ministère
Éducation
nationale

AI2-26
Repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2008

CONCOURS INTERNE
DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS AGRÉGÉS
ET CONCOURS D'ACCÈS A L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique -, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Introduction et notations

Dans ce problème, on note $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels.

On dit qu'un endomorphisme T d'un espace vectoriel est *nilpotent* s'il existe un nombre entier $s \geqslant 0$ tel que $\mathrm{T}^s = 0$.

Si f est une fonction de classe C^∞ de la variable réelle x et n un entier $\geqslant 0$, on note $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ la dérivée n-ième de la fonction f.

Si g est une fonction de classe C^∞ de la variable $x = (x_1, \ldots, x_n)$ définie dans une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, on note $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de g par rapport à la variable x_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pour des entiers p et n tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on définit les coefficients binomiaux par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{p!} \quad \text{pour} \quad 0 < p < n, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

L'un des objets de ce problème est la démonstration et l'application de la *formule de réversion de Lagrange* qui permet de calculer, dans certains cas, la dérivée n-ième d'une fonction réciproque.

On étudie d'abord la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ dont le terme général est l'unique solution $\geqslant 0$ de l'équation

$$(\mathrm{E}_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

Dans un premier temps, on établit directement une expression explicite de u_n comme somme d'une série convergente (parties **I** et **II**).
On établit ensuite la formule de réversion de Lagrange (partie **III**).
On applique enfin cette formule pour obtenir une autre démonstration de l'expression de u_n (partie **IV**).

On rappelle les résultats suivants qui pourront être utilisés sans démonstration :

A) Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, on a l'équivalence (*formule de Stirling*) :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,.$$

B) Pour tout entier $q \geqslant 1$, la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \binom{n+q-1}{n} x^n$$

a un rayon de convergence égal à 1 et, pour $-1 < x < 1$, sa somme est égale à $1/(1+x)^q$.

C) Le *théorème des fonctions implicites* pour une fonction F de classe C^∞, définie sur $\mathbf{R}^3$, peut s'énoncer ainsi :

On suppose qu'en un point (x_0, y_0, z_0) de $\mathbf{R}^3$, on a

$$\mathrm{F}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Il existe alors un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbf{R}^2$, un voisinage ouvert V de z_0 dans $\mathbf{R}$ et une fonction $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ caractérisée par la condition

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U},\ \forall z \in \mathrm{V}, \quad (\mathrm{F}(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow z = \varphi(x,y)).$$

La fonction φ est de classe C^∞ sur U et pour tout point (a,b) de U, on a

$$F(a,b,\varphi(a,b)) = 0\,,$$

ainsi que les relations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\varphi(a,b))}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\varphi(a,b))}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}\,.$$

On dit que la fonction φ est *définie implicitement* sur U par la relation $F(x,y,z) = 0$.

D) Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ une suite double de nombres réels. Si la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\Big)$ est finie, alors les trois expressions

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}\Big)\,,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,k}\Big)\,,\quad \sum_{q=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+k=q}a_{n,k}\Big)\,,$$

ont un sens et sont égales. Leur valeur commune est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}$.

E) Soit R un nombre réel > 0. Si les fonctions f et g sont sommes de séries entières convergentes dans l'intervalle $]-R,R[$, leur somme $f+g$ et leur produit fg sont aussi sommes de séries entières convergentes dans le même intervalle.

I . La suite (u_n)

1) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'existence d'une unique solution réelle $\geqslant 0$ de l'équation

$$(E_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

Cette solution est notée u_n. Démontrer que l'on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

3) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0.$$

4) a) Calculer u_2.
   b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$.

5) Pour $n \geqslant 1$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \dfrac{1}{2}$. Démontrer que $n\,\varepsilon_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

6) En déduire, à l'aide de la question (I.3), le développement asymptotique suivant de u_n, pour n tendant vers $+\infty$:

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\,.\,2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\,.$$

7) a) Déterminer le plus petit entier $s \geqslant 1$ pour lequel on a

$$0 < u_s - \frac{1}{2} < 10^{-2}.$$

Pour cela, on pourra déterminer, avec une calculatrice, le signe de $f_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{100}\right)$ pour $n = 2, 3, \dots$, où f_n est la fonction définie par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

b) Écrire en français une procédure qui, pour un entier $p \geqslant 1$ donné, permet de déterminer le plus petit entier s pour lequel on a

$$0 < u_s - \frac{1}{2} \leqslant 10^{-p}.$$

On pourra utiliser les fonctions g_n définies par

$$g_n(x) = (x-1)\, f_n(x).$$

8) On se propose de démontrer l'inégalité suivante, valable pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \tag{1}$$

a) En utilisant la fonction g_n définie dans la question (I.7), démontrer que l'inégalité (1) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}. \tag{2}$$

b) Pour $x > 0$, on pose

$$\psi(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) - (x+1)\ln(2).$$

Étudier la variation de la fonction ψ et en déduire l'inégalité (2).

9) a) Démontrer l'inégalité $\frac{1}{2} < u_4 < \frac{6}{11}$.

b) En déduire que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 4$, l'inégalité

$$\frac{u_n}{2(1-u_n)} < \frac{n^{\frac{n}{n+1}}}{n+1}.$$

II . Expression de u_n comme somme d'une série

Dans cette partie, on se propose d'établir, lorsque l'entier p est assez grand, l'expression suivante de u_p comme somme d'une série convergente :

$$u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1}. \tag{T_p}$$

1) Soit p un entier $\geqslant 1$. On note S_p la série entière définie par

$$\mathrm{S}_p(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n} \binom{n(p+1)}{n-1} x^n.$$

a) Démontrer que le rayon de convergence ρ_p de la série entière S_p est donné par

$$\rho_p = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}.$$

b) Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, la série du second membre de la relation (T_p) est convergente. [On utilisera la question (I.8).]

2) a) Démontrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\, 2^{2k+1}} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{(n+1)\, 2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n}.$$

b) En déduire la relation (T_1).

3) On a admis dans les Préliminaires que, pour tout entier $q \geqslant 1$, la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \binom{n+q-1}{n} x^n$$

a un rayon de convergence égal à 1, et que, pour $x \in]-1, 1[$, sa somme est égale à $1/(1+x)^q$.

En déduire, pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ et $x \in]-1, 1[$, l'égalité

$$\frac{x^n}{(1+x)^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} x^{n+k}.$$

4) Pour $p \geqslant 1$, on pose

$$v_p = 2u_p - 1.$$

a) Démontrer que l'on a

$$\frac{v_p}{(1+v_p)^{p+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

b) Déduire de ce qui précède que l'on a, pour $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, l'égalité

$$\frac{1}{2^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^{n+k}.$$

5) **Dans toute la fin de cette deuxième partie, on fixe l'entier $p \geqslant 4$, et on pose**

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2n} \binom{n(p+1)+k-1}{k} \binom{n(p+1)}{n-1} v_p^{n+k}.$$

a) Démontrer la relation

$$(\mathrm{U}_p) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \right).$$

b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la série $\sum_{k \geqslant 0} |a_{n,k}|$ est convergente et déterminer sa somme.

c) En utilisant les questions (I.9) et (II.1), démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| \right)$ est convergente.

6) Soient q un entier $\geqslant 2$ et $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré est $\leqslant q-1$. On note Δ_q l'application qui, à un polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ de degré $\leqslant q-1$, associe le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})$.

a) Démontrer que Δ_q est un endomorphisme nilpotent de $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$.

b) En déduire que, si P est un polynôme de degré $\leqslant q-1$, on a

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\binom{q}{j}\mathrm{P}(\mathrm{X}+j)=0.$$

7) a) Soit toujours q un entier $\geqslant 2$. En utilisant la question précédente, démontrer que la somme $\sum a_{n,k}$ étendue aux indices (n,k) tels que $n\geqslant 1$, $k\geqslant 0$ et $n+k=q+1$, est nulle.

b) En déduire la relation (T_p) pour $p\geqslant 4$.

8) On fixe toujours l'entier $p\geqslant 4$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose

$$\lambda_n=\frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

a) Démontrer l'existence d'un nombre réel μ_p appartenant à l'intervalle $]0,1[$ tel que l'on ait

$$\lambda_{n+1}\sim\mu_p\lambda_n \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

b) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\lambda_n$ est convergente et que son reste

$$\mathrm{R}_p(n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k\,2^{k(p+1)+1}}\binom{k(p+1)}{k-1}$$

satisfait à l'équivalence $\mathrm{R}_p(n)\sim\dfrac{\mu_p}{1-\mu_p}\lambda_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

III . Réversion de Lagrange

Dans cette partie f et Φ désignent deux fonctions de classe C^∞ définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Pour x, t et $y\in\mathbf{R}$, on pose

$$\mathrm{F}(x,t,y)=t-y+x\,\Phi(y).$$

1) a) En utilisant les rappels du Préliminaire, démontrer qu'il existe un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbf{R}^2$ et une fonction $\varphi:\mathrm{U}\to\mathbf{R}$ de classe C^∞, telle que $\varphi(0,0)=0$, et $\mathrm{F}(x,t,\varphi(x,t))=0$ pour $(x,t)\in\mathrm{U}$.

b) Démontrer que l'on a dans U l'égalité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=(\Phi\circ\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

2) On définit la fonction u dans U par $u=f\circ\varphi$.

a) Vérifier que la fonction u est de classe C^∞ et satisfait à l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(\Phi\circ\varphi)\,\frac{\partial u}{\partial t}.$$

b) Plus généralement, démontrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, que l'on a

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big((\Phi \circ \varphi)^n \frac{\partial u}{\partial t}\Big).$$

c) En déduire que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour $(0,t) \in \mathrm{U}$, l'égalité

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\Phi(t)^n f'(t)).$$

3) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$.

a) Justifier que l'on peut définir une fonction σ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ par

$$\sigma(s) = \frac{s}{g(s)} \quad \text{si} \quad s \neq 0,$$
$$\sigma(0) = \frac{1}{g'(0)}.$$

b) Démontrer que la fonction σ est de classe C^1 au voisinage de 0.

c) Plus précisément, démontrer que la fonction σ est de classe C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. [Pour cela, on pourra calculer et utiliser l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g'(st)\,dt$.]

4) Dans la fin de cette partie du problème, on conserve la fonction g de la question (III.3). Expliquer l'existence d'un intervalle J, voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, et d'une fonction h, de classe C^∞ sur $g(\mathrm{J})$, qui soit réciproque de la restriction $g|\mathrm{J}$.

5) Les résultats des questions (III.1) et (III.2) restent valables lorsque la fonction Φ n'est définie que dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ car d'emblée on n'a utilisé que des propriétés locales de la fonction Φ. On pourra utiliser ces résultats dans ce cadre plus étendu.

Dans cette question, on prend pour fonction f la fonction identique (caractérisée par $f(x) = x$) et pour fonction Φ la fonction σ définie dans la question (III.3).

a) Démontrer que l'on a alors $\varphi(x,0) = h(x)$ pour x voisin de 0.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, les fonctions $\dfrac{d^n h}{dx^n}$ et $\dfrac{d^{n-1}(\sigma^n)}{dt^{n-1}}$ prennent la même valeur au point 0, c'est-à-dire

$$\frac{d^n h}{dx^n}(0) = \frac{d^{n-1}(\sigma^n)}{dt^{n-1}}(0).$$

Cette relation constitue la *formule de réversion de Lagrange.*

6) Plus généralement, démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute fonction f de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, la relation

$$\frac{d^n(f \circ h)}{dx^n}(0) = \frac{d^{n-1}(\sigma^n f')}{dt^{n-1}}(0).$$

IV . Application à la suite (u_n)

1) Pour $p \geqslant 1$ et $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -1$, on pose

$$\tau_p(x) = \frac{x}{(1+x)^{p+1}}.$$

Rappelons que ρ_p désigne le rayon de convergence de la série entière S_p calculé dans la question (II.1).

Démontrer que la fonction τ_p réalise un homéomorphisme de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{p}\right]$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$, et un difféomorphisme de classe C^∞ de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{p}\right[$ sur l'intervalle $[0, \rho_p[$,

2) Pour $p \geqslant 1$, on note $w_p : [0, \rho_p] \to \mathbf{R}$ la fonction réciproque de la restriction de la fonction τ_p à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{p}\right]$. Démontrer, à l'aide de la formule de réversion de Lagrange, que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{w_p^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

3) Soit $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ une série à termes > 0. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha > 1$ tel que l'on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On se propose de démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ est convergente. Pour cela, on choisit un nombre réel β tel que $1 < \beta < \alpha$, et on considère la série de terme général $b_n = 1/n^\beta$.

a) Dire pourquoi la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} b_n$ est convergente.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ est convergente.

4) On a introduit dans la question (II.1) la série entière S_p définie par

$$\mathrm{S}_p(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1} x^n,$$

et on a calculé son rayon de convergence ρ_p.

Démontrer que cette série entière est convergente sur tout l'intervalle $[-\rho_p, \rho_p]$.

5) On se propose de démontrer l'égalité $w_p = 2\,\mathrm{S}_p$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$.

a) Démontrer que les fonctions $x \mapsto 2\,\mathrm{S}_p(x) - x\,(1 + 2\,\mathrm{S}_p(x))^{p+1}$ et $x \mapsto w_p(x) - x\,(1 + w_p(x))^{p+1}$ ont mêmes développements limités à tous ordres, au voisinage de 0.

b) En déduire que, pour tout $x \in [0, \rho_p]$, on a $2\,\mathrm{S}_p(x) - x\,(1 + 2\,\mathrm{S}_p(x))^{p+1} = 0$.

c) En déduire que l'on a $w_p = 2\,\mathrm{S}_p$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$.

6) a) Vérifier que le nombre réel v_p défini dans la question (II.4) appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{p}\right]$ pour $p \geqslant 1$.

b) Déduire de ce qui précède une autre démonstration, pour $p \geqslant 1$, de la relation

$$(\mathrm{T}_p) \qquad u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

de la partie II de l'énoncé.

o o o