ministère
Éducation
nationale

AE2-26
Repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2008

CONCOURS EXTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABITITÉS

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Notations et définitions

- Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^p$, on note C_Ω l'espace vectoriel des fonctions de Ω dans $\mathbf{R}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Dans tout le problème, on appellera *difféomorphisme* entre deux ouverts de $\mathbf{R}^p$ une bijection entre ces deux ouverts qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ainsi que sa réciproque.
- Si I est un intervalle on note I^2 le carré $I \times I$ de $\mathbf{R}^2$.
- Soit I un intervalle et f un élément de C_I . On dit que $x_0 \in I$ est un *point critique* de f si $f'(x_0) = 0$. Une *valeur critique* de f est un réel de la forme $f(x_0)$ où x_0 est un point critique. On dit qu'un point critique x_0 est *non dégénéré* si $f''(x_0)$ est non nul.
- Si A et B sont deux parties du plan $\mathbf{R}^2$ on dira que A et B sont *de même type* s'il existe deux intervalles ouverts I et J et un difféomorphisme ϕ de I^2 sur J^2 tels que :

$$A \subset I^2, \qquad B \subset J^2, \qquad \phi(A) = B$$

Objet du problème

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Pour toute fonction f élément de C_I, et pour tout réel λ on définit la partie de $\mathbf{R}^2$:

$$E_\lambda(f) = \{(x,y) \in I^2, f(x) + f(y) = \lambda\}$$

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés des ensembles $E_\lambda(f)$.

I. Préliminaires et exemples

I.A. Généralités

1. Soit I un intervalle ouvert quelconque de $\mathbf{R}$, et f un élément de C_I.
   (a) Déterminer $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f)$ (pour λ, μ distincts) et $\bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}} E_\lambda(f)$.
   (b) Démontrer que pour tout λ, $E_\lambda(f)$ est un fermé de I^2, et trouver une symétrie commune à tous les $E_\lambda(f)$.
   (c) Soit $x_0 \neq 0$. On pose $g(x) = f(x + x_0)$. Préciser l'intervalle de définition de g. Quelle transformation géométrique envoie $E_\lambda(g)$ sur $E_\lambda(f)$?
2. Déterminer selon la valeur de λ, l'ensemble $E_\lambda(f)$ lorsque la fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.
3. On prend dans cette question la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - x^3$. Démontrer que $E_0(f)$ est la réunion d'une droite et d'une ellipse.
4. On prend dans cette question la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - x^3$.
   Démontrer que $E_0(f)$ est la réunion du point $(0,0)$ et d'une courbe dont on donnera une équation polaire et qu'on tracera sommairement, par exemple à l'aide d'une calculatrice graphique.

I.B. Racine carrée d'une fonction positive

5. Dans cette question, on note $I =]a,b[$ un intervalle contenant 0 ($a, b \in \overline{\mathbf{R}}$). On suppose de plus que la fonction $f \in C_I$ vérifie l'hypothèse suivante :

   (H) 0 est l'unique point critique de f et il est non dégénéré ; on a $f(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

   (a) Expliciter les variations de f.

(b) On pose $g(x) = \int_0^1 (1-u)f''(xu)du$.

Établir l'égalité $f(x) = x^2 g(x)$.

(c) Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement positive sur $]a, b[$.

(d) Construire une fonction h croissante et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I telle que pour tout x on ait $f(x) = h(x)^2$. Justifier que h est un difféomorphisme de I sur un intervalle J qu'on précisera en fonction de f.

Définition : *la fonction h ainsi définie sera appelée racine carrée de f.*

I.C. Ovales du plan

On reprend les notations de la question **5.** en supposant toujours que f vérifie l'hypothèse **(H)**.

6. En utilisant la racine carrée de f, démontrer que pour $\lambda > 0$ l'ensemble $E_\lambda(f)$ est de même type que l'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 = \lambda$ et du carré J^2.

Définition : *dans la suite du problème, on appellera* ***ovale*** *toute partie du plan qui est de même type qu'un cercle.*

7. Une application

On considère le système différentiel (S) suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) &= -y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions inconnues de la variable t. Soit $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$,$(x_0, y_0) \neq (1, 1)$. On note : $t \to (x(t), y(t))$ l'unique solution maximale de (S) vérifiant $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

(a) Établir que les fonctions x et y ne peuvent pas s'annuler.

(b) Démontrer que le support de l'arc paramétré $t \mapsto (x(t), y(t))$ est inclus dans un ovale que l'on caractérisera à l'aide de x_0, y_0 et de la fonction g définie pour $x > 0$ par $g(x) = x - 1 - \ln(x)$.

II. Un problème de dénombrement

On rappelle le résultat suivant : *si $z \to g(z)$ est une fonction d'une variable complexe holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon r, alors elle est somme sur ce disque ouvert d'une série entière convergente.*

1. On pose, pour tout $z \in \mathbf{C}, \cos(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$ et $\sin(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$.

(a) Résoudre l'équation $\cos(z) = 0$.

(b) Établir l'existence d'une suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres **réels** tels que pour tout complexe z de module assez petit on ait :

$$\frac{\sin(z) + 1}{\cos(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

(il n'est pas demandé de calculer les coefficients b_n).

(c) Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbf{C} \setminus \{z, \cos(z) = 0\}$ par $H(z) = \dfrac{\sin(z) + 1}{\cos(z)} + \dfrac{4}{2z - \pi}$ possède un prolongement holomorphe sur le disque ouvert $\left\{z, |z| < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

(d) En déduire que $b_n \sim \dfrac{2^{n+2} n!}{\pi^{n+1}}$.

2. Permutations alternantes

On donne $a_0, \ldots, a_{n-1}$, n nombres réels distincts rangés par ordre croissant : $a_0 < \ldots < a_{n-1}$. Soit σ une permutation de l'ensemble $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. On dit que σ est *alternante* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\sigma(a_{2i}) < \sigma(a_{2i+1}) \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 < 2i+1 \leqslant n-1$$
$$\sigma(a_{2i-1}) > \sigma(a_{2i}) \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 < 2i \leqslant n-1$$

On dit que σ est *antialternante* si elle vérifie les inégalités inverses. On note e_n le nombre de permutations alternantes (par convention $e_0 = e_1 = 1$).

(a) Déterminer toutes les permutations alternantes ainsi que l'entier e_n lorsque $n = 2, 3$ ou 4.

(b) Démontrer qu'il y a (pour $n \geqslant 2$) autant de permutations alternantes que de permutations antialternantes.

(c) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$2e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} e_i e_{n-i}$$

Indication : *pour une permutation σ de $\{a_0, \ldots a_n\}$, on pourra considérer l'indice j tel que $\sigma(a_j) = a_0$.*

(d) En conclure que pour tout n, $e_n = b_n$.

III. Les serpents d'Arnold

Dans cette partie, $I = \mathbf{R}$.
On se propose d'étudier la topologie de $E_\lambda(f)$ pour une famille de fonctions appelées *serpents d'Arnold.*
Un entier $n > 0$ étant donné, on fixe n réels $a_0 < \ldots < a_{n-1}$ tels que les sommes $a_i + a_j$ pour $i \leqslant j$ soient toutes distinctes.
On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans lui même qui vérifient les propriétés suivantes :

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$;
- f possède exactement n points critiques, $x_0(f) < \ldots < x_{n-1}(f)$ et ils sont tous non dégénérés ;
- Les valeurs critiques de f sont $a_0, \ldots, a_{n-1}$.
  Autrement dit, il existe une permutation σ_f de $a_0, \ldots, a_{n-1}$ telle que, pour tout i, $f(x_i(f)) = \sigma_f(a_i)$.
  La permutation σ_f s'appelle permutation associée à f ;
- $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$;
- $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Définition : *un élément f de $\mathcal{A}_n$ s'appelle un serpent à n points critiques.*

Remarque : pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $x_0, \ldots, x_{n-1}$ les points critiques de f. De même, la notation $\mathcal{A}_n$ est en réalité une abréviation pour $\mathcal{A}_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Classes d'équivalence de serpents

1. Soit $f \in \mathcal{A}_n$. Préciser les variations de f selon la parité de n.
2. (a) Démontrer que la relation $\sim$ définie par « $f \sim g$ si et seulement s'il existe un difféomorphisme croissant h de $\mathbf{R}$ tel que $f = g \circ h$ » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}_n$.

   (b) Démontrer que si $f \sim g$ alors pour tout λ, $E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(g)$ sont de même type.
3. Soit h un difféomorphisme croissant de $\mathbf{R}$. Démontrer que $f \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow f \circ h \in \mathcal{A}_n$, et qu'alors $\sigma_f = \sigma_{f \circ h}$.

4. Réciproquement on suppose que f et g sont deux éléments de $\mathcal{A}_n$ qui vérifient $\sigma_f = \sigma_g$.
   (a) Démontrer qu'il existe une unique bijection h croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f = g \circ h$ et $h(x_k(f)) = x_k(g)$.
   (b) En utilisant la partie I, démontrer que h est un difféomorphisme.
5. (a) Démontrer que le nombre de classes d'équivalence de $\sim$ est majoré par l'entier b_n défini dans la partie **II**.
   (b) On admet que si $[\lambda, \mu]$ ne contient aucun élément $a_i + a_j$, les ensembles $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont de même type. En déduire un majorant du nombre de types des $E_\lambda(f)$, lorsque λ parcourt $\mathbf{R}$ et f parcourt $\mathcal{A}_n$.

Topologie de $E_\lambda(f)$ dans le cas non critique

On se propose dans les questions qui suivent de décrire la topologie de $E_\lambda(f)$ lorsque f est un élément de $\mathcal{A}_n$ et que le réel λ n'est pas de la forme $a_i + a_j$.
On note $I_0 =]-\infty, x_0], I_n = [x_{n-1}, \infty[$, et pour k variant de 1 à $n-1$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$.

6. Sous-graphes
   (a) Vérifier que $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ est, pour tout (i, j), l'ensemble vide ou le graphe d'une fonction strictement monotone continue définie sur un intervalle fermé inclus dans I_i.

Définition : *lorsque l'intersection $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ est non vide, on convient de l'appeler un **sous-graphe** de $E_\lambda(f)$.*

   (b) Démontrer que les extrémités du sous-graphe $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ sont sur la frontière du rectangle $I_i \times I_j$.
   (c) Démontrer que chaque extrémité d'un sous-graphe appartient à exactement un autre sous-graphe et que deux sous-graphes ne peuvent avoir d'autre point commun qu'une extrémité.
   (d) Démontrer que, si n est impair, tous les sous-graphes sont bornés et que si n est pair il y en a exactement 2 qui sont non bornés.
7. Composantes connexes de $E_\lambda(f)$
   (a) Démontrer que toute composante connexe est une union $\bigcup_{i=1}^{p} S_i$ de sous-graphes tels que S_i et S_{i+1} (pour i variant de 1 à $p-1$) ont une extrémité commune.
   (b) En déduire que lorsque n est pair il y a exactement une composante connexe non bornée.
   (c) Lorsque C est une composante connexe bornée, construire une bijection continue du cercle unité S^1 sur C

On peut alors démontrer, mais nous ne le ferons pas, que C est un ovale.

8. Démontrer que le nombre d'ovales est inférieur ou égal à $[\frac{n+1}{2}]^2$ (où [.] désigne la partie entière).
9. Dans cette question on choisit $n = 2$.
   (a) Illustrer le fait que les composantes ne sont pas forcément des ovales lorsque λ est l'un des $a_i + a_j$
   (b) Démontrer qu'il y a au maximum 4 ensembles $E_\lambda(f)$ de types différents quand λ décrit $\mathbf{R}$.

IV. Réalisation polynomiale des serpents

Tournez la page S.V.P.

On garde les notations de la partie précédente. L'entier n est supposé supérieur ou égal à 2. On souhaite démontrer le théorème $(\boldsymbol{T})$ suivant, dû au mathématicien René Thom :

$(\boldsymbol{T})$ *Pour toute* $f \in \mathcal{A}_n$ *il existe un polynôme* P *de degré* $n+1$ *tel que* $f \sim P$.

Il en résulte que les différents ensembles $E_\lambda(f)$ vus ci-dessus sont tous de même type qu'une courbe algébrique.

Notations

On note Ω_1 et Ω_2 les deux ouverts de $\mathbf{R}^{n-1}$ définis par :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},\ 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}\}\,,\\ \Omega_2 &= \{(y_1,\dots,y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},\ 0 < y_1,\ \text{ et pour tout } i > 0,\ y_{2i-1} > y_{2i} \text{ et } y_{2i} < y_{2i+1}\}\,.\end{aligned}$$

Si $x = (x_1,\dots,x_{n-1})$ est un élément de Ω_1, on note P_x le polynôme de degré n défini par

$$P_x(t) = t(x_1 - t)\cdots(x_{n-1} - t)$$

Enfin, pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$, on définit un polynôme $Q_{i,x}$ en posant $Q_{i,x}(t) = \dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t \frac{P_x(u)}{x_i - u}du.$

A. Deux lemmes de topologie et un d'algèbre

1. Soient U et V deux ouverts connexes de $\mathbf{R}^{n-1}$ et ϕ une application continue de U dans V. On fait les deux hypothèses suivantes :

   H1 : l'image par ϕ de tout ouvert de U est un ouvert de V ;

   H2 : l'image réciproque par ϕ de tout compact de V est un compact de U.

   Démontrer que ϕ est surjective.
2. Soit E_n l'ensemble des polynômes unitaires (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) de degré n à coefficients réels. Démontrer que $\displaystyle\inf_{P\in E_n}\int_0^1 |P(t)|dt$ est un réel **strictement** positif.

   Dans la suite, on notera $C = \displaystyle\inf_{P\in E_n}\int_0^1 |P(t)|dt$.
3. Soient $R_1,\dots,R_{n-1}, n-1$ polynômes de degré inférieur ou égal à $n-2$, linéairement indépendants et $(t_1,\dots,t_{n-1}), n-1$ réels distincts. Démontrer que le déterminant $\det(R_i(t_j))$ est non nul.

B. Le théorème (T)

Soit Φ l'application :

$$\begin{array}{ccc}\Omega_1 & \to & \Omega_2\\ x & \mapsto & \left(\displaystyle\int_0^{x_1} P_x(t)dt,\dots,\int_0^{x_{n-1}} P_x(t)dt\right)\end{array}$$

Afin d'alléger les notations, le vecteur $\Phi(x)$ sera noté $(y_1,\dots,y_{n-1})$.

4. Justifier que cette application est bien définie, exprimer ses dérivées partielles en fonction des polynômes $Q_{i,x}$ et en déduire que Φ vérifie l'hypothèse **H1**.
5. Pour $x \in \Omega_1$ démontrer l'inégalité :

$$\left|y_1 + \sum_{i=1}^{n-2}(-1)^i(y_{i+1} - y_i)\right| \geqslant C(x_{n-1})^{n+1}\,.$$

6. Démontrer que Φ vérifie l'hypothèse **H2** et en déduire le théorème $(\boldsymbol{T})$.
