

SESSION DE 2008

**CONCOURS INTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS
ET CONCOURS D'ACCÈS A L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION**

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique -, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

Notations

On désigne par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit E un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On désigne par E^* l'espace vectoriel dual de E . On désigne par $\text{End}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et par $\text{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E . On note $\mathbf{1}_E$ l'application identique de E .

Si u est un endomorphisme de E , on note ${}^t u$ l'endomorphisme de E^* transposé de u ; si X est une partie de $\text{End}(E)$, on note ${}^t X$ l'ensemble des transposés des éléments de X .

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F et soit x un vecteur de E . Pour alléger les notations, il nous arrivera d'écrire ux pour désigner l'image $u(x)$ du vecteur x par l'application u .

Soit n un entier ≥ 1 ; on désigne par $M_n(\mathbf{C})$ l'algèbre des matrices carrées complexes à n lignes et n colonnes. On note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbf{C})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la i -ème ligne et j -ième colonne qui est égal à 1. On note $\text{GL}(n, \mathbf{C})$ le groupe des matrices inversibles et $\mathbf{1}_n$ la matrice unité de $M_n(\mathbf{C})$.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbf{C}$ -algèbres possédant chacune un élément unité; un *morphisme unitaire* d'algèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application $\mathbf{C}$ -linéaire qui préserve les produits et les éléments unités.

Les deux premières parties sont indépendantes. La sixième partie est indépendante des précédentes.

Partie I

1) Soit W un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $p_1, \dots, p_n$ des endomorphismes de W . Pour $i = 1, \dots, n$, on note W_i l'image de p_i .

Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace vectoriel W est somme directe des sous-espaces W_i et, pour $i = 1, \dots, n$, p_i est le projecteur d'image W_i parallèlement à la somme directe des W_j , $j \neq i$.

(ii) Pour $i = 1, \dots, n$, on a $p_i^2 = p_i$; pour $j \neq i$, on a $p_i p_j = 0$; et on a $p_1 + \dots + p_n = \mathbf{1}_W$.

2) Soit toujours W un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit n un entier ≥ 1 et soit $\rho : M_n(\mathbf{C}) \rightarrow \text{End}(W)$ un morphisme unitaire d'algèbres.

a) Pour $i = 1, \dots, n$, on note p_i l'endomorphisme $\rho(E_{i,i})$. Démontrer que les endomorphismes p_i satisfont à la condition (ii) de la question (I.1).

b) Pour $i = 1, \dots, n$, on note W_i l'image de p_i . Démontrer que la restriction de $\rho(E_{i,j})$ à W_j induit un isomorphisme de W_j sur W_i .

c) Dans la suite de cette question, on fixe une base $(w_1, \dots, w_r)$ de l'espace vectoriel W_1 . On pose

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = \rho(E_{2,1})w_1, \quad \dots, \quad v_n = \rho(E_{n,1})w_1.$$

Démontrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre et que, pour tous entiers s , t et k compris entre 1 et n , on a

$$\rho(E_{s,t})v_k = \delta_{t,k}v_s,$$

où le symbole de Kronecker $\delta_{t,k}$ vaut 1 lorsque $t = k$, et vaut 0 sinon.

d) Plus généralement, pour $1 \leq j \leq r$, on note V_j le sous-espace vectoriel de W engendré par les vecteurs $\rho(E_{k,1})w_j$, pour $k = 1, \dots, n$. Démontrer que W est somme directe des sous-espaces V_j , $1 \leq j \leq r$.

e) Démontrer qu'il existe une base de l'espace vectoriel W dans laquelle, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{C})$, la matrice de l'endomorphisme $\rho(M)$ est la matrice diagonale par blocs

$$\text{diag}(M, \dots, M) = \begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{pmatrix}$$

Partie II

Dans cette partie, on désigne par E un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une partie X de $\text{End}(E)$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de X sont $\{0\}$ et E . On désigne par $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\text{End}(E)$ qui contient $\mathbf{1}_E$, et on se propose de démontrer qu'elle est égale à $\text{End}(E)$.

1) Soient u et v des éléments de $\text{End}(E)$ qui commutent entre eux. Démontrer que tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

2) Soit X une partie irréductible de $\text{End}(E)$. Démontrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à tous les éléments de X est l'ensemble des endomorphismes scalaires.

3) Rappelons que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\text{End}(E)$ contenant $\mathbf{1}_E$. Démontrer que ${}^t\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\text{End}(E^*)$.

4) Soit x un vecteur non nul de E . Préciser à quoi est égal le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}x$ de E .

5) Soit $u \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Démontrer qu'il existe un vecteur y de E et une forme linéaire $\ell \in E^*$ tels que l'on ait $u(x) = \ell(x)y$ pour tout $x \in E$.

6) Démontrer que, si l'algèbre $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme de rang 1, alors elle les contient tous. En déduire que l'on a alors $\mathcal{A} = \text{End}(E)$.

7) Dans cette question, on suppose que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme u dont le rang r est ≥ 2 , et on se propose de démontrer qu'il existe un endomorphisme $u' \in \mathcal{A}$, non nul, dont le rang est strictement plus petit que r .

a) Démontrer qu'il existe x et y dans E et v dans $\mathcal{A}$ tels que le couple de vecteurs $(u(x), u(y))$ soit libre et que l'on ait $vu(x) = y$.

b) Démontrer qu'il existe alors $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que la restriction de l'endomorphisme $uv - \lambda \mathbf{1}_E$ à l'image $u(E)$ de u ne soit ni injective ni nulle.

c) Vérifier que l'endomorphisme $u' = uvu - \lambda u$ convient.

8) Démontrer finalement que l'on a $\mathcal{A} = \text{End}(E)$.

Partie III

Soit n un entier ≥ 1 . On appelle *dérivation* de $M_n(\mathbf{C})$ toute application linéaire d de $M_n(\mathbf{C})$ dans $M_n(\mathbf{C})$ telle que, pour tous X et $Y \in M_n(\mathbf{C})$, on ait

$$d(XY) = d(X)Y + Xd(Y).$$

1) Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$; démontrer que l'application d_A de $M_n(\mathbf{C})$ dans $M_n(\mathbf{C})$ définie par

$$d_A(X) = AX - XA,$$

est une dérivation.

2) Dans cette question, on se propose de démontrer que toute dérivation de $M_n(\mathbf{C})$ est de la forme ci-dessus.

a) Soit $d : M_n(\mathbf{C}) \rightarrow M_n(\mathbf{C})$ une dérivation. Démontrer que l'application ρ de $M_n(\mathbf{C})$ dans $M_{2n}(\mathbf{C})$ définie par

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} X & d(X) \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

est un morphisme unitaire d'algèbres.

b) Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A, B, C, D appartiennent à $M_n(\mathbf{C})$, telle que l'on ait, pour tout $X \in M_n(\mathbf{C})$,

$$P \rho(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} P.$$

c) Conclure.

Partie IV

Soit n un entier ≥ 1 . Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{C})$, on note $\text{Tr}(M)$ la trace de M , somme des coefficients diagonaux de M .

1) a) Démontrer que l'application ψ de $M_n(\mathbf{C}) \times M_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\psi(X, Y) = \text{Tr}(XY),$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

b) Démontrer que, si $(X_1, \dots, X_{n^2})$ est une base de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{C})$, il existe une autre base $(X'_1, \dots, X'_{n^2})$ de $M_n(\mathbf{C})$ telle que, pour tous entiers i et j compris entre 1 et n^2 , on ait

$$\psi(X_i, X'_j) = \delta_{i,j} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

2) Démontrer que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$, on a

$$\sum_{1 \leq i \leq n^2} X_i A X'_i = \text{Tr}(A) \mathbf{1}_n.$$

Partie V

On considère dans cette partie un sous-groupe G de $GL(n, \mathbf{C})$ ayant la propriété suivante :

(P) Il existe un entier $m \geq 1$ tel que l'on ait $g^m = \mathbf{1}_n$ pour tout $g \in G$.

On fixe l'entier m .

1) Démontrer que chaque élément g de G est diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

2) Démontrer que l'ensemble $\{\text{Tr}(g), g \in G\}$ est fini.

3) On suppose, dans cette question, que l'ensemble G , considéré comme ensemble d'endomorphismes de $\mathbf{C}^n$ (en identifiant $M_n(\mathbf{C})$ et $\text{End}(\mathbf{C}^n)$), est irréductible.

a) Démontrer que l'ensemble G contient une base de l'espace vectoriel $M_n(\mathbf{C})$.

b) Démontrer que l'ensemble G est fini (on pourra utiliser les questions (IV.1) et (V.2)).

4) Dans cette question, on ne suppose plus que l'ensemble G soit irréductible.

a) Démontrer qu'il existe des entiers p et q , avec $p + q = n$, et une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ dans laquelle chaque élément g de G s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} T(g) & U(g) \\ 0 & V(g) \end{pmatrix},$$

où $T(g) \in M_p(\mathbf{C})$ et $V(g) \in M_q(\mathbf{C})$.

b) Posons $G_1 = \{g \in G, T(g) = \mathbf{1}_p\}$ et $G_2 = \{g \in G, V(g) = \mathbf{1}_q\}$. Démontrer que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G .

Déterminer $G_1 \cap G_2$.

c) Soient K un groupe et H un sous-groupe de K . L'indice de H dans K est le cardinal de l'ensemble quotient K/H . Établir le résultat général suivant :

Soient K un groupe, K_1 et K_2 des sous-groupes distingués de K , tous deux d'indice fini dans K ; alors l'indice de $K_1 \cap K_2$ dans K est fini.

d) Conclure.

Partie VI

Soient n et m des entiers ≥ 1 . Soient $A \in M_n(\mathbf{C})$ et $B \in M_m(\mathbf{C})$; on définit la matrice $A * B \in M_{nm}(\mathbf{C})$ par

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

1) Démontrer que l'application ϕ de $M_n(\mathbf{C}) \times M_m(\mathbf{C})$ dans $M_{nm}(\mathbf{C})$ définie par $\phi(A, B) = A * B$ est bilinéaire et satisfait à

$$(A * B)(A' * B') = AA' * BB'$$

pour toutes matrices $A, A' \in M_n(\mathbf{C})$, $B, B' \in M_m(\mathbf{C})$.

2) Démontrer que l'image de l'application ϕ engendre l'espace vectoriel $M_{nm}(\mathbf{C})$.

On suppose désormais $n = m$.

3) Posons

$$P = \sum_{1 \leq i, j \leq n} E_{i,j} * E_{j,i}.$$

a) Démontrer que l'on a $P^2 = \mathbf{1}_n$.

b) Démontrer que, pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, on a

$$P(A * B)P = B * A.$$

4) Soient A et $B \in M_n(\mathbf{C})$.

a) Calculer la trace et le déterminant de la matrice $A * B$.

b) Déterminer les valeurs propres de $A * B$ en fonction de celles de A et de B .
