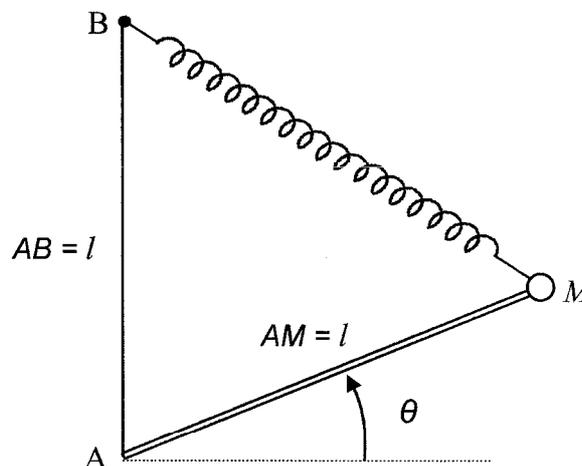


Figure 16 : Sismomètre de Lacoste

On suppose enfin que les deux longueurs constantes AM et AB sont égales. On pose : $l = AB = AM$.

L'inclinaison de la tige est repérée par l'angle θ que fait \overline{AM} avec l'horizontale.

2.1. Mouvement en l'absence de séisme :
A est fixe dans le référentiel galiléen R

- 2.1.1. Donner la relation entre l'angle $(\overline{AM}, \overline{AB})$ et l'angle θ .
- 2.1.2. Le triangle MAB étant isocèle de sommet A, en déduire l'expression de la longueur $L = BM$ du ressort en fonction de l et de l'angle θ .
- 2.1.3. Que peut-on dire de la puissance de la force exercée par la tige sur M ?
- 2.1.4. Déterminer l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$, somme des énergies potentielles élastique et de pesanteur, en fonction de m, k, l, g et du sinus de l'angle θ . On pourra, au besoin, utiliser la relation trigonométrique : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.
- 2.1.5. 2.1.5.a. Quelle relation entre m, k, l et g doit être vérifiée pour que la position $\theta = 0$ représente une position d'équilibre ?
- 2.1.5.b. Que peut-on dire, dans ces conditions, de la nature de l'équilibre ?

Lorsqu'on cherche expérimentalement à assurer la condition précédente, on constate en fait que le point M tend à se stabiliser en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ou en $\theta = +\frac{\pi}{2}$.

Pour éviter ce problème, on incline légèrement vers la droite le support AB ; on note α l'angle constant, positif, que fait la verticale ascendante avec le support AB.

AB et AM sont dans le plan vertical de la figure 17, représentée ci-dessous.

On a encore : $l = AB = AM$. BM est alors fonction de la somme $(\theta + \alpha)$, et de l .

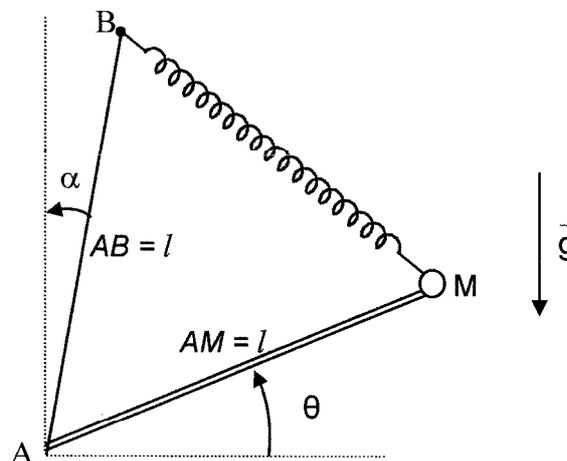


Figure 17 : cas où l'axe AB n'est pas vertical

On limite l'étude au domaine $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha \right]$.

- 2.1.6. De la même façon qu'aux questions 2.1.4 et 2.1.5, trouver quelle relation entre m, k, l, g et α doit être vérifiée pour que la position $\theta = 0$ représente une position d'équilibre.

Dans la suite, on suppose que la valeur de m a été choisie de façon à ce que la relation établie à la question 2.1.6 soit vérifiée.

2.1.7. 2.1.7.a. Donner alors une expression plus légère de E_P en fonction de k , l , α et de l'angle θ .

2.1.7.b. Etudier la stabilité de la position d'équilibre $\theta = 0$.

2.1.8 Dans cette question, on étudie des petites oscillations au voisinage de $\theta = 0$, et on retient seulement, dans l'expression de l'énergie potentielle totale $E_P(\theta)$ établie à la question 2.1.7, les termes d'ordre inférieur ou égal à deux en θ .

2.1.8.a. A partir d'une analyse énergétique du problème, montrer que $\theta(t)$ obéit à l'équation différentielle : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0'^2\theta = 0$ et déterminer la nouvelle expression de la pulsation propre ω_0' en fonction de k , m et de l'angle α .

2.1.8.b. On donne $l = 60$ cm ; $g = 9,8$ m.s⁻² ; comment doit-on choisir numériquement les valeurs de l'angle α et du rapport k/m pour obtenir une période propre égale à 10 s ? Commenter.

On suppose qu'à $t = 0$, θ est très légèrement inférieur à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\dot{\theta}$ étant nul.

2.1.8.c. L'évolution de $\theta(t)$ reste-t-elle à caractère oscillant ? Dans l'affirmative, que peut-on dire de l'amplitude angulaire des oscillations ?

Dans toute la suite, on se limite de nouveau au cas des petites oscillations au voisinage de $\theta = 0$.

2.1.9. Dédurre, de l'expression de l'énergie potentielle totale $E_P(\theta)$ limitée aux termes d'ordre inférieur ou égal à deux en θ , l'expression approchée de la composante selon l'unitaire orthoradial \vec{u}_θ (voir la figure 18, ci-dessous) de la résultante des forces que le ressort et la pesanteur exercent sur M.

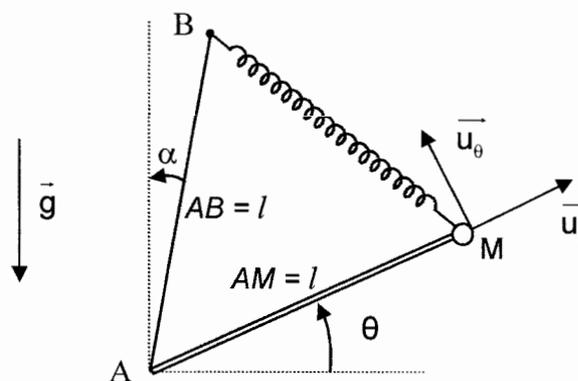


Figure 18

2.2 Comportement lors de la détection d'un séisme

On suppose que l'ensemble de ce dispositif est soumis au même tremblement de terre que dans la partie D.1 (voir la figure simplifiée 19, ci-dessous).

Un dispositif amortisseur exerce sur le point matériel une force égale à : $\vec{F}_v = -h l \dot{\theta} \vec{u}_\theta$, .

2.2.1. La convention d'orientation étant descendante, montrer que le déplacement relatif $z(t) = -l\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\text{linéaire : } \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dz}{dt} + \omega_0'^2 z = -\frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

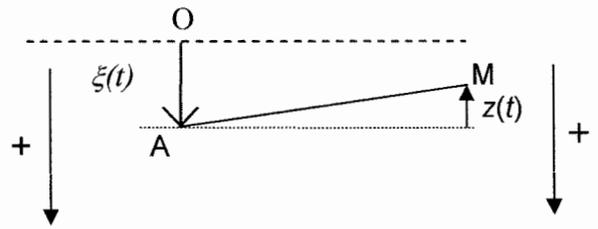


Figure 19

2.2.2. Comment convient-il de choisir numériquement la valeur du rapport h/m , sachant que la période propre vaut 10 s ?

En pratique, on peut, de façon plus commode, régler les caractéristiques d'inertie, de rappel ou de frottement, grâce à des capteurs électromagnétiques et à des boucles de réaction. Ce sujet n'aborde pas l'étude de ces systèmes à boucle(s) active(s) de réaction.

III. Un exemple de capteur du mouvement du sismomètre de Lacoste

Une bobine de N spires, de masse, résistance et auto-inductance L négligeables, liée au bras AM du sismomètre de Lacoste étudié dans la partie D.2.2 ci-dessus, est placée à la distance l de O, sous le point M. Sa longueur et le diamètre de sa section droite sont supposés très faibles devant l . La vitesse, dans le référentiel du châssis, de chaque point de la bobine vaut sensiblement $\frac{dz}{dt} \vec{u}_z$.

Cette bobine est soumise au champ magnétique d'un **aimant permanent** de forme torique, **solidaire du châssis** du sismographe. Le champ magnétique est supposé radial et de norme uniforme (notée B) dans l'entrefer, et permanent dans le référentiel du châssis.

On note l_b la longueur totale de fil de la bobine.

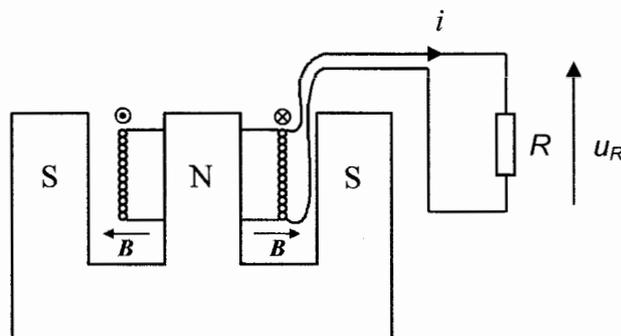


Figure 20 : Montage avec une bobine permettant l'enregistrement du mouvement

La bobine est fermée sur une résistance R . On notera avec attention, figure 20, le sens de l'enroulement du fil de la bobine ; on rappelle que l'unitaire \vec{u}_z est vertical descendant .

3.1. Après avoir évalué $\frac{dz}{dt} \vec{u}_z \wedge \vec{B}$, montrer que l'intensité du courant qui circule dans le circuit est liée aux variations de z par la relation : $i = \frac{K}{R} \frac{dz}{dt}$, où K est une constante que l'on déterminera en fonction de B et de l_b .

3.2. En déduire la résultante des forces de Laplace exercées sur la bobine en fonction de B , l_b et i , puis en fonction de la constante K introduite ci-dessus, de R et de $\frac{dz}{dt}$.

La bobine étant de masse négligeable, cette résultante correspond à une force supplémentaire exercée sur la masse m .

3.3. 3.3.1. De même façon qu'à la question 2.2.1, écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et $\xi(t)$.

3.3.2. Quelle(s) caractéristique(s) mécanique(s) du sismographe a-t-on ainsi modifiée(s) ?

3.4. 3.4.1. Peut-on dire que la tension u_R aux bornes de R est proportionnelle à $z(t)$?

3.4.2. Quel traitement doit-on appliquer au signal électrique pour obtenir une tension proportionnelle à $z(t)$?

3.5. On considère le montage électrique présenté sur la figure 21 ci-dessous.

3.5.1. Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$, l'amplificateur opérationnel étant supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire .

3.5.2. a. Quelles sont les fonctions réalisées par ce montage à basse et à haute fréquence ?

b. Préciser les notions de « basse et haute fréquence », en fonction de la valeur du produit R_2C .

3.6. On connecte l'entrée du montage ci-dessous en parallèle sur la résistance R du montage de la figure 20 ; ainsi, $v_1 = u_R$. R_1 est supposée très supérieure à R .

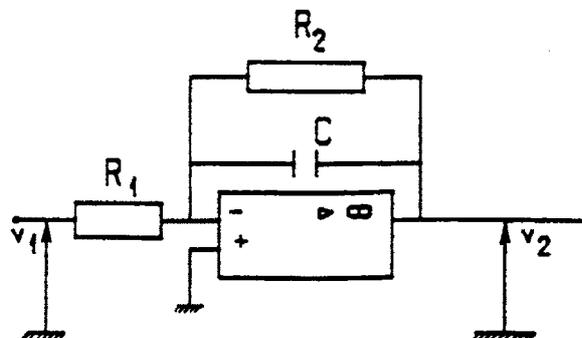


Figure 21 : Montage de traitement de la tension aux bornes de la résistance R

3.6.1. La présence de ce nouveau montage modifie-t-elle sensiblement, par rapport aux conditions évoquées dans les questions 3.1 à 3.3 , les caractéristiques de l'amortissement ? Justifier avec soin.

3.6.2.

3.6.2.a. On souhaite obtenir une tension de sortie v_2 proportionnelle à $z(t)$, en régime permanent sinusoïdal pour des fréquences sismiques de l'ordre de 0,1 Hz. Indiquer comment il convient de choisir l'ordre de grandeur du produit R_2C .

3.6.2.b. Proposer des ordres de grandeur pratiques pour R_2 et pour C .

FIN DE L'ÉNONCÉ