

Modélisation 3D

Cette étude va nous permettre d'élaborer un modèle dynamique de l'ensemble {tracteur + remorque-citerne} et d'étudier le comportement routier du véhicule à partir de la commande imposée au volant lors d'une manœuvre d'évitement.

Pour la suite de l'épreuve on envisagera le cas d'une citerne à moitié remplie $h=0$.

A. Etude de la citerne

Nous allons séparer l'étude en trois parties. Dans la première partie on étudiera les sollicitations sur la citerne considérée comme une poutre droite de section tubulaire elliptique. Dans la deuxième partie on étudiera les sollicitations créées par le fluide sur l'enveloppe de la citerne. On appliquera alors le principe de superposition des contraintes. Lors de la troisième partie nous étudierons cette citerne à l'aide de la méthode des éléments finis.



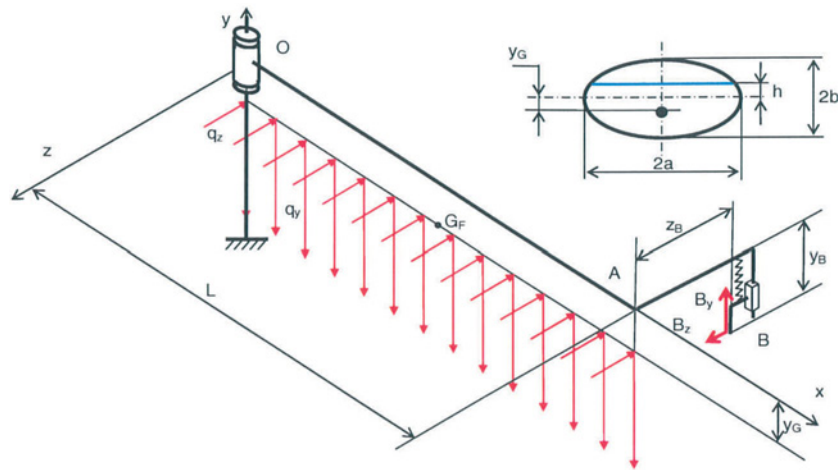
Torsional rigidity test for the first Made in Greece aluminum ADR tank (Jet Engineering SA)

A.I CITERNE CONSIDEREE COMME UNE POUTRE

Pour cette première partie, on ne s'intéressera qu'aux sollicitations induites par les effets dynamiques sur le fluide, par son poids et par les effets de la pression du fluide sur le fond arrière (que l'on considérera comme plan).

On étudiera le comportement de la citerne dans un virage, lors du décolllement des roues intérieures au virage avec écrasement de la suspension et des pneumatiques.

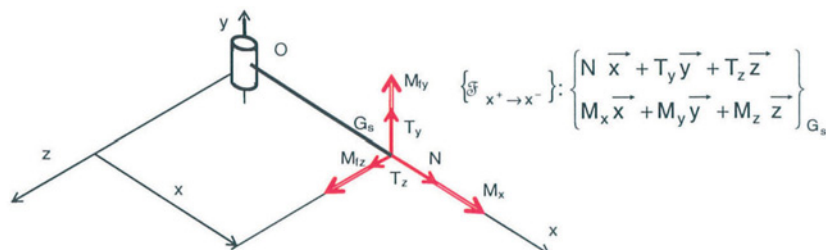
Le modèle proposé est celui d'une poutre de section elliptique en liaison pivot d'axe (O, \vec{y}) par rapport au tracteur et en appui élastique avec adhérence sur le sol en B, au niveau des pneumatiques extérieurs (Voir figure ci-après).



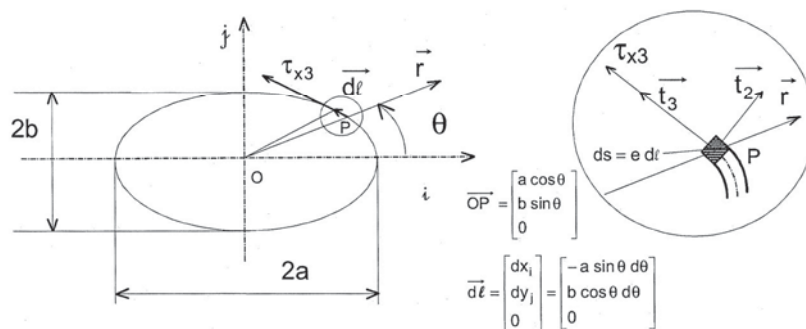
Hypothèses :

- Le camion se trouve sur une trajectoire circulaire à vitesse constante, le rayon de la courbe est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que tous les points de la citerne subissent la même accélération transversale.
- On négligera le poids de la citerne devant celui du fluide transporté.
- L'inclinaison de la surface du fluide et la variation de position de son centre de masse ont peu d'influence sur le comportement élastique de la structure.
- La présence de la suspension et des pneumatiques est modélisée par un ressort de raideur k_y .
- Une répartition linéique de charge appliquée le long de l'axe (G_F, \vec{x}) et dont les composantes sont : $\vec{q} = -q_y \vec{y} - q_z \vec{z}$ (avec $q_z = \beta q_y$ et $\overrightarrow{G_F O} \cdot \vec{y} = y_G$) modélisera le poids et les effets dynamiques du fluide sur la poutre représentant la citerne.
- Les effets du fluide sur les fonds seront pris en compte dans la seconde partie.

A.I.1 En supposant connue la composante verticale B_y de l'effort $\vec{B} = B_y \vec{y} + B_z \vec{z}$, calculer les composantes du torseur des efforts internes $\left\{ \mathcal{F}_{x^+ \rightarrow x^-} \right\}$ au centre de gravité G_s d'une section droite, le long de OA et en fonction de q_y, q_z, B_y, B_z , de l'abscisse $x = OG_s$ et de la géométrie.



- A.1.2 Ecrire l'expression de l'énergie de déformation dans la poutre OA en fonction des composantes du torseur des efforts internes, en négligeant les effets de l'effort tranchant. On ne développera pas le calcul.
- A.1.3 En utilisant les méthodes énergétiques ainsi que l'expression de B_y en fonction de la raideur de l'appui k_y et du déplacement du point B suivant \vec{y} noté U_y , écrire l'équation qui permet de déterminer la valeur de ce déplacement ($U_y=0$ avant chargement).
- A.1.4 En écrivant une équation d'équilibre statique calculer la composante horizontale B_z de l'effort $\vec{B} = B_y \vec{y} + B_z \vec{z}$.
- A.1.5 Sachant que le moment de torsion M_t en un point G_s d'une section droite de la poutre est égal à la somme des moments élémentaires induits par les contraintes de cisaillement τ_{x3} , donner la relation qui existe entre M_t et τ_{x3} . On rappelle que dans un profilé mince fermé, la contrainte de cisaillement τ_{x3} , tangente au profil, varie selon l'abscisse curviligne en raison inverse de l'épaisseur e du profil au point considéré. Pour effectuer ces calculs on pourra utiliser le repérage suivant :



- A.1.6 En considérant un élément de poutre de longueur dx comme un ressort de torsion, donner l'expression de l'énergie de déformation dw de celui-ci soumis à un moment M_t . On appellera $\frac{d\phi}{dx}$ la rotation unitaire de la section.
- A.1.7 On rappelle que l'expression de l'énergie de déformation peut être exprimée à l'aide des composantes des contraintes et des déformations par : $W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$. En utilisant la loi de Hooke généralisée, exprimer les déformations en fonction des contraintes; puis exprimer dw , énergie de déformation d'un élément de poutre de longueur dx ($dw = \frac{dx}{2} \int_S \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dS$) en fonction de τ_{x3} .

A.I.8 A partir des résultats des deux questions précédentes, trouver l'expression de $d\phi$ en fonction de M_t . En se souvenant que $\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{GJ}$, donner l'expression du moment quadratique de torsion J du tube elliptique.

A.I.9 Application numérique : calculer les valeurs de $B_y, B_z, M_z, M_x, I_{yy}, I_{zz}$ et J pour le point de coordonnées $(0, -b, 0)$ dans le repère .

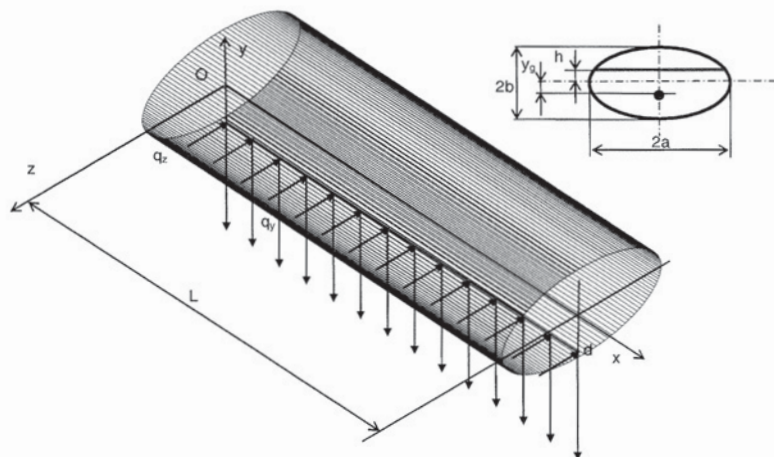
Données :

- ➔ Citerne à moitié remplie $h=0$
- ➔ On donne l'aire de l'ellipse $S_{E1} = \pi a b$
- ➔ Les moments quadratiques $I_{yy} = \frac{3}{4} \pi a^2 e(3b + a)$ et $I_{zz} = \frac{1}{4} \pi b^2 e(3a + b)$
- ➔ Position du centre de masse du fluide $y_G = \frac{4 b}{3 \pi}$ (voir figure)
- ➔ $L=11$ m ; $a=1.25$ m ; $b=1$ m ; $e=2$ mm ; $E= 200$ GPa ; $\nu=0.3$; $\rho_F=1000$ kg/m³ ; $\beta=0.5$; $k_y=1000$ kN/m, $g=9.81$ m/s² , $y_B=1.9$ m , $z_B=1$ m.

A.I.10 En déduire les valeurs des contraintes normale de flexion et tangentielle de torsion pour ce même point.

A.II SOLLICITATIONS CREEES PAR LE FLUIDE SUR L'ENVELOPPE DE LA CITERNE

Cette étude va nous permettre de déterminer les différentes composantes du tenseur des contraintes agissant dans la citerne considérée à partir de maintenant comme une enveloppe mince elliptique d'épaisseur e constante, et de d'étudier la tenue à la fatigue au point le plus sollicité.



Hypothèses :

- ➔ On suppose les contraintes de cisaillement dues aux efforts tranchants négligeables.
- ➔ On néglige les effets de bords.

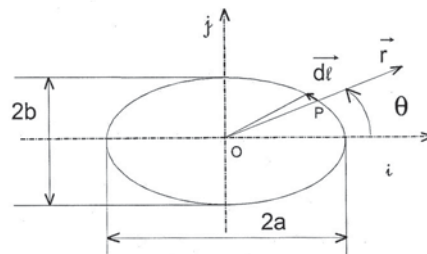
- Pour prendre en compte les effets dynamiques sur le fluide tout en évitant d'alourdir les calculs on considérera la citerne remplie d'un fluide soumis uniquement à une accélération de pesanteur verticale fictive $g_{fic} = g\sqrt{1+\beta^2}$; la surface du fluide est considérée comme horizontale.
- On suppose que la citerne est remplie à moitié $h=0$.
- On négligera le poids de la citerne devant celui du fluide transporté.

Données :

- On donne la surface de la section droite de la citerne $S_E \cong \pi e(a+b)$ où e est l'épaisseur de la citerne.
- Aire de l'ellipse $\mathcal{A} = \pi a b$

Rappels :

- Equation paramétrique de l'ellipse :



$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

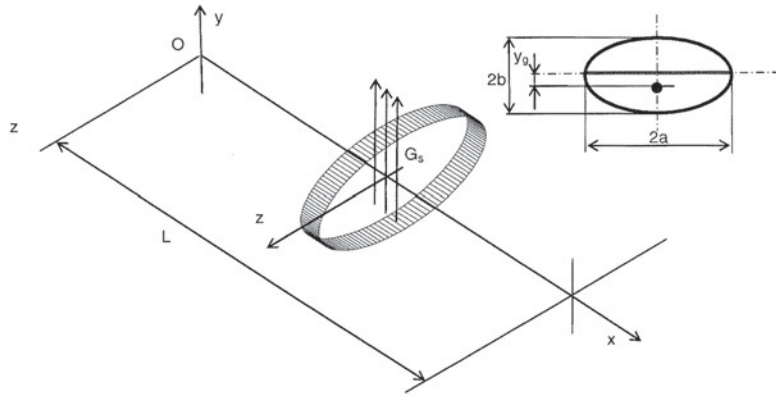
$$d\vec{t} = \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin \theta d\theta \\ b \cos \theta d\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A.II.1 Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions du fluide sur les extrémités de la citerne, au centre de cette paroi que l'on peut considérer comme

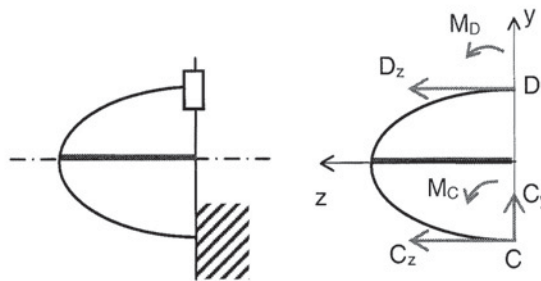
plane : $\left\{ \mathcal{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{fond_citerne}} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{FF} = R_{FFx} \vec{x} \\ \vec{M}_{FF}(A) = M_{FFz} \vec{z} \end{array} \right\}_A$

- A.II.2 En isolant une portion de citerne comprise entre 0 et x déduire l'expression de la contrainte normale pour un point de coordonnées $(x, -b, 0)$. Faire l'application numérique.

Dans cette partie on s'intéressera au changement de forme de la citerne sous l'effet de son contenu. Pour cela nous allons isoler une tranche dx de l'enveloppe de la citerne située à $x = \frac{L}{2}$. On peut alors admettre que l'on se trouve dans un état plan de déformation. Dans ces conditions on peut traiter cette tranche comme poutre courbe de section $e dx$.

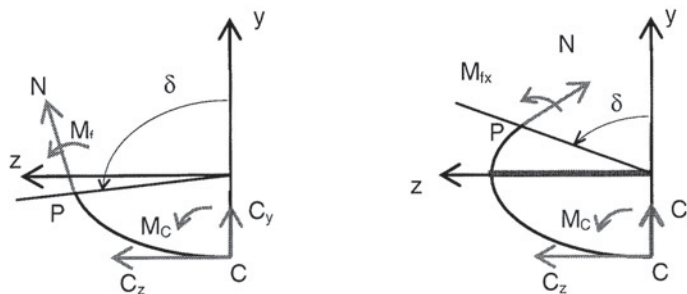


Nous allons étudier le déplacement de cette poutre relativement au point le plus bas. Ce qui nous permet d'adopter le modèle suivant :



A.II.3 On suppose que la poutre s'appuie sur son point le plus bas. Par raison de symétrie on étudie le comportement d'une demi-poutre verticale encastrée au point C et en liaison glissière avec la verticale au point D. Ecrire les équations d'équilibre de ce système de façon à exprimer les inconnues de liaison en C en fonction des inconnues de liaison en D et du chargement dû au fluide.

A.II.4 Pour déterminer les inconnues d'effort en D on souhaite utiliser les méthodes énergétiques. Donner l'expression du moment de flexion pour tout point P compris entre C et D (sans développer les calculs).



A.II.5 Ecrire les intégrales permettant d'obtenir l'énergie de déformation de flexion de cette poutre (On négligera les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal). Justifier pourquoi on ne développera pas les calculs analytiques.